

PALMIERI AWGN Ø

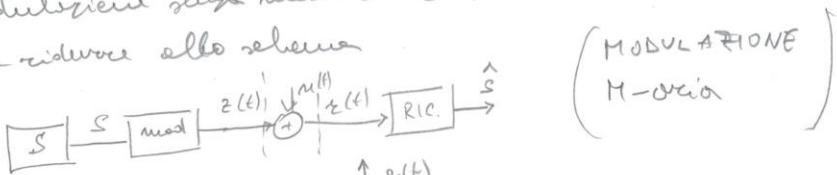
RICEZIONE OTTIMA PER
MODULAZIONE SENZA MEMORIA
SU CANALE NON DISPERSIVO
CON RUMORE ADDITIVO GAUSSIANO
BIANCO (AWGN)

lezioni del corso di
TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA
DEI SEGNALI / COMUNICAZIONI ELETTRICHE
(SUN)

A.A. 2016-17

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

Abbiamo già visto nelle note introduttive come uno schema di modulazione senza memoria e se simile non dispone, si possa ridurre allo schema



Dove $S \in \mathcal{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$

$$z(t) = \begin{cases} S_1(t) & \text{se } S = \alpha_1 \\ S_2(t) & \text{se } S = \alpha_2 \\ \vdots \\ S_M(t) & \text{se } S = \alpha_M \end{cases}$$

(MODULAZIONE
M-aria)

$s_j(t)$ (*)
i segnali $\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$ sono confrontati all'intervalle $[0, T]$ e dipendono dal formato di modulazione.

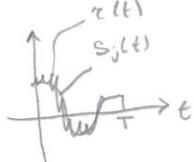
Il canale è trasportante di segnali e introduce rumore additivo. Supponiamo che il rumore sia gaussiano e sia con $R_n(z) = \frac{y_0}{2} \delta(z) \Leftrightarrow P_n(f) = \frac{y_0}{2}$.

L'idealità di questo ipotesi è stata discussa nella parte sulle spese dei segnali, ma verrà ri-discussa in seguito.

Il ricevitore "vede" $r(t) = z(t) + n(t)$, nelle varie ipotesi:

$$\begin{cases} r(t)|_{\alpha_1} = s_1(t) + n(t) \\ r(t)|_{\alpha_2} = s_2(t) + n(t) \\ \vdots \\ r(t)|_{\alpha_M} = s_M(t) + n(t) \end{cases}$$

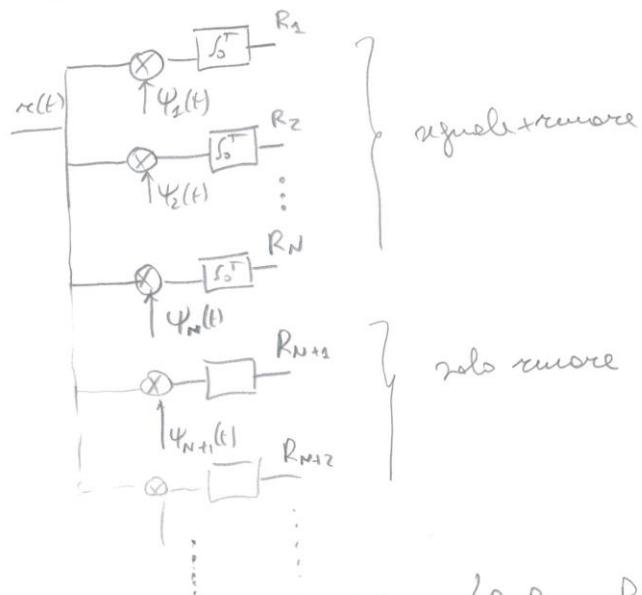
$$t \in [0, T]$$



Il ricevitore dovrà in qualche modo confrontare il segnale ricevuto con quelli noti, calcolare una qualche distanza o qualcosa del genere. Per affrontare il problema in maniera rigorosa e convincente del fatto che i segnali non sono temporanei (analogni), ci soffermiamo nello spazio dei segnali.

(*) I segnali considerati qui sono reali. Preferiamo introdurre il ricevitore ottico con segnali reali per maggior chiarezza. L'estensione ai segnali complessi sarà escluso.

Supponiamo a questo scopo di disporre di una base PALMERAWENZ
 ortogonale $\{\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_N(t)\}$ completa per i
 segnali $\{S_1(t), S_2(t), \dots, S_M(t)\}$. Ovviamente $N \leq M$, con
 il segno uguale se i segnali sono linearmente indipendenti.
 Il rumore ricevuto in qualsiasi di una base di
 dimensione infinita deve avere per coincidere
 nelle prime N componenti con quelle uscite per i segnali
 $\{\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_N(t), \Psi_{N+1}(t), \dots\}$. Dunque il segnale
 $r(t)$ può essere trasformato mediante le proiezioni



la rappresentazione di $r(t)$ con $\{R_1, R_2, \dots, R_N, R_{N+1}, \dots\}$
 è equivalente. Più in dettaglio abbiamo

$$R_1 | \alpha_i = \int_0^T S_i(t) \Psi_1(t) dt + \int_0^T n(t) \Psi_1(t) = S_{i1} + N_1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{segne} \\ \text{rumore} \end{array} \right\}$$

$$R_2 | \alpha_i = \int_0^T S_i(t) \Psi_2(t) dt + \int_0^T n(t) \Psi_2(t) = S_{i2} + N_2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{segne} \\ \text{rumore} \end{array} \right\}$$

$$R_N | \alpha_i = \int_0^T S_i(t) \Psi_N(t) dt + \int_0^T n(t) \Psi_N(t) = S_{iN} + N_N$$

$$R_{N+1} | \alpha_i = \int_0^T S_i(t) \Psi_{N+1}(t) dt + \int_0^T n(t) \Psi_{N+1}(t) = N_{N+1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{solo} \\ \text{rumore} \end{array} \right\}$$

$$R_{N+2} | \alpha_i = \int_0^T S_i(t) \Psi_{N+2}(t) dt + \int_0^T n(t) \Psi_{N+2}(t) = N_{N+2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{solo} \\ \text{rumore} \end{array} \right\}$$

Quindi le prime N componenti di \underline{R} contengono
segnale + rumore, mentre le rimanenti solo
rumore perché i segnali sono stati contenuti
nello spazio di $\{q_1(t), \dots, q_N(t)\}$.

