

ERRORI DI BIT -
- ERRORI DI SIMBOLO

Lezione del corso di

TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA
DEI SEGNALE / COMUNICAZIONI ELETTRICHE
(SUN)

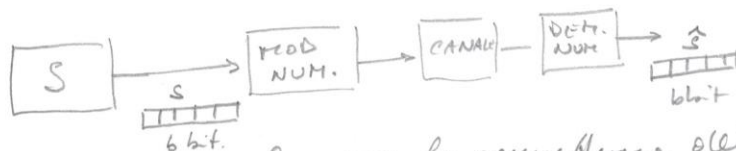
AA. 2016-17

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

ERRORI DI BIT - ERRORI DI SIMBOLO

PALMIERI-CRAXI

In uno schema di modulazione numerica lo sorgente M -aria
 è spesso una sorgente binaria che emette stringhe
 binarie, con $M = 2^b$.



Avanti bisogna analizzare la correttezza della stringa
 binaria ricevuta e in particolare potrebbe interessarci
 quanti bit sono risultati in errore. Per diversi
 schemi di associazione bits $\rightarrow$ simbolo potrebbero verificarsi
 percentuali di errore sui bit molto diverse anche
 con la stessa modulazione.

Per analizzare questo problema è necessario conoscere:

- ① lo schema di associazione bits $\rightarrow$ simbolo
- ② la Matrice di canale completa del canale equivalente.

Cominciamo da un esempio. Supponiamo che la modulazione
 sia quaternaria $M=4=2^2$. Quindi ad ogni stringa
 binaria di lunghezza 2 viene associato un simbolo.

Se adottiamo la associazione

- 0 0 $\rightarrow$ a_1
- 0 1 $\rightarrow$ a_2
- 1 0 $\rightarrow$ a_3
- 1 1 $\rightarrow$ a_4

ai vari errori di simbolo sono associate i seguenti
 errori binari

simbolo ricevuto simbolo trasmitto	a_1 (00)	a_2 (01)	a_3 (10)	a_4 (11)
a_1 (00)	0	1	1	2
a_2 (01)	1	0	2	1
a_3 (10)	1	2	0	1
a_4 (11)	2	1	1	0

$[N(i,j)]$

MATRICE DI
 CONTEGGIO
 DEGLI ERRORI
 BINARI

Per una diversa associazione avremo una matrice di conteggio degli errori binari diversa. PALMIERI - CRAPZ

$10 \rightarrow a_1$
 $11 \rightarrow a_2$
 $01 \rightarrow a_3$
 $00 \rightarrow a_4$

$\begin{smallmatrix} \text{Ric.} \\ \text{Tr.} \end{smallmatrix}$	a_1 (10)	a_2 (11)	a_3 (01)	a_4 (00)
a_1 (10)	0	1	2	1
a_2 (11)	1	0	1	2
a_3 (01)	2	1	0	1
a_4 (00)	1	2	1	0

$[N(i,j)]$

Quindi in generale nota la matrice di conteggio $[N(i,j)]_{i,j=1,M}$ in una stringa di b bit all'evento $\{\hat{s}=a_i, s=a_j\}$ corrisponderanno $N(i,j)$ bit in errore con probabilità

$$P_c\{\hat{s}=a_i, s=a_j\} = \underbrace{P_c\{\hat{s}=a_i | s=a_j\}}_{\substack{\text{dalla} \\ \text{matrice di} \\ \text{conteggio} \\ P_c(i,j)}} \underbrace{P_c\{s=a_j\}}_{\substack{\text{prob. a} \\ \text{priori} \\ \pi_j}}$$

Quindi il numero medio di bit in errore in una stringa $\hat{s}$

$$N_b = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M N(i,j) P_c(i,j) \pi_j$$

Si definisce probabilità di errore media per bit

$$P_b \triangleq \frac{N_b}{b} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{N(i,j)}{b} P_c(i,j) \pi_j$$

Per quantificare mediamente quante ci si aspetta che un bit sia errato. Da notare che gli errori su bit nelle stringhe non sono indipendenti poiché dipendono dalla struttura della matrice di conteggio, ovvero dal formato di modulazione. Computazionalmente P_b può essere ottenuta come

$$P_b = \frac{1}{b} \underline{e}_H^T (N \odot \underline{P}_c) \underline{\pi}$$

dove $\odot$ è il prodotto elemento-per-elemento e $\underline{e}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_M$. Vedremo con riferimento a vari formati di modulazione come la associazione stringa-simbolo possa essere scelta in maniera intelligente per contenere P_b .

