

PALMIERI-FANTO

MODULAZIONE PAM SU
CANALE AWGN

Lezioni del corso di

TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA
DEI SEGNALE/COMUNICAZIONI ELETTRICHE
(SUN)

A.A. 2016-17

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

MODULAZIONE DI AMPIEZZA DISCRETA

PAM1-PAM1

ASK (AMPLITUDE-SHIFT KEYING)

PAM (PULSE AMPLITUDE MODULATION)

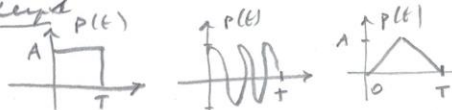
Nella modulazione di ampiezza discreta agli M simboli di sorgente vengono associate M versioni scalate dello stesso impulso.

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\} \rightarrow \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$$

$$\text{con } s_i(t) = \xi_i p(t) \quad i=1, \dots, M$$

$\{\xi_i, i=1, \dots, M\}$ sono le ampiezze e $p(t)$ è l'impulso base contenuto nell'intervallo $[0, T]$.

Esempi

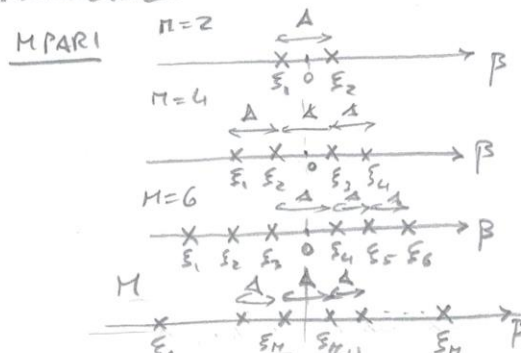


$$\beta \in \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}, \quad z(t) = \beta p(t)$$

I livelli $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$ vengono tipicamente scelti in maniera equispaziata, e simmetrici rispetto allo zero, ma tante altre scelte sono possibili. Enumeriamo qui il caso equispaziato e simmetrico.

$$\xi_i = -\frac{M+1}{2} \Delta + j \Delta$$

$$i=1, \dots, M$$

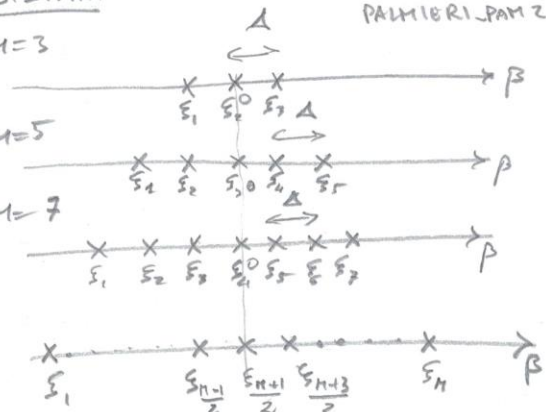


M DISPARI

$M=3$

$M=5$

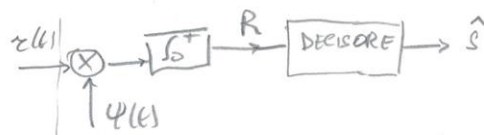
$M=7$



Il campo dell'unione dei segnali è chiaramente uno, essendo tutti proporzionali. Pertanto la base completa è costituita dal solo impulso $p(t)$ normalizzato

$$\psi(t) = \frac{p(t)}{\sqrt{E_p}}, \quad E_p = \int_0^T p(t)^2 dt$$

Il ricevitore è

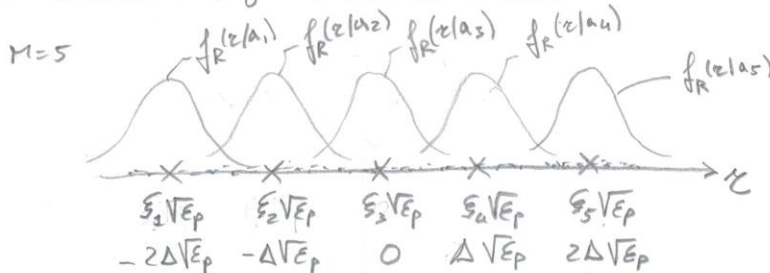


Segnali e rumore nello spazio di R dovranno

$$R/a_i = \int_0^T s_i(t) \psi(t) dt + \int_0^T n(t) \psi(t) dt = \int_0^T s_i p(t) \frac{p(t)}{\sqrt{E_p}} dt + N$$

