Sistemi Lineari

Corso di Teoria dei Segnali

A.A. 2021-2022

Introduzione

- Sistemi dinamici lineari sono descritti da sistemi di equazioni differenziali lineari che legano le funzioni del tempo coinvolte (ingresso, stato, uscita)

$$\dot{s}(t) = As(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cs(t) + Dx(t)$$

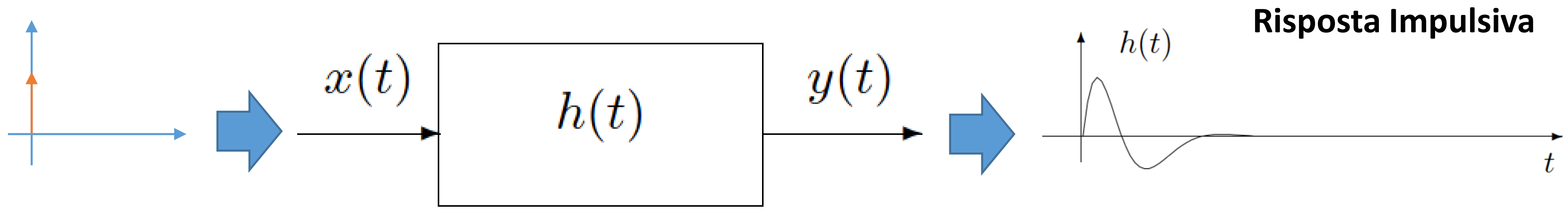
- Dato un sistema dinamico, noti l'istante iniziale t_0, la funzione di ingresso $x(t)$ per $t > t_0$ e lo stato iniziale $s(t_0) = s_0$ è possibile risolvere il sistema e ottenere il movimento dello stato ($s(t)\ con\ t \geq t_0$) e dell'uscita ($y(t)\ con\ t \geq t_0$)

Testo adattato da Bolzern, Scattolini, Schiavoni, *Fondamenti di controlli automatici* , 2015

Risposta impulsiva

- Un sistema lineare (condizioni iniziali nulle) tempo-invariante (LTI, Linear Time-Invariant), di tipo SISO (Single-Input Single-Output), è descritto in forma compatta dalla **risposta impulsiva** $h(t)$.

- La risposta impulsiva è l'uscita del sistema all'ingresso $x(t) = \delta(t)$



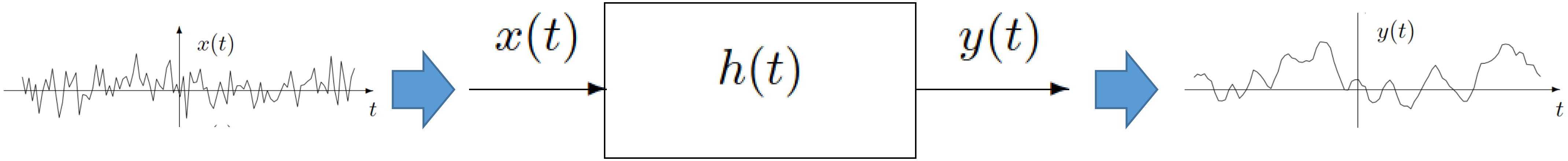
Risposta a segnale generico

- L’uscita del sistema per un qualunque segnale di ingresso $x(t)$ è la convoluzione lineare tra risposta impulsiva e segnale di ingresso

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t-\xi)d\xi.$$

- Dovuto al principio di sovrapposizione degli effetti

Risposta ad un segnale generico



Proprietà Convoluzione - 1

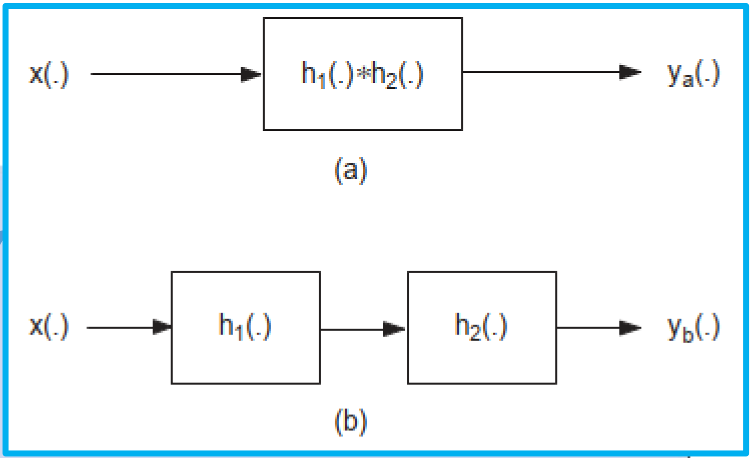
Proprietà 4.2 (proprietà della convoluzione)