Abbiamo già visto come $N_1 N_2 \dots N_N N_{N+1} \dots$
sono a media nulla, gaussiane e indipendenti aventi
varianza $E[R_i^2] = \frac{\gamma_0}{2}$. Allora

$$R_1 | a_i \propto f_{R_1}(r_1 | a_i) = N(r_1; s_{1i}, \frac{\gamma_0}{2}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\gamma_0}} e^{-\frac{(r_1 - s_{1i})^2}{\gamma_0}}$$

$$R_2 | a_i \propto f_{R_2}(r_2 | a_i) = N(r_2; s_{2i}, \frac{\gamma_0}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0}} e^{-\frac{(r_2 - s_{2i})^2}{\gamma_0}}$$

$$\vdots \quad \vdots \\ R_N | a_i \propto f_{R_N}(r_N | a_i) = N(r_N; s_{Ni}, \frac{\gamma_0}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0}} e^{-\frac{(r_N - s_{Ni})^2}{\gamma_0}}$$

$$R_{N+1} | a_i \propto f_{R_{N+1}}(r_{N+1} | a_i) = N(r_{N+1}; 0, \frac{\gamma_0}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0}} e^{-\frac{r_{N+1}^2}{\gamma_0}}$$

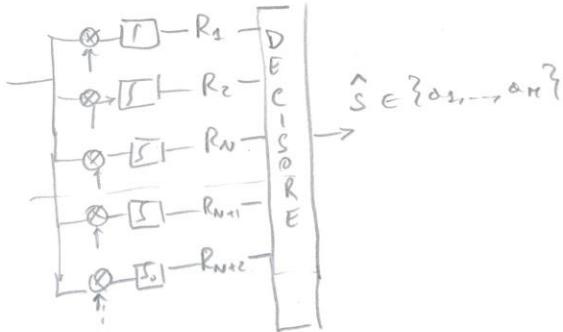
$$R_{N+2} | a_i \propto f_{R_{N+2}}(r_{N+2} | a_i) = N(r_{N+2}; 0, \frac{\gamma_0}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0}} e^{-\frac{r_{N+2}^2}{\gamma_0}}$$

Vista l'indipendenza, possiamo scrivere in forma compatta
la pdf congiunta

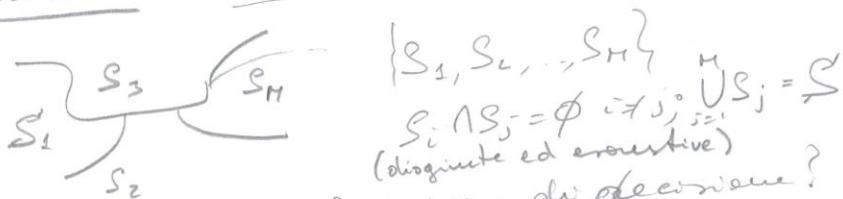
$$R | a_i \propto f_R(r | a_i) = \frac{1}{(2\pi\gamma_0)^{\frac{N}{2}}} e^{-\sum_{j=1}^N \frac{(r_j - s_{ij})^2}{\gamma_0}} \prod_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0}} e^{-\frac{r_j^2}{\gamma_0}}$$

(Dimostreremo ^{dopo} che le componenti R_{N+1}, R_{N+2}, \dots
possono essere eliminate in quanto irrilevanti
ai fini della decodifica)

Il ricevitore ora dovrà "decidere" sulle ^{PALIERI - WONG} basi di un vettore R osservato, quale regola è stata formata



Il decidere è una funzione che osservato deve fornire un simbolo discreto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Questo consiste in una partizione dello spazio di R in M "regole" di decisione: Decido $\hat{s} = a_j$ se $R \in S_j$



Ma come determinare le regole di decisione? Il parametra di partenza è la probabilità di errore, ovvero $P(e) = P\{\hat{S} \neq S\}$. Questo può essere

riscritto come

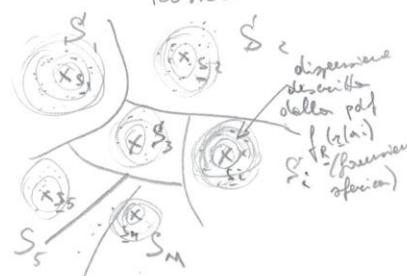
$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - \sum_{i=1}^M p(c|a_i) \pi_i = 1 - \sum_{i=1}^M P_R\{RES_i | a_i\} \pi_i$$

prob. di
corretta
decisione
escludendo dalla
famiglia di simboli a_i

Prob. che R cada
nella regola
giunta ovvero
tornando a i

$$= 1 - \sum_{i=1}^M \int_{S_i} f_R(x|a_i) dx \pi_i$$

integrale delle pdf
condizionate esteso alla
regola (giusta)



la minimizzazione di $P(c)$, corrisponde alla PIAZZIERA ABBONIAMENTO
 odi $P(c) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{X}} f_R(x|a_i) d_x \pi_i$, quindi $\forall c$ i prob.
 a priori sono positivi, la migliore partizione si
 avrà oggi. Si include i valori di x per cui

$$\frac{f_R(x|a_i)\pi_i}{f_R(x)} > \frac{f_R(x|a_j)\pi_j}{f_R(x)} \quad \forall j \neq i$$

Questa è nota come regola MAP (Maximum A Posteriori)
 perché se violiamo anche i numeri per $f_R(x)$,
 abbiamo

$$\frac{f_R(x|a_i)\pi_i}{f_R(x)} > \frac{f_R(x|a_j)}{f_R(x)} \pi_i$$

$$\frac{P\{a_i|x\}}{P\{a_j|x\}} > \frac{\text{prob. a posteriori di } a_i \text{ osservato}}{\text{prob. a posteriori di } a_j \text{ osservato}}$$

Massima probabilità a posteriori

Se le prob. a priori sono uniformi, $\pi_i = \frac{1}{M} \quad i = 1, \dots, M$
 la regola diventa

$$\frac{f_R(x|a_i)}{f_R(x|a_j)} > 1$$

REGOLA A MASSIMA VEROSSIMIGLIANZA (ML) o (ML -
 MAXIMUM LIKELIHOOD)

La regola ML può anche essere usata quando le probabilità
 a priori non sono note. Ovviamente esse non e'
 stanno a meno che queste non siano uniformi.