$$= \frac{s_i}{\sqrt{E_p}} \int_0^T p(t)^2 dt + N = s_i \sqrt{E_p} + N \quad i = 1, \dots, M$$

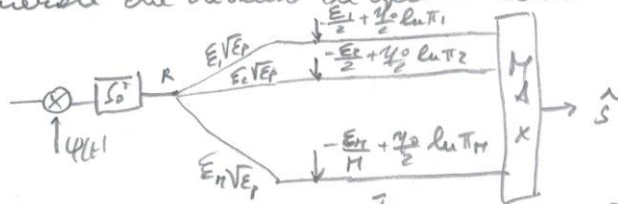
ovvero ricaviamo i punti $s_1 \sqrt{E_p}, s_2 \sqrt{E_p}, \dots, s_M \sqrt{E_p}$ diversi dal rumore N , gaussiano a media nulla e con varianza $\frac{E_p}{2}$



$$f_R(z|a_i) = N\left(z; \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \sqrt{E_p}, \gamma_0/z\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{(z - \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \sqrt{E_p})^2}{\gamma_0}} \quad \text{PALMIERI-PAT 3}$$

$i = 1, \dots, M$

Abbiamo già ricavato lo schema di ricevitore generale che diventa in questo caso



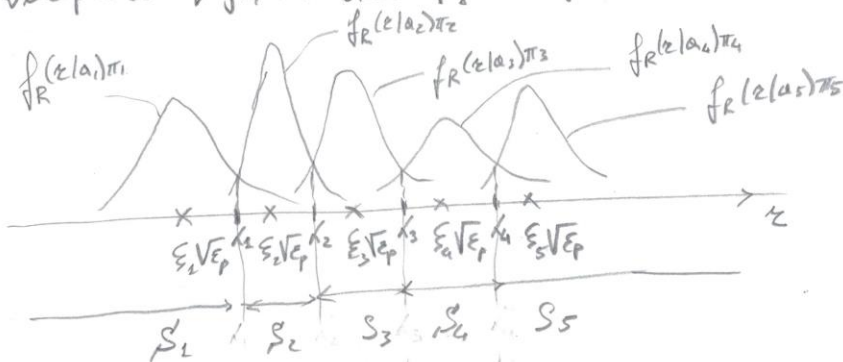
dove $\varepsilon_i = \int_0^T S_i^2(t) dt = \int_0^T \sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 p_i(t) dt = \varepsilon_i^2 E_p$ (energie dei vari segnali) $\odot$

La struttura può essere semplificata scrivendo il criterio MAP in forma esplicita

$$f_R(z|a_i) \pi_i > f_R(z|a_j) \pi_j$$

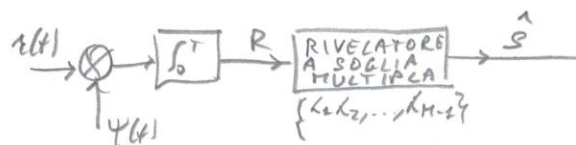
$$\frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{(z - \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \sqrt{E_p})^2}{\gamma_0}} \pi_i > \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{(z - \sum_{j=1}^M \varepsilon_j \sqrt{E_p})^2}{\gamma_0}} \pi_j$$

ovvero: ricevuto z , scegli $\hat{s} = a_i$ se la disuguaglianza è verificata $\forall j \neq i$. Una tecnica più intuitiva a capire.