(a) **Proprietà commutativa:**

$$x(\cdot) * h(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot).$$

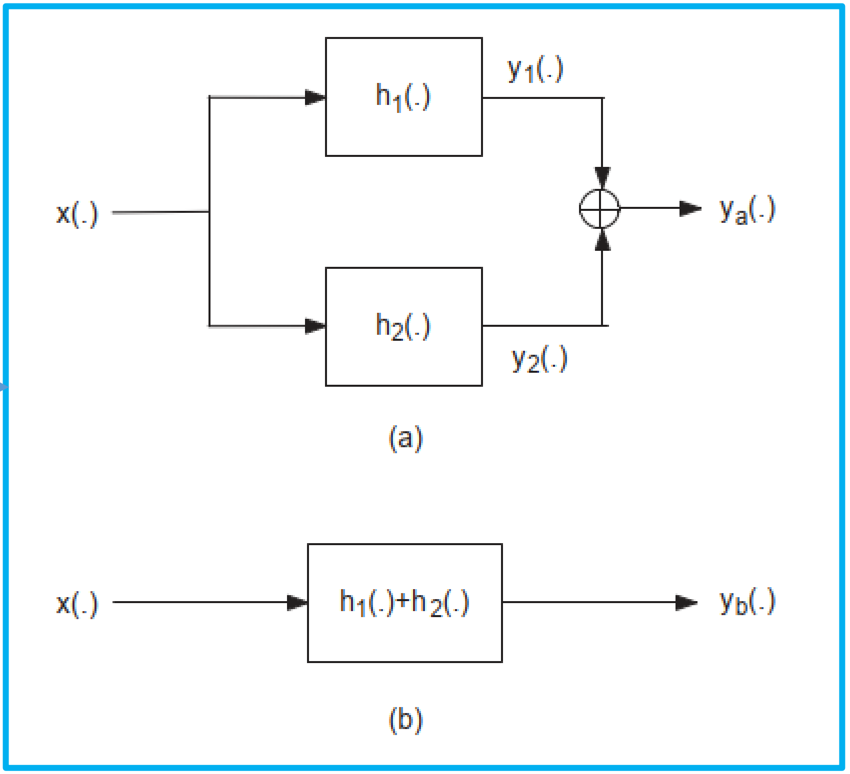
(b) **Proprietà associativa:**

$$x(\cdot) * [h_1(\cdot) * h_2(\cdot)] = [x(\cdot) * h_1(\cdot)] * h_2(\cdot).$$



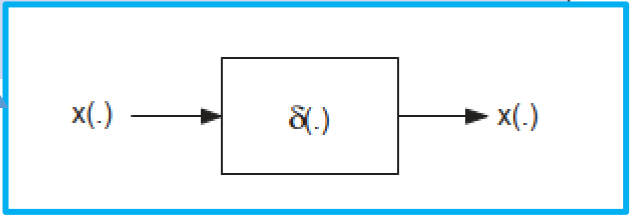
(c) **Proprietà distributiva:**

$$x(\cdot) * [h_1(\cdot) + h_2(\cdot)] = x(\cdot) * h_1(\cdot) + x(\cdot) * h_2(\cdot).$$



(d) **Proprietà di esistenza dell'unità:**

$$x(\cdot) = x(\cdot) * \delta(\cdot) = \delta(\cdot) * x(\cdot).$$



Testo e figure estratti da: G. Gelli, F. Verde, *Segnali e Sistemi*, 2014

Proprietà Convoluzione - 2

Proprietà 6.2 In un sistema *causale* (l'effetto segue la causa), la risposta impulsiva è tale che

$$h(t) = 0, \qquad t < 0. \tag{6.3}$$

La convoluzione può essere riscritta come

$$(h * x)(t) = \int_0^\infty h(\xi)x(t-\xi)d\xi, \tag{6.4}$$

oppure, operando il cambio di variabili $\alpha = t - \xi$, come

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\alpha)x(\alpha)d\alpha. \tag{6.5}$$

Proprietà Convoluzione - 3

Proprietà 6.3 Per un sistema *anti-causale* (l'effetto dipende solo dal segnale d'ingresso negli istanti futuri) la rispota impulsiva è tale che

$$h(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6.6}$$

In tal caso la convoluzione può essere riscritta come

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^{0} h(\xi)x(t-\xi)d\xi, \tag{6.7}$$

oppure, operando il cambio di variabili $\alpha = t - \xi$, come

$$(h * x)(t) = \int_{t}^{\infty} h(t-\alpha)x(\alpha)d\alpha. \tag{6.8}$$

Calcolo della convoluzione

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(-(\tau - t))d\tau$$

Algoritmo per il calcolo della convoluzione a TC:

(1) Rappresentare $h(\tau)$ e $x(\tau)$ in funzione di $\tau \in \mathbb{R}$.

(2) Effettuare prima la *riflessione* del segnale $x(\tau)$, costruendo il segnale $z(\tau) = x(-\tau)$ e, successivamente, effettuare la *traslazione* del segnale $z(\tau)$ verso destra se $t > 0$, e verso sinistra se $t < 0$, ottenendo così il segnale $w_t(\tau) = z(\tau - t) = x[-(\tau - t)] = x(t - \tau)$.