Ora se applichiamo le regole MAP al nostro caso
abbiamo

$$\frac{e^{-\sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2 / \eta_0}}{\prod_{l=N+1}^M \sqrt{\pi_l \eta_0}} > \frac{e^{-\sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2 / \eta_0}}{\prod_{l=N+1}^M \sqrt{\pi_l \eta_0}}$$

Vediamo che le esponenti di π oltre la N -esima non servono, ovvero non contribuiscono alle regole di decisione (questa a volte vengono il nome di "Teorema dell'irrelazione").

Perbacco le regole MAP si scrive:

$$\frac{-\sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2}{\eta_0} \pi_i > \frac{-\sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2}{\eta_0} \pi_j$$

(il ricevitore decide per α_i se questo è verificato $\forall j \neq i$)

Pensiamo ai logaritmi (la funzione $\ln(\cdot)$ è una funzione strutturalmente simile che non cambia la relazione d'ordine)

$$-\frac{1}{\eta_0} \sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2 + \ln \pi_i > -\frac{1}{\eta_0} \sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2 + \ln \pi_j \quad (*)$$

CASO MV Si noti che se $\pi_i = \frac{1}{M} \forall i$ (regola MV), abbiamo

$$-\sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2 > -\sum_{l=1}^N (\gamma_{je} - \beta_{je})^2$$

$$\text{ovvero } \sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2 < \sum_{l=1}^N (\gamma_{je} - \beta_{je})^2$$

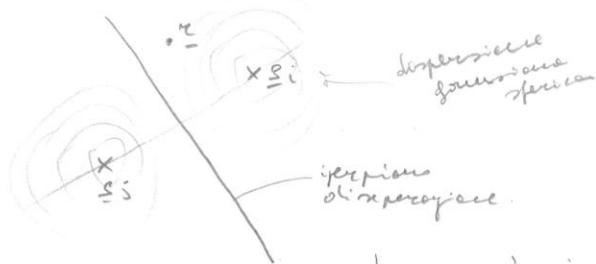
Ma $\sum_{l=1}^N (\gamma_{el} - \beta_{el})^2$ è la distanza quadratica tra $\gamma_e - \beta_e$, quindi la regola ML è una decisione minima.

Ricordiamo che la distanza quadratica si può scrivere
PALMIERI - AWCN⁷

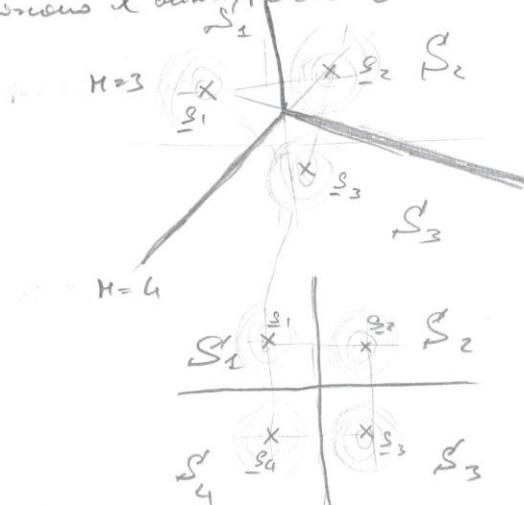
$$d^2(\underline{x}, \underline{s}_i) = \sum_{t=1}^T (\underline{x}(t) - \underline{s}_i(t))^2$$

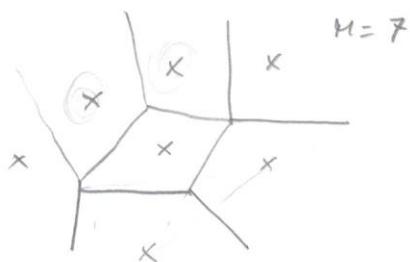
Il risultato è intuitivo anche nel dominio del tempo:
la minima distanza nello spazio dei segnali è anche la
massima similarità dei segnali.

Il criterio a minima distanza nello spazio dei
segnali si pone ad una utile interpretazione geometrica
se abbiamo due segnali \underline{s}_i e \underline{s}_j , le regioni dei
punti di \underline{x} più vicini a \underline{s}_i e \underline{s}_j sono determinate dall'iperpiano
di separazione perpendicolare alla retta che congiunge
 \underline{s}_i e \underline{s}_j .



Considerando due-a-due i segnali $\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_T\}$ si determina
una particolare della spazio costituita da fascelli delimitati
da iperpiani (TESSERIZZAZIONE DI VORONOI). Alcuni esempi
chiudono il capitolo per $N=2$





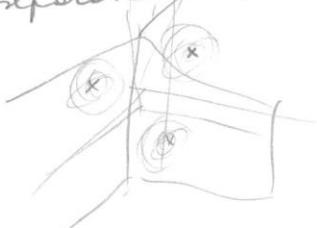
PALIERI - AWGN-8

M=3

X	X	X
X	X	X
X	X	X

ecc.

Per $N=3$ è più difficile visualizzare le matrici dei piani separatori. Per $N>3$ è impossibile.



Il ricevitore MV realizza la tessellazione di voci sui in numero implicito.