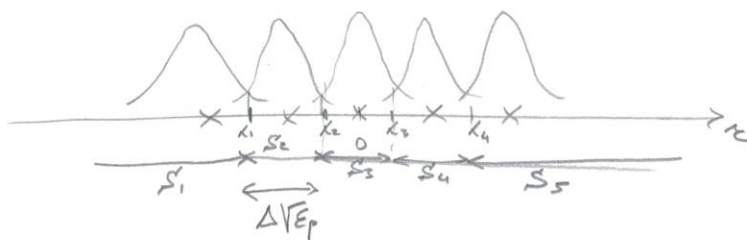


Qui si vede come le regioni di decisione sono degli intervalli che possono essere riconosciuti mediante un decisore a soglie multiple. Note che a causa delle probabilità a priori non necessariamente uniformi, le soglie non sono al centro degli intervalli tra i simboli.

In effetti in alcuni casi possono esibire un comportamento diverso.
 Quindi il ricevitore ottimo può essere ri-disegnato.
 PALLIBRI-PAM4



Nel caso del ricevitore ML, o di probabilità a priori uniformi ($\pi_i = \frac{1}{M}$, $i=1, \dots, M$), le soglie possono essere esattamente al centro degli intervalli tra i simboli.



Valutiamo ora le prestazioni del ricevitore ML calcolando la probabilità di errore. Ovviamente la dispersione causata dal rumore porta a volte una osservazione al di fuori dell'intervallo relativo al simbolo trasmesso. Vediamo analiticamente:

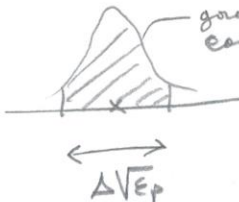
$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - \sum_{i=1}^M p(c|a_i) \pi_i = 1 - \sum_{i=1}^M \int_{S_i} f_R(z|a_i) dz \pi_i$$

(È noto che la valutazione della prob. di errore può includere le prob. a priori anche se il ricevitore non ne ha tenuto conto (ricevitore ML).

La valutazione degli integrali è semplice visto che bisogna integrare delle gaussiane. Guardando la figura vediamo che per i simboli $\{a_2, a_3, \dots, a_{M-2}\}$

bisogna risolvere degli integrali del tipo PALMISTRI - PMS

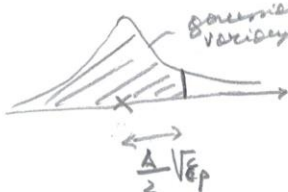
gaussiana con varianza $\sigma^2/2$



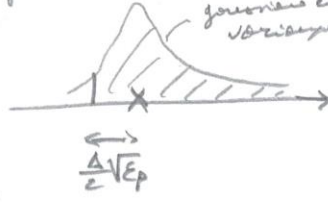
$$1 - 2Q\left(\frac{\Delta\sqrt{E_p}}{\sqrt{\sigma^2/2}}\right) = 1 - 2Q\left(\Delta\sqrt{\frac{E_p}{\sigma^2/2}}\right)$$

per i simboli a_1 e a_M degli integrali del tipo

gaussiana con varianza $\sigma^2/2$



gaussiana con varianza $\sigma^2/2$



$$1 - Q\left(\Delta\sqrt{\frac{E_p}{\sigma^2/2}}\right)$$

Quindi

$$P(e) = 1 - (\pi_2 + \pi_3 + \dots + \pi_{M-1}) \left[1 - 2Q\left(\Delta\sqrt{\frac{E_p}{\sigma^2/2}}\right) \right] - (\pi_1 + \pi_M) \left[1 - Q\left(\Delta\sqrt{\frac{E_p}{\sigma^2/2}}\right) \right]$$