Il fatto si riesce ad ottenere che per gli errori di simbolo più probabili si ha un solo bit in errore, ovvero

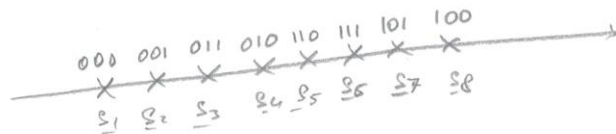
$$P_b \approx \frac{P(e)}{q_2^M}$$

Un codice che ottiene questa proprietà è un cosiddetto codice di Gray. Il codice di Gray viene discusso a proposito della modulazione PAM e QAM.

CODICE DI GRAY

Supponiamo che la codifica dei simboli sia lineare, ovvero che i simboli siano allineati lungo una retta come nella modulazione PAM

E.S. $M=8$



Se da ogni stringa binaria con $b=3$ associamo un simbolo, vorremmo che simboli adiacenti siano associati a stringhe che differiscano solo di un bit, come nella figura (codice di Gray).
Come ottenere la sequenza delle stringhe del codice di Gray?

Il codice, noto anche come "reflecting binary code" è dovuto a Frank Gray (1947) ed è ottenuto mediante una semplice procedura di riflessioni successive.

Vediamo:

Per $b=1$ basculante 0 e 1 differenzia di 1 bit. PALMIERI-GRAY 4

Non è "ribaltato" il codice c'è ancora solo un bit di differenza eccetto che per quello vicino alla metà. Quindi

0 0
0 1
1 1
1 0

per aggiungere uno zero sopra per tutti e un 2 sotto per tutti mantenendo la proprietà

codice di Gray per $b=2$

Ripetendo la procedura

0 0 0
0 0 1
0 1 1
0 1 0
1 1 0
1 1 1
1 0 1
1 0 0

codice di Gray per $b=3$

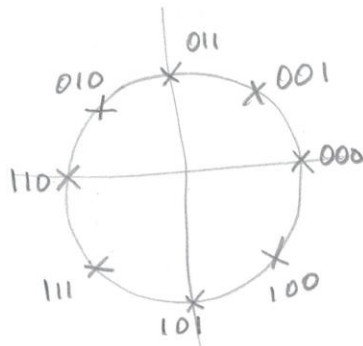
Per $b=4$

0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 1
0 0 1 0
0 1 1 0
0 1 1 1
0 1 0 1
0 1 0 0
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 1
1 1 1 0
1 1 0 1
1 0 1 1
1 0 0 1
1 0 0 0

codice di Gray per $b=4$

Il codice di Gray può essere applicato anche ad una costellazione circolare (PSK) garantendo che simboli adiacenti corrispondano a stringhe che differiscano di un solo bit. Si noti che il codice di Gray è circolare in quanto anche la prima e l'ultima stringa differiscono di un solo bit.

Es. $M=8$ PSK



CODICE DI GRAY PER COSTELLAZIONI BI-DIMENSIONALI

Trovare un codice di Gray per costellazioni quaternarie bi-dimensionali (o N -dimensionali) può essere piuttosto complesso poiché bisogna guardare ai "vicini" di ogni segnale e cercare di garantire la minima distanza di Hamming (1 bit o circa un bit). Discuteremo qui solo il caso di costellazioni quadrate. Cominciamo con un esempio per un 16 QAM



Si noti come uguali adiacenti orizzontalmente e verticalmente differiscono per 1 bit. Uguali adiacenti in diagonale differiscono per 2 bit.