Funzionamento del MAP

CASO GENERALE DEL RICEVITORE MAP

Trovando alle regole MAP generale, esponente al quadrato ottiene

$$\frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^N \epsilon_e^2 - \frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^N S_{ie}^2 + \frac{2}{\eta_0} \sum_{e=1}^N \epsilon_e S_{ie} + h_u \pi_i > \frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^N \epsilon_e^2 - \frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^N S_{je}^2 + \frac{2}{\eta_0} \sum_{e=1}^N \epsilon_e S_{je} + h_u \pi_j$$

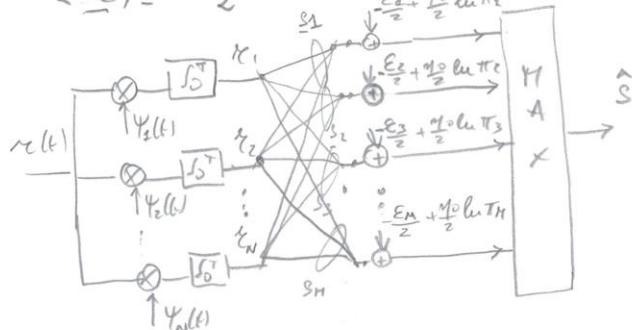
Moltiplicando per $\eta_0/2$

$$\sum_{e=1}^N \epsilon_e S_{ie} - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N S_{ie}^2 + \frac{\eta_0}{2} h_u \pi_i > \underbrace{\sum_{e=1}^N \epsilon_e S_{je}}_{\text{Energia di } S_i(t)} - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N S_{je}^2 + \frac{\eta_0}{2} h_u \pi_j$$

prodotto resolto
per $\epsilon_e(t) e S_i(t)$
 $= \int_0^t (\epsilon_e(t) S_i(t)) dt$

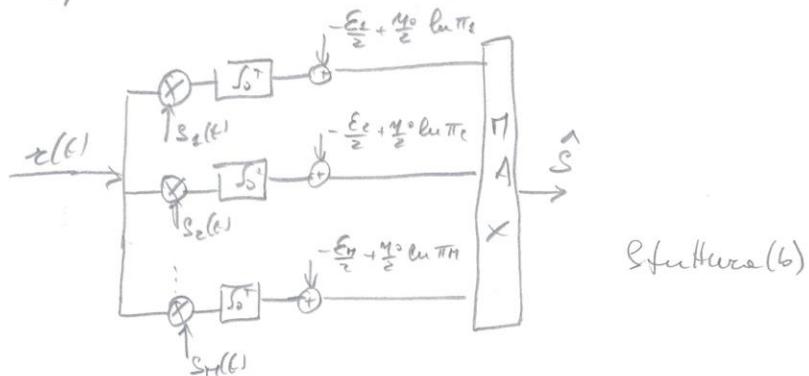
$$\sum_{e=1}^N \epsilon_e S_{ie} - \frac{E_i}{2} + \frac{\eta_0}{2} h_u \pi_i > \sum_{e=1}^N \epsilon_e S_{je} - \frac{E_j}{2} + \frac{\eta_0}{2} h_u \pi_j$$

$$\left\langle \epsilon_e, S_i \right\rangle - \frac{1}{2} \|S_i\|_2^2 + \frac{\eta_0}{2} h_u \pi_i > \left\langle \epsilon_e, S_j \right\rangle - \frac{1}{2} \|S_j\|_2^2 + \frac{\eta_0}{2} h_u \pi_j$$



Stato Hura (a)

Visto che le correlazioni si possono calcolare direttamente
in $r(t)$ una struttura equivalente è PALTIERI-AUGAVIO



Struttura (b)

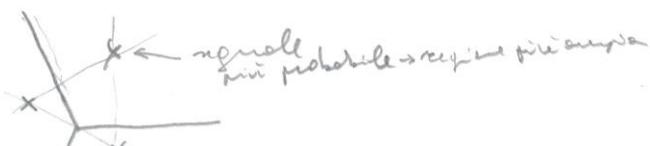
La struttura (a) richiede N correlatori nel tempo
del segnale e M correlatori parziali.

La struttura (b) richiede M correlatori nel tempo
del segnale.

Ovviamente la preferenza per (a) o (b) deriva
dalle relazioni che c'è tra M e N . Se $N \ll M$ conviene
la struttura (a), altrimenti la (b) potrebbe essere meglio.

Velocità comune come le strutture generali di
ricevitore possono essere semplificate nei vari
permessi di modulazione.

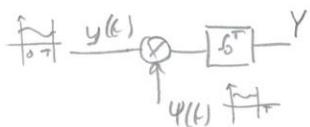
Dal punto di vista geometrico il ricevitore MAP realizza
anch'esso una particolare con iperspazio. La differenza
è che i segnali non sono simmetricamente localizzati
nelle regioni. Ai segnali con probabilità a priori maggiori
corrispondono regioni più ampie (vedi formula (*)).



L'idea però ulteriormente elencata con riferimento
di formule specifiche.

REALIZZAZIONE DEI CORRELATORI MEDIANTE FILTRI ADATTATI

- L'elemento base del ricevitore si ottiene ottenendo il correlatore



dove $y(t)$ e $y(t-T)$ sono i segnali confrontati $[0, T]$

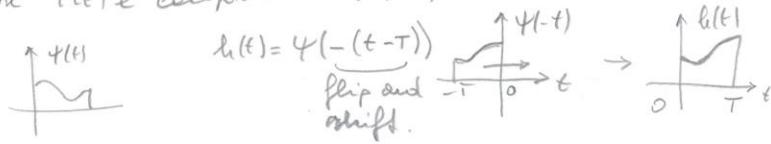
Vogliamo dimostrare che la terza uscita Y può essere ottenuta mediante una convoluzione e un ammagnamento, ovvero mediante lo schema



Asta struttura va sotto il nome di FILTO ADATTATO (MATCHED FILTER)

$$\text{Prova: } y(t) * h(t) = \int_{t-T}^{+\infty} y(\eta) h(t-\eta) d\eta =$$

Poi se $\Psi(t)$ è composta su $[0, T]$, lo è anche $h(t)$



$$\rightarrow = \int_0^T y(\eta) h(t-\eta) d\eta = \int_0^T y(\eta) \Psi(T-t-\eta) d\eta$$

$$= \int_0^T y(\eta) \Psi(\eta) d\eta$$

Nel dominio della frequenza

$$h(t) = \Psi(\tau - t) = \Psi(-(t - \tau)) \xrightarrow{F} H(f) = \Psi^*(f) e^{-j2\pi f T}$$

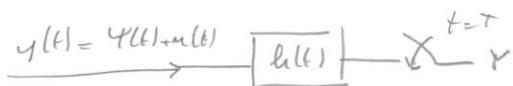
PALMIERI_AUGUSTO

L'equivalenza è evidente se si pensa che la convoluzione si ottiene con l'integrale dopo un flip-and-shift. Pertanto effettuando tale flip-and-shift due volte si ottiene il risultato.