Per probabilità a priori uniformi

$$P(e) = 1 - \frac{M-2}{M} \left(1 - 2Q(\cdot) \right) - \frac{2}{M} \left(1 - Q(\cdot) \right)$$

$$= 1 - \frac{M-2}{M} + \frac{M-2}{M} \cdot 2Q(\cdot) - \frac{2}{M} + \frac{2}{M} Q(\cdot)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{2}{M} + \frac{2(M-2)}{M} Q(\cdot) - \frac{2}{M} + \frac{2}{M} Q(\cdot)$$

2M-4+2

$$= \frac{2(M-1)}{M} Q(\cdot)$$

$$P(e) = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\Delta\sqrt{\frac{E_p}{\sigma^2/2}}\right)$$

Si noti che al crescere di M , la prob. di errore tende a quella dei simboli interni $2Q\left(\Delta\sqrt{\frac{E_p}{\sigma^2/2}}\right)$. Il contributo delle regioni che competono ai due simboli estremi diventa trascurabile.

fuoribando all'argomento della funzione $Q(\cdot)$ (in ricordo che
 la funzione $Q(\cdot)$ è decrescente) al crescere della temperatura
 Δ le prestazioni migliorano (P_e decresce). Anche al crescere
 dell'ampiezza di $p(t)$, ovvero dell'energia E_p , le cose
 migliorano. l'effetto opposto lo si ha quando cresce
 il rumore η_0 .

La valutazione sistematica delle prestazioni di un sistema
 di modulazione numerica deve tenere conto anche
 della complessità dell'insieme di simboli. Infatti al
 crescere di M , se si mantiene Δ costante, cresce
 l'energia dei simboli e quindi la potenza
 trasmessa. Ovviamente quando cresce M cresce
 anche l'informazione trasportata ovvero il
 bit-rate (frequenza di cifre) $\frac{\log_2 M}{T}$.

Pertanto le prestazioni si valutano in funzione
dell'energia media per bit trasmesso

$$E_b = \frac{\bar{E}}{\log_2 M} \quad \text{rispetto al rumore } \eta_0, \quad \frac{E_b}{\eta_0}$$

Qui i simboli non sono equiprobabili e
 hanno energia

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt = \int_0^T E_i^2 p(t) dt = E_i^2 E_p.$$

Il calcolo della media richiede il calcolo della
 varianza

$$\bar{E} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_i = \frac{E_p}{M} \sum_{i=1}^M E_i^2 = \frac{E_p}{M} \sum_{i=1}^M \left(-\frac{n+1}{2} + i \right)^2 \Delta^2$$

Con un po' di buona volontà, ricordando che

PALMIERI-PART 7

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^M i &= \frac{M(M+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=1}^M i^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \quad , \\ \sum_{i=1}^M \left(-\frac{M+1}{2} + i\right)^2 &= \sum_{i=1}^M i^2 + \sum_{i=1}^M \frac{(M+1)^2}{4} - \sum_{i=1}^M 2i \frac{(M+1)}{2} \\ &= \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} + \frac{M(M+1)(M+1)}{4} - \frac{(M+1)M(M+1)}{2} \\ &= M(M+1) \left(\frac{2M+1}{6} + \frac{M+1}{4} - \frac{M+1}{2} \right) \\ &= M(M+1) \left(M \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= M(M+1) \left(M \frac{4+3-6}{12} + \frac{2+3-6}{12} \right) \\ &= M(M+1) \left(\frac{M}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{M}{12} (M^2 - 1) .\end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_p \Delta^2}{M} \frac{M}{12} (M^2 - 1) = \frac{\varepsilon_p \Delta^2 (M^2 - 1)}{12}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\bar{\varepsilon}}{l_{g_2} M} = \frac{\varepsilon_p \Delta^2 (M^2 - 1)}{12 l_{g_2} M}$$

Per fare esperimenti ε_b nella espressione delle $P(e)$, ricorriamo

$$\frac{\varepsilon_p \Delta^2}{2} = \frac{6 \varepsilon_b l_{g_2} M}{(M^2 - 1)} \quad \text{e sostituiamo}$$

$$P(e) = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{6 l_{g_2} M}{M^2 - 1} \frac{\varepsilon_b}{\gamma_0}} \right)$$

La figura mostra l'andamento della prob. di errore in funzione di $\frac{E_b}{\gamma_0}$ (in dB). Al crescere di M , a parità di $\frac{E_b}{\gamma_0}$ le prestazioni peggiorano ovviamente poiché i segnali PALMIER L. PAM 8 sono più densamente spaziosi.