(3) Per ogni fissato valore di $t \in \mathbb{R}$, il valore della convoluzione $y(t)$ all'istante t si ottiene moltiplicando tra loro i segnali $h(\tau)$ e $w_t(\tau)$ per tutti i valori di $\tau \in \mathbb{R}$, ed effettuando l'integrale del prodotto.

Testo e figure estratti da: G. Gelli, F. Verde, *Segnali e Sistemi*, 2014

Alcuni esempi di convoluzione tra segnali

Risposta Armonica - 1

- Nel dominio della frequenza un sistema lineare è descritto dalla trasformata di Fourier della risposta impulsiva, detta **risposta armonica**

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = |H(f)|e^{j\angle H(f)}$$

- In generale è una funzione complessa:

Risposta armonica di ampiezza $A(f) = |H(f)|;$ $\phi(f) = \angle H(f).$ **Risposta armonica di fase**

- Esprimibile anche come parte reale ed immaginaria:

$$H(f) = H_R(f) + jH_I(f).$$

$$A(f) = \sqrt{H_R^2(f) + H_I^2(f)}; \quad \phi(f) = \tan^{-1}\frac{H_I(f)}{H_R(f)};$$

$$H_R(f) = A(f)\cos\phi(f); \quad H_I(f) = A(f)\sin\phi(f).$$

Risposta Armonica - 2

- Per la proprietà della convoluzione della trasformata di Fourier, l'uscita del sistema nel dominio della frequenza è semplicemente:

$$y(t) = (h * x)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = H(f)\ X(f)$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = A(f)|X(f)|e^{j(\phi(f)+\angle X(f))}.$$

- Quindi un sistema lineare "pesa" le varie componenti frequenziali dell'ingresso secondo la propria risposta di ampiezza e "aggiunge" alla fase dell'ingresso quella del sistema.

$$|Y(f)| = A(f)|X(f)|; \qquad \angle Y(f) = \phi(f) + \angle X(f).$$

Distorsione Lineare - 1

- Un segnale processato da un sistema lineare risulta in genere alterato nel contributo relativo alle ampiezze e alle fasi delle sue componenti frequenziali

- La distorsione può essere:
  - Indesiderata: ad es. se si vuole trasmettere un segnale su un canale senza alterarne la forma, la distorsione è un effetto da contenere;
  - Desiderata: ad es. un sistema lineare può essere usato come “filtro”, alterando in maniera mirata, o selettiva, il segnale di ingresso.

Sistema Lineare Non Distorcente - 1

- Un sistema lineare che non altera la "forma" del segnale è detto **non distorcente** → il segnale di uscita è una versione ritardata e scalata del segnale di ingresso:

$$y(t) = k\; x(t - t_0), \qquad \forall \;\; k, t_0.$$

$$\Big\Downarrow \mathcal{F}$$

$$Y(f) = \underbrace{\boxed{k\; e^{-j2\pi f t_0}}}_{H(f)} X(f).$$

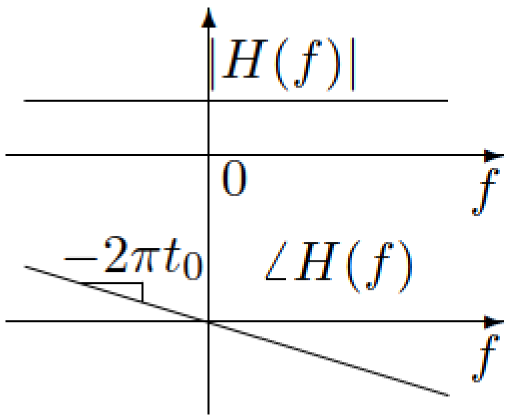
$$\Big\Downarrow \mathcal{F}^{-1}$$

$$h(t) = k\; \delta(t - t_0).$$

Sistema Lineare Non Distorcente - 2

- Sistema lineare è **non distorcente** se la sua risposta armonica ha ampiezza costante e fase lineare

$$H(f) = k; \qquad \angle H(f) = \beta f. \qquad\qquad t_0 = -\frac{\beta}{2\pi}.$$



Esempi sugli effetti della distorsione

Ritardo di gruppo

Definizione: Si definisce *ritardo di gruppo* di un sistema lineare avente risposta di fase $\phi(f)$

$$t_g(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\phi(f). \tag{6.33}$$

Quindi se il sistema è non distorcente in fase, ovvero se $\phi(f) = -2\pi t_0 f$, il ritardo di gruppo è costante ed è proprio pari al ritardo introdotto dal sistema

$$t_g(f) = t_0. \tag{6.34}$$

Ritardo di fase

Definizione: Si definisce *ritardo di fase* di un sistema lineare avente risposta di fase $\phi(f)$

$$t_\phi(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\phi(f)}{f}. \tag{6.35}$$

Anche per il ritardo di fase, se il sistema è non distorcente in fase, ovvero se $\phi(f) = -2\pi t_0 f$, il ritardo di fase è costante ed è proprio pari al ritardo introdotto dal sistema

$$t_\phi(f) = t_0. \tag{6.36}$$