OTTIMALITÀ DEL FILTRO ADATTATO

Il correlatore è quindi il filtro adattato messo sotto obbligo dalla ottimalità del ricevitore rispetto allo prob. di errore. E' interessante però analizzare il filtro adattato con un approccio diverso e dimostrare una diversa ottimalità. Dopotutto il correlatore o il filtro adattato possono essere pensati come una "verifica" o "chiave" delle "chiavi". Il risultato della convoluzione può essere pensato come una sorta di verifica di come la chiave funziona in quella serratura (moschera).

Consideriamo il seguente schema



$\Psi(t)$ è un segnale deterministico in $[0, T]$

$u(t)$ è un rumore aleatorio bianco con $R_u(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

L'uscita γ è la somma di due contributi

$$\gamma = (\Psi * h)(t) \Big|_{t=T} + (u * h)(t) \Big|_{t=T}$$

contributo del segnale contributo del rumore

$$\underbrace{Y_S}_{\text{deterministico}} + \underbrace{Y_N}_{\text{aleatorio}}$$

Definito come rapporto segnale-zerore le
operabilità

PALMIERI - AWGN13

$$\frac{S}{N} = \frac{Y_S^2}{E[Y_N^2]},$$

Vogliamo determinare il filtro lineare $h(t)$ che
massimizza $\frac{S}{N}$. Riserviamoci $\frac{S}{N}$ uscita le trasformate

$$\frac{S}{N} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(f) H(f) e^{j2\pi f t} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{2} |H(f)|^2 df}$$

Ricordando Schwartz's inequality

$$\left| \int A(f) B(f) df \right|^2 \leq \int |A(f)|^2 df \int |B(f)|^2 df$$

Così l'uguagliasse $A(f) = X B^*(f)$. Quindi

$$\frac{S}{N} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{y_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}$$

Il massimo è ottenuto se

$$H(f) = \alpha \Psi^*(f) e^{-j2\pi f T} \xrightarrow{f \rightarrow -t} \alpha h(T-t)$$

che è proprio il filtro adattato.

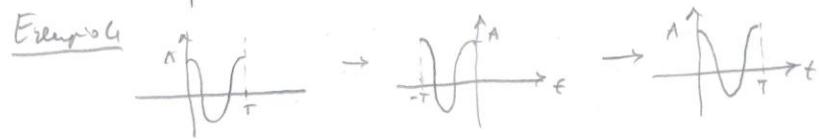
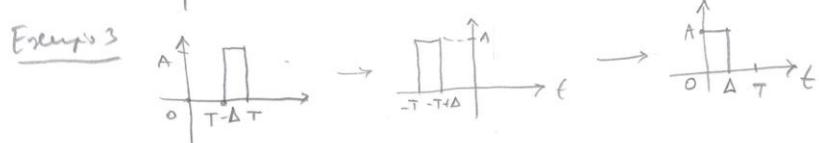
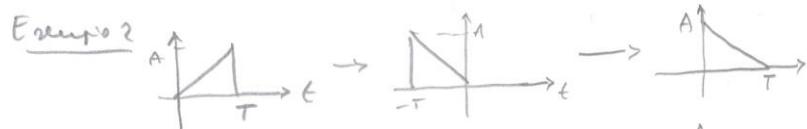
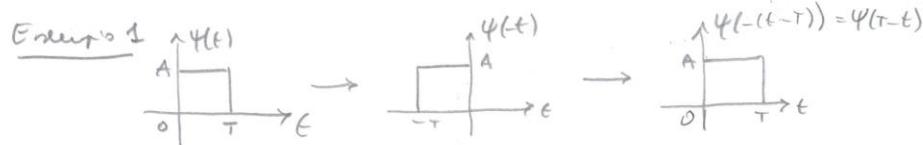
Il risultato è interessante perché fa vedere come
il filtro adattato emerga anche uscendo un criterio
diverso come lo massimizzazione dell' $\frac{S}{N}$ definito sopra.

In condizioni ottimali

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{opt} = \frac{y_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(f)|^2 df$$

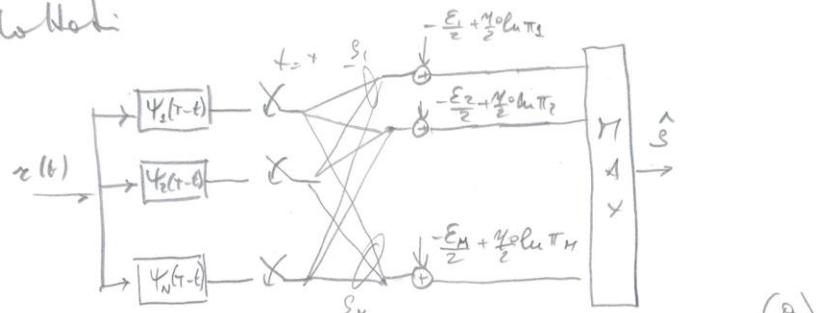
Vediamo alcuni esempi di filtri adattati.