182 DIGITAL COMMUNICATIONS

da J. G. PROAKIS
Digital Communications,
McGraw-Hill, 1983

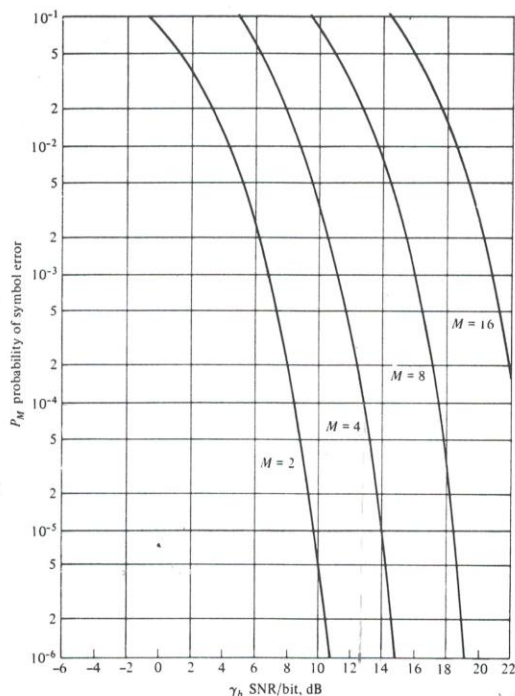


Figure 4.2.24 Probability of a symbol error for PAM.

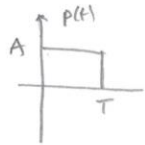
$$\gamma_0 = \frac{E_b}{\gamma_0}$$

Questo grafico può essere usato ^{ad esempio} per determinare la potenza necessaria ad una data cardinalità con una PLE inferiore ad un certo valore.
Oppure fissata la potenza che potrebbe rimanere essere ottenute alle varie cardinalità.

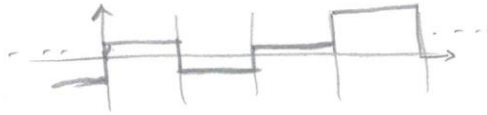
ESEMP1

ALCHIERI-PAN 3

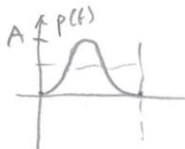
(a) Impulso para-basso rettangolare



$$\epsilon_p = A^2 T$$



(b) Impulso para-basso a coseno rialzato.

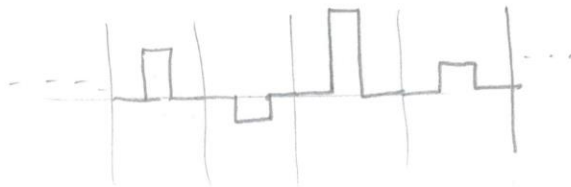
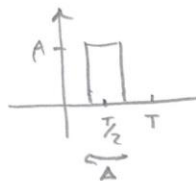


$$p(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cos \frac{2\pi t}{T}$$



$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \int_0^T p^2(t) dt = \int_0^T \left(\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} - \frac{2A^2}{4} \cos \frac{2\pi t}{T} \right) dt \\ &= \frac{A^2}{4} T + \frac{A^2}{4} \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt - \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos \frac{2\pi t}{T} dt \\ &= \frac{A^2}{4} T + \frac{A^2}{8} T = \frac{3}{8} A^2 T \end{aligned}$$

(c) Impulso rettangolare centrato

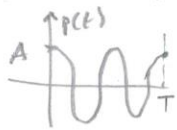


$$\epsilon_p = A^2 \Delta$$

ESEMPI (cont.)