L'idea per costruire il codice nella costellazione quadrata è dividere la parola codice in 2 metà, una per la diagonale orizzontale e l'altra per la verticale. Nel caso specifico $M=16$ per la prima riga si usa il codice di Gray (binario) per la prima coppia ^{orig.}

$00 \underline{00} \rightarrow 0100 \rightarrow 1100 \rightarrow 1000$
 $\downarrow$
 $00 \underline{01} \rightarrow 0101 \rightarrow 1101 \rightarrow 1001$
 $\downarrow$
 $00 \underline{11} \rightarrow 0111 \rightarrow 1111 \rightarrow 1011$
 $\downarrow$
 $00 \underline{10} \rightarrow 0110 \rightarrow 1110 \rightarrow 1010$

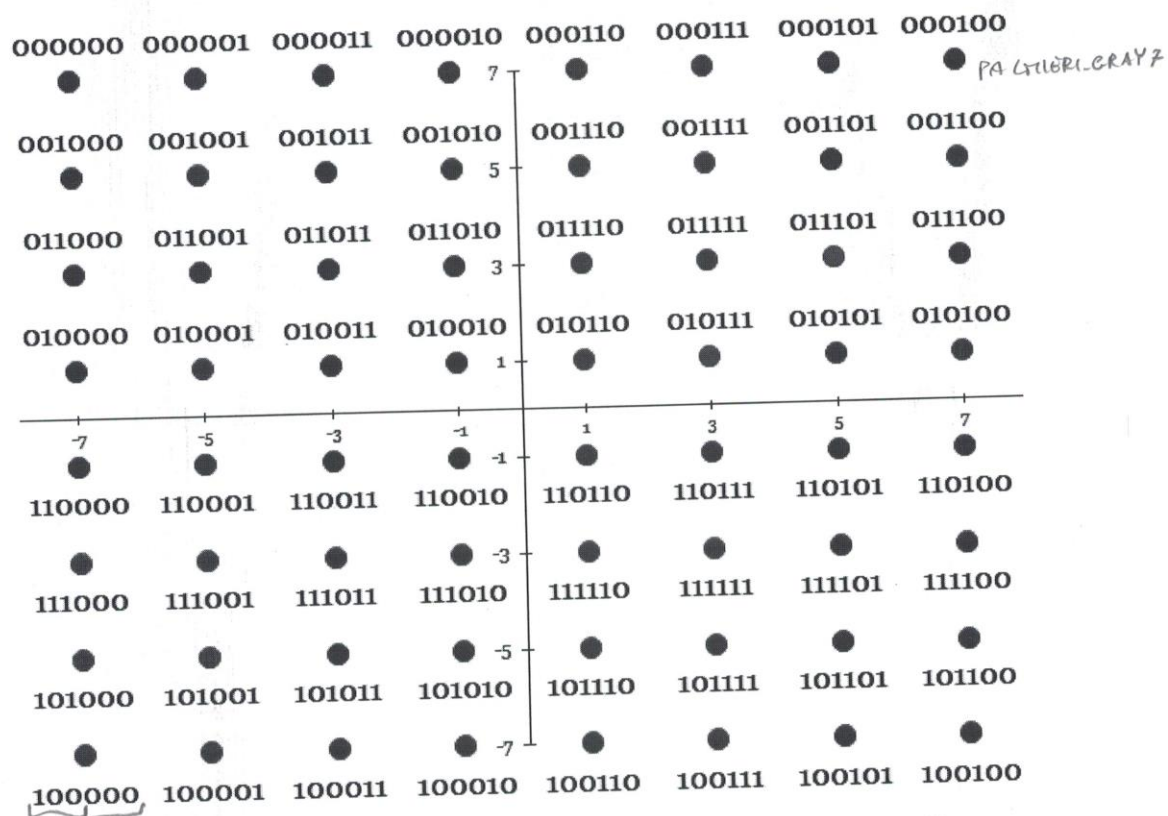
poi si prosegue verticalmente bloccando la prima coppia e usando il codice di Gray nella seconda coppia.

La procedura è facilmente applicabile a costellazioni più grandi. Si noti che b deve essere pari. Ricordiamo prima di tutto che per una costellazione quadrata $M \times M$, $M = n^2$. Quindi

$$2^b = M^2 \quad b = \log_2 M^2 \Rightarrow$$

n	b	M
2	2	4
3	NO	-
4	4	16
5	NO	-
6	NO	-
7	NO	-
8	6	64
...	...	...

n^2 deve essere una potenza di 2

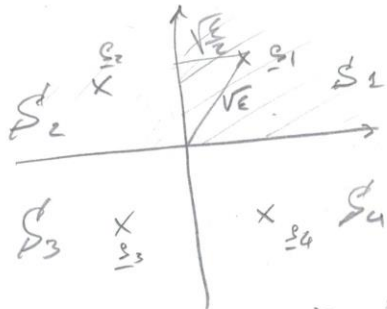


La figura mostra un codice di Gray per $M=64$.
 Ogni stringa binaria è divisa in due stringhe di 3 bit.
 Esistono altri metodi per trovare la migliore codifica
 "alla Gray" per costellazioni diverse anche in più dimensioni.
 Rimando lo studente interessato alla vasta
 letteratura sull'argomento.