PALMIERI - AWGN4

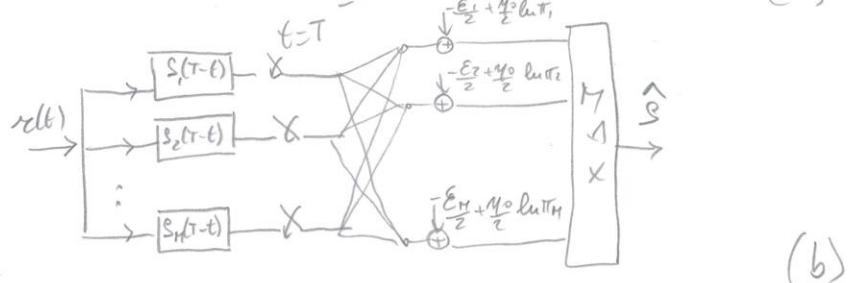


Se $\psi(t)$ è simmetrica rispetto a $T/2$, $\psi(T-t) = \psi(t)$.

Turnando al ricevitore ottimo, le antenne (a) e (b) possono essere re-disegnate usando dei filtri adattati.



(a)

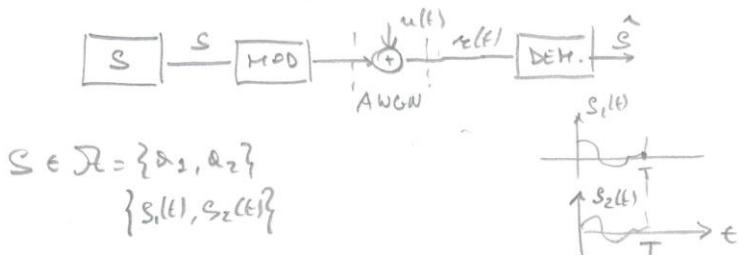


(b)

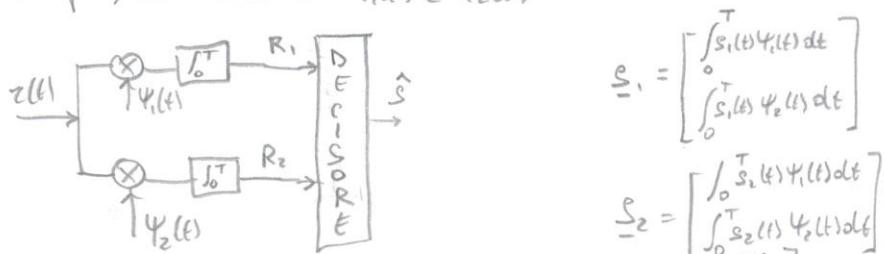
IL CASO BINARIO

La ricezione ottima nel canale AWGN per il caso in cui $M=2$ risulta una ottimazione particolare poiché i simboli generali possono essere rappresentati e resi più esplicativi.

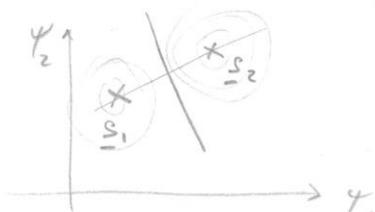
Lo schema di riferimento è il seguente con



Il ricevitore ottimo è costituito in generale con due funzioni di base $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$



Il decisore deve dividere lo spazio di $R = [R_1 \ R_2]$ in due parti



La regola MAP

$$\frac{\int_{R/\alpha_1} (\underline{r}_e | \alpha_1) \pi_1}{\int_{R/\alpha_1}} \geq \sum_{\alpha_2} \frac{\int_{R/\alpha_2} (\underline{r}_e | \alpha_2) \pi_2}{\int_{R/\alpha_2}}$$

si scrive

$$\underline{r}_e - \frac{\sum_{e=1}^E (r_e - s_{1e})^2}{N_0} \pi_1 \geq \sum_{\alpha_2} \underline{r}_e - \frac{\sum_{e=1}^E (r_e - s_{2e})^2}{N_0} \pi_2$$

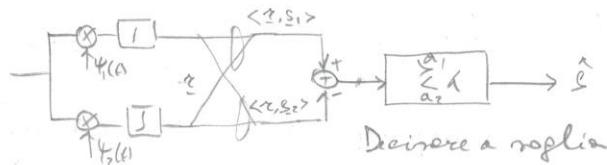
$$-\frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 (\underline{r}_e - \underline{s}_{1e})^2 + \ln \pi_1, \quad \sum_{a_2}^{a_1} -\frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 (\underline{r}_e - \underline{s}_{2e})^2 + \ln \pi_2 \quad \text{PACCHIERI LAWON 16}$$

$$-\frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{r}_e^2 - \frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{s}_{1e}^2 + \frac{2}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{r}_e \underline{s}_{1e} - \frac{1}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{s}_{2e}^2 + \frac{2}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{r}_e \underline{s}_{2e} + \ln \pi_1$$

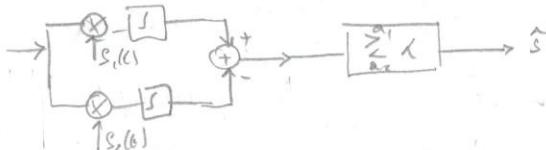
$$\frac{2}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{r}_e \underline{s}_{1e} - \frac{2}{\eta_0} \sum_{e=1}^2 \underline{r}_e \underline{s}_{2e} + \frac{1}{\eta_0} (E_1 - E_2) + \ln \frac{\pi_2}{\pi_1}$$

$$\langle \underline{r}, \underline{s}_1 \rangle - \langle \underline{r}, \underline{s}_2 \rangle = \sum_{a_2}^{a_1} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) + \frac{\eta_0}{2} \ln \frac{\pi_2}{\pi_1}$$

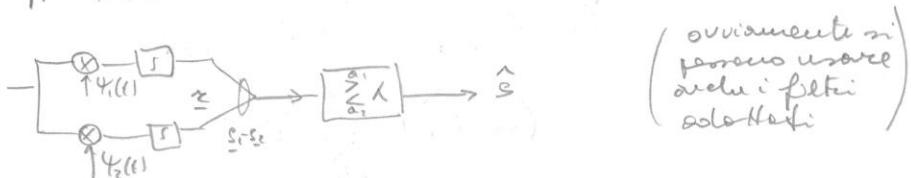
λ (neglita)