PALMIERI-PANIO

(d) impulso passabanda: ad esempio



$$p(t) = A \cos 2\pi f_0 t$$

$$\begin{aligned} E_p &= \int_0^T p^2(t) dt = \int_0^T A^2 \cos^2 2\pi f_0 t dt = \int_0^T \left(\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 4\pi f_0 t \right) dt \\ &= \frac{A^2}{2} T + \frac{A^2}{2} \frac{\sin 4\pi f_0 t}{4\pi f_0} \Big|_0^T = \frac{A^2}{2} T + \frac{A^2}{8\pi f_0} \sin 4\pi f_0 T \end{aligned}$$

$$\text{Se } 4\pi f_0 T = k\pi \Rightarrow T = \frac{k}{4f_0} \quad E_p = \frac{A^2}{2} T$$

oppure se $f_0 \gg 0$ $E_p \approx \frac{A^2}{2} T$
 Nel considerare impulsi negli intervalli di rimborsi
 si cerca comunque di avere massima compatibilità
 con evitare eccessive allargamenti dello spettro.



(e) Una scelta migliore potrebbe essere



$$p(t) = A \sin \frac{3\pi t}{T}$$



discriminato sulle derivate

(f) o una sinusoide moltiplicata per una funzione
 finestra "debole"



La P_e calcolata nelle pagine precedenti è un parametro di prestazioni medie che non descrive nel dettaglio cosa succede ai vari simboli trasmessi. Ad esempio i simboli esterni, avendo un solo "vicino", ne hanno meno errori dei simboli interni che ne hanno due. Inoltre un simbolo è più probabile che venga confuso con un vicino che con altri ^{non} vicini. Pertanto la descrizione probabilistica completa delle modulazioni PAM richiede che si vadano a valutare le probabilità di tutti gli eventi di errore possibili, ovvero di tutta la matrice di canale.

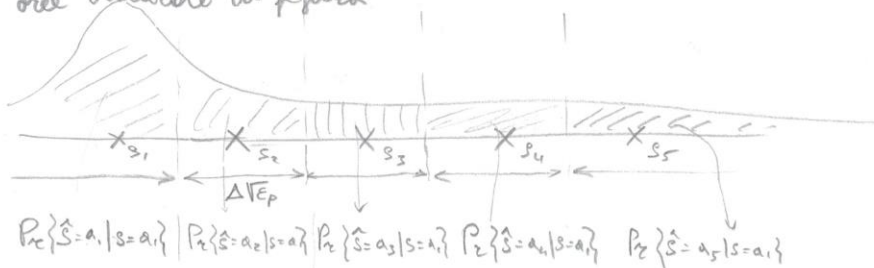
$$P_c = \begin{bmatrix} P_e\{\hat{s}=a_1|s=a_1\} & \dots & P_e\{\hat{s}=a_M|s=a_1\} \\ P_e\{\hat{s}=a_1|s=a_2\} & \dots & P_e\{\hat{s}=a_M|s=a_2\} \\ \vdots & & \vdots \\ P_e\{\hat{s}=a_1|s=a_M\} & \dots & P_e\{\hat{s}=a_M|s=a_M\} \end{bmatrix}$$

Si è in effetti ottenuto solo vettore la diagonale. Lo studio delle matrici di canale può essere utile, ad esempio, quando si deve valutare la efficienza di una associazione stringa binaria - simbolo.

Per semplicità valutiamo qui solo il caso della modulazione PAM con ricevitore MV.