Gruppo

PAOLIERI-GRAY

4PSK o 4QAM



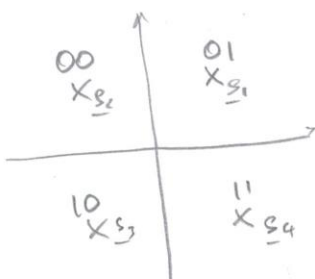
$$Q \triangleq Q\left(\frac{\sqrt{E/4}}{\sqrt{40}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E}}{40}\right)$$

Simboli equiprobabili
 $\pi = (1/4 \ 1/4 \ 1/4 \ 1/4)$

La matrice di canale P_c è

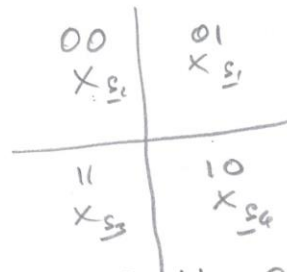
$$P_c = \begin{bmatrix} P_r\{\hat{s}=a_1|s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_2|s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_3|s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_4|s=a_1\} \\ P_r\{\hat{s}=a_1|s=a_2\} & P_r\{\hat{s}=a_2|s=a_2\} & P_r\{\hat{s}=a_3|s=a_2\} & P_r\{\hat{s}=a_4|s=a_2\} \\ P_r\{\hat{s}=a_1|s=a_3\} & P_r\{\hat{s}=a_2|s=a_3\} & P_r\{\hat{s}=a_3|s=a_3\} & P_r\{\hat{s}=a_4|s=a_3\} \\ P_r\{\hat{s}=a_1|s=a_4\} & P_r\{\hat{s}=a_2|s=a_4\} & P_r\{\hat{s}=a_3|s=a_4\} & P_r\{\hat{s}=a_4|s=a_4\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-Q)^2 & Q(1-Q) & Q^2 & Q(1-Q) \\ Q(1-Q) & (1-Q)^2 & Q(1-Q) & Q^2 \\ Q^2 & Q(1-Q) & (1-Q)^2 & Q(1-Q) \\ Q(1-Q) & Q^2 & Q(1-Q) & (1-Q)^2 \end{bmatrix}$$



① Codice di Gray

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



② Non Codice di Gray

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

①

$$N_1 \otimes P_c = \begin{bmatrix} 0 & Q(1-Q) & 2Q^2 & Q(1-Q) \\ Q(1-Q) & 0 & Q(1-Q) & 2Q^2 \\ 2Q^2 & Q(1-Q) & 0 & Q(1-Q) \\ Q(1-Q) & 2Q^2 & Q(1-Q) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{PAULI-MATRICES}$$

$$P_b = \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 1 \ 1) (N_1 \otimes P_c) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} (1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{bmatrix} 2Q^2 + 2Q(1-Q) \\ 2Q^2 + 2Q(1-Q) \\ 2Q^2 + 2Q(1-Q) \\ 2Q^2 + 2Q(1-Q) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} (1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 2Q \\ 2Q \\ 2Q \\ 2Q \end{pmatrix} = Q$$

②

$$N_2 \otimes P_c = \begin{bmatrix} 0 & Q(1-Q) & Q^2 & 2Q(1-Q) \\ Q(1-Q) & 0 & 2Q(1-Q) & Q^2 \\ Q^2 & 2Q(1-Q) & 0 & Q(1-Q) \\ 2Q(1-Q) & Q^2 & Q(1-Q) & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_b = \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 1 \ 1) (N_2 \otimes P_c) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} (1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{bmatrix} 3Q(1-Q) + Q^2 \\ u \\ u \\ u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} (1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 3Q - 2Q^2 \\ 3Q - 2Q^2 \\ 3Q - 2Q^2 \\ 3Q - 2Q^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (3Q - 2Q^2) = \frac{3}{2}Q - Q^2$$

$$= Q \left(\frac{3}{2} - Q \right) > Q$$