Dunque



$$\text{oppure, poiché } \langle \underline{r}, \underline{s}_1 \rangle - \langle \underline{r}, \underline{s}_2 \rangle = \langle \underline{r}, \underline{s}_1 - \underline{s}_2 \rangle,$$



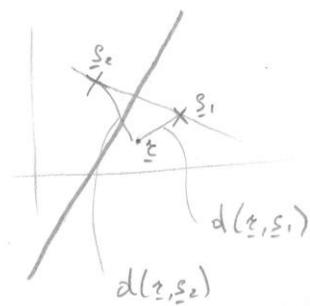
Note che la regola RVE equivale al criterio di minimizzazione della distanza

$$\sum_{e=1}^2 (\underline{r}_e - \underline{s}_{1e})^2 \leq \sum_{e=1}^2 (\underline{r}_e - \underline{s}_{2e})^2$$

$$d(\underline{r}, \underline{s}_1) \leq d(\underline{r}, \underline{s}_2)$$

$$d(\underline{r}, \underline{s}_1) \stackrel{a_1}{\leq} d(\underline{r}, \underline{s}_2)$$

che geometricamente esiste nell'area retta di rappresentazione
PALMIERI-AUCN17



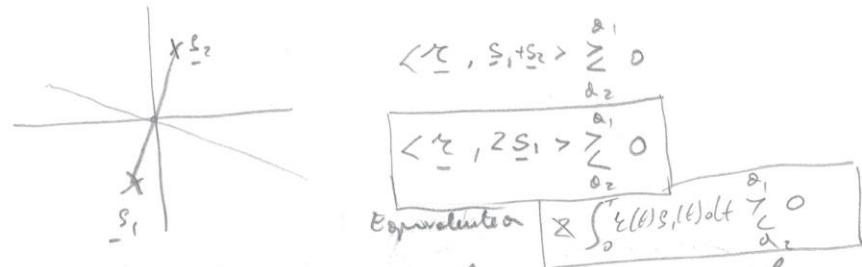
Se i segnali sono anche equienergetici ($E_1 = E_2$)
la regola è $\lambda = 0$ e quindi la regola è



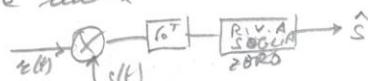
Se i segnali S_1 e S_2 sono ortogonali ed equienergetici



Se i segnali S_1 e S_2 sono antipodali: $S_1 = -S_2$:



Quindi il ricevitore si può realizzare con un solo
correlatore e una rete nulla



le prestazioni in termini di probabilità di errore ricevute presentate in regole con riferimento a formati specifici di modulazione. Per il caso binario è possibile ricevere in forma chiusa la probabilità di errore indipendentemente dalle forme dei segnali s_{eff} e $s_{\text{eff}^{\perp}}$.

La regola MAP si può scrivere come

$$\underline{s}_1, \underline{s}_2 > -\frac{1}{2}(\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2) \geq \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases} \quad \frac{M_0}{2} \ln \frac{\pi_2}{\pi_1}$$

oppozi definendo lo variabile aleatorio

$$Z = \underline{s}_1, \underline{s}_2 > -\frac{1}{2}(\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)$$

possiamo ridurre il problema in una dimensione.

$$\text{Perché } f_{R|\underline{s}_1}(z|\underline{s}_1) = N(z; \underline{s}_1, \frac{M_0}{2} I_2)$$

$$f_{R|\underline{s}_2}(z|\underline{s}_2) = N(z; \underline{s}_2, \frac{M_0}{2} I_2)$$

Abbiamo che per linearità Z è funzione dei contributi le ipotesi e che

$$E[Z|\alpha_1] = \underline{s}_1, \underline{s}_2 > -\frac{1}{2}(\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2) = \underline{\epsilon}_1 - \underline{s}_1, \underline{s}_2 > -\frac{1}{2}\underline{\epsilon}_1 + \frac{1}{2}\underline{\epsilon}_2 \stackrel{M}{=} M$$

$$E[Z|\alpha_2] = \underline{s}_2, \underline{s}_1 > -\frac{1}{2}(\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2) = \underline{s}_2 - \underline{s}_1, \underline{s}_2 > -\frac{1}{2}\underline{\epsilon}_2 + \frac{1}{2}\underline{\epsilon}_1 \stackrel{M}{=} -M$$

$$\mu = \frac{\underline{\epsilon}_1 + \underline{\epsilon}_2}{2} - \underline{s}_1, \underline{s}_2 > = \frac{1}{2} d_{12}^2$$

Similmente

$$\text{VAR}[Z|\alpha_1] = \text{VAR}[Z|\alpha_2] = \frac{M_0}{2} d_{12}^2 \quad \begin{array}{l} (\text{vedi pagina}) \\ (\text{necessaria per le regole}) \\ (\text{euclidea tra } \underline{s}_1, \underline{s}_2) \end{array}$$

Quindi

$$f_{Z|\alpha_1}(z|\alpha_1) = N\left(z; \frac{1}{2} d_{12}^2, \frac{M_0}{2} d_{12}^2\right)$$

$$f_{Z|\alpha_2}(z|\alpha_2) = N\left(z; -\frac{1}{2} d_{12}^2, \frac{M_0}{2} d_{12}^2\right)$$

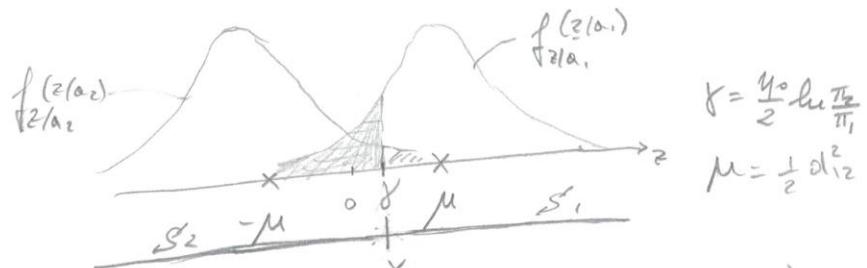
(*)*) Calcolo della varianza di \hat{z}/α_1

PAGLIERI-AWEN 19

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}[\hat{z}/\alpha_1] &= E[(\hat{z} - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2}{2} + \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle)^2 | \alpha_1] = E[(R, \underline{s}_1, \underline{s}_2) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle}{2})^2 | \alpha_1] \\
 &= E[(\langle R, \underline{s}_1 \rangle - \langle R, \underline{s}_2 \rangle - \varepsilon_1 + \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle)^2 | \alpha_1] = E[(\langle \underline{s}_1 + N, \underline{s}_1 \rangle - \langle \underline{s}_1 + N, \underline{s}_2 \rangle - \varepsilon_1 - \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle)^2 | \alpha_1] \\
 &= E[(\langle N, \underline{s}_1 \rangle - \langle N, \underline{s}_2 \rangle - \langle N \underline{s}_2 \rangle - \varepsilon_1 + \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle)^2 | \alpha_1] \\
 &= E[\langle N, \underline{s}_1 \rangle^2 + \langle N, \underline{s}_2 \rangle^2 - 2\langle N \underline{s}_1 \rangle \langle N \underline{s}_2 \rangle | \alpha_1] \\
 E[\langle N, \underline{s}_1 \rangle^2] &= E\left[\int_0^T \int_0^T u(t_1) n(t_2) \underline{s}_1(t_1) \underline{s}_2(t_2) dt_1 dt_2\right] = \frac{y_0}{2} \varepsilon_1 \\
 E[\langle N, \underline{s}_2 \rangle^2] &= \dots = \frac{y_0}{2} \varepsilon_2 \\
 E[\langle N, \underline{s}_1 \rangle \langle N, \underline{s}_2 \rangle] &= E\left[\int_0^T \int_0^T u(t_1) n(t_2) \underline{s}_1(t_1) \underline{s}_2(t_2) dt_1 dt_2\right] = \frac{y_0}{2} \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle \\
 &= \frac{y_0}{2} \varepsilon_1 + \frac{y_0}{2} \varepsilon_2 - \frac{y_0}{2} \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle = \frac{y_0}{2} \|\underline{s}_1 - \underline{s}_2\|^2 = \frac{y_0}{2} d_{12}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{VAR}[\hat{z}/\alpha_2] = \text{VAR}[\hat{z}/\alpha_1]$$

la continuità è facilmente visualizzabile nell'orme?



$$P(e|\alpha_1) = P_e \{ z < \gamma | \alpha_1 \} = \int_{-\infty}^{\gamma} f(z|\alpha_1) dz = Q\left(\frac{\mu - \gamma}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \sigma_{12}}\right)$$

$$P(e|\alpha_2) = P_e \{ z > \gamma | \alpha_2 \} = \int_{\gamma}^{\infty} f(z|\alpha_2) dz = Q\left(\frac{\mu + \gamma}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \sigma_{12}}\right)$$

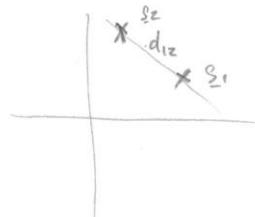
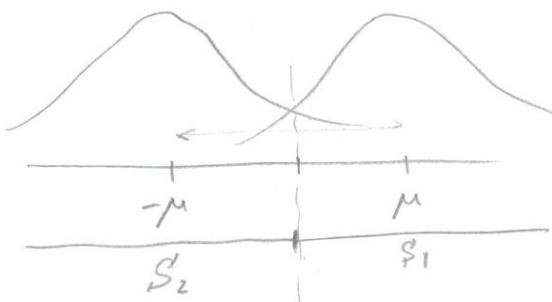
$$\boxed{P(e) = P(e|\alpha_1)\pi_1 + P(e|\alpha_2)\pi_2 = \pi_1 Q\left(\frac{\mu - \gamma}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \sigma_{12}}\right) + (1 - \pi_1)Q\left(\frac{\mu + \gamma}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \sigma_{12}}\right)}$$

Molto più semplice (e più tipico) quando $\gamma = 0$
(ricevitore HV)

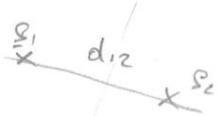
$$P(e|\alpha_1) = Q\left(\frac{\frac{1}{2} \sigma_{12}^2}{\sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \sigma_{12}}\right) = Q\left(\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{2\gamma_0}}\right) = P(e|\alpha_2)$$

$$\boxed{P(e) = Q\left(\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{2\gamma_0}}\right)}$$

Dipende solo dalla
distanza σ_{12} e non
dalle probabilità a priori.



Quindi le probabilità del ricevitore MV non dipendono da come i segnali sono proietti nello spazio dei segnali, ma solo dalle loro distanze PALMIERI-AWGN²¹



Scrivendo la distanza quadratica aveva

$$d_{12}^2 = E_1 + E_2 - 2 \langle s_1, s_2 \rangle = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2} f_{12}$$

con $f_{12} = \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\sqrt{E_1} \sqrt{E_2}}$ coefficiente di correlazione

abbiamo

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2} f_{12}}{2\eta_0}}\right)$$

Tipiche configurazioni sono

SEGNALI EQUIENERGETICI $E_1 = E_2 = E$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E(1-f_{12})}{\eta_0}}\right)$$

SEGNALI ANTIPODALI $f_{12} = -1$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta_0}}\right)$$

SEGNALI ORTOGONALI (ed equivalenti)
 $f_{12} = 0$ $\langle s_1, s_2 \rangle = 0$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta_0}}\right)$$

A parità di energia spesso i segnali antipodali realizzano una migliore probabilità di errore
Quindi in una regolarizzazione binaria può non $P(e)$ convenire usare segnali in 2 lobi perché basta usare una sola con segnali ortogonali