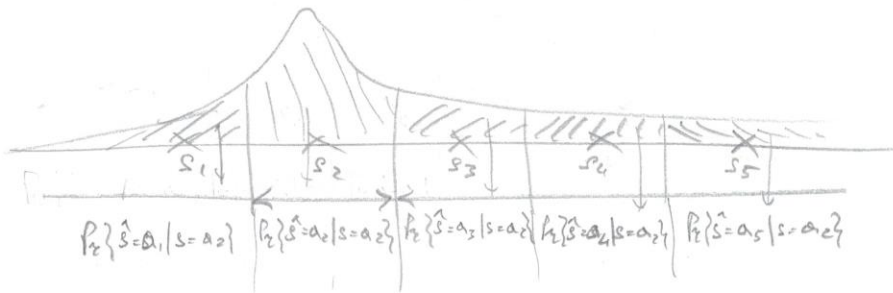
Analizziamo prima il caso più semplice per $M=5$

Per la prima riga delle matrici otteniamo valutare le aree indicate in figura.

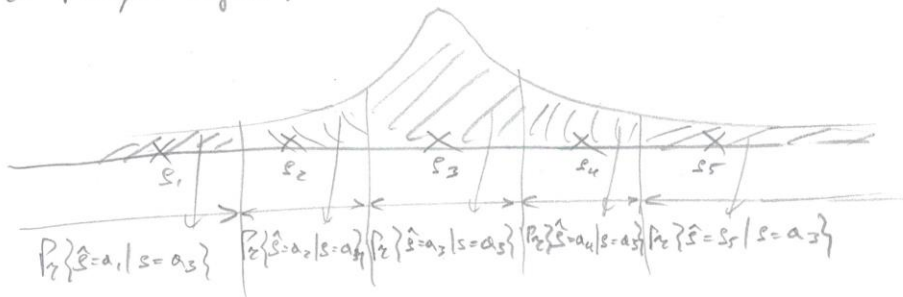


la seconda riga:

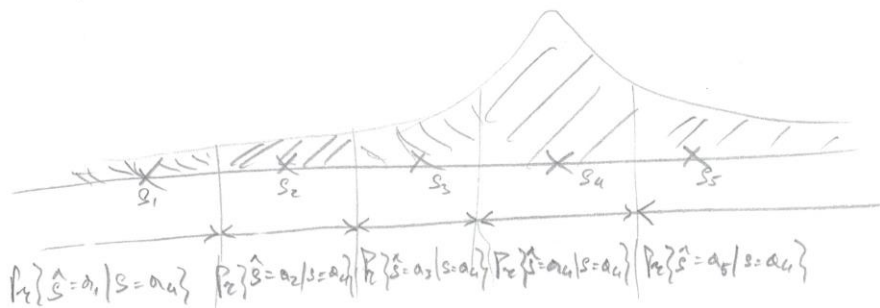
PALMIERI - PAM 12



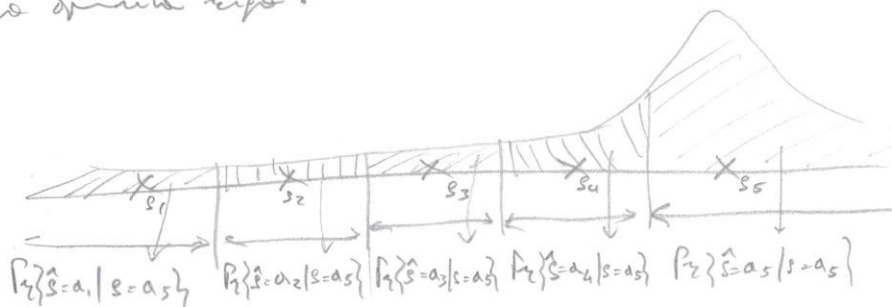
la terza riga:



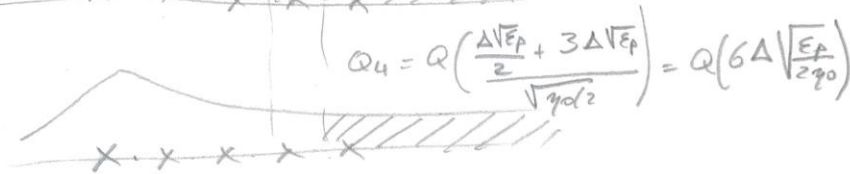
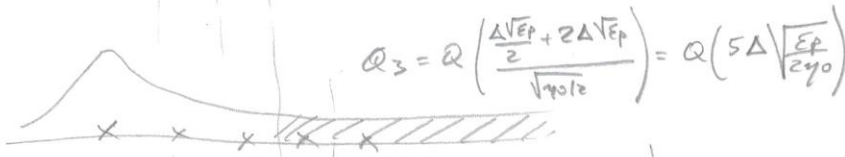
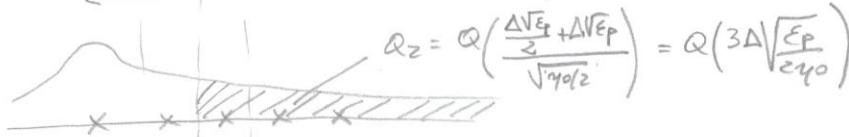
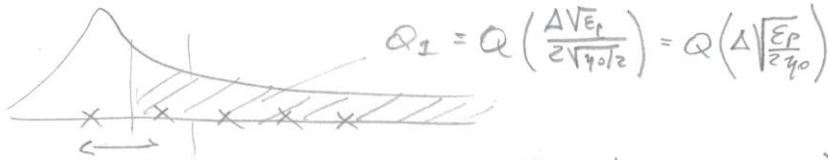
la quarta riga:



la quinta riga:



Per valutare le prob. in forma sintetica definiremo
le seguenti aree PALMERI-PAM13

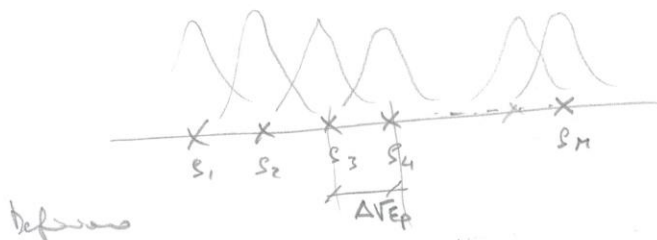


Per semplice sottrazione di aree e per simmetria, otteniamo la
matrice di correlazione:

$$P_c = \begin{bmatrix} 1-Q_1 & Q_1-Q_2 & Q_2-Q_3 & Q_3-Q_4 & Q_4 \\ Q_1 & 1-2Q_1 & Q_1-Q_2 & Q_2-Q_3 & Q_3 \\ Q_2 & Q_1-Q_2 & 1-2Q_1 & Q_1-Q_2 & Q_2 \\ Q_3 & Q_2-Q_3 & Q_1-Q_2 & 1-2Q_1 & Q_1 \\ Q_4 & Q_3-Q_4 & Q_2-Q_3 & Q_1-Q_2 & 1-Q_1 \end{bmatrix} \quad \text{sum} = 1$$

In generale per un PAM M-ario

PAM1021-PAM14



$$Q_j = Q\left(\frac{\Delta TEP}{2} + (j-1)\Delta TEP\right) = Q\left((2j-1)\Delta \sqrt{\frac{E_p}{2\eta_0}}\right)$$

(area a destra del nucleo j-esimo)

La matrice di canale ha la struttura seguente $j=1, \dots, M$

$$P_c = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 - Q_2 & \dots & \dots & Q_{M-1} - Q_M & Q_{M-1} \\ Q_1 & 1 - 2Q_1 & Q_1 - Q_2 & \dots & Q_{M-2} - Q_{M-1} & Q_{M-2} \\ Q_2 & Q_1 - Q_2 & 1 - 2Q_1 & \dots & Q_{M-3} - Q_{M-2} & Q_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{M-2} & Q_{M-2} - Q_{M-3} & \dots & \dots & 1 - 2Q_1 & Q_1 \\ Q_{M-1} & Q_{M-1} - Q_{M-2} & \dots & \dots & Q_1 - Q_2 & 1 - Q_1 \end{bmatrix}$$

Avvicinamento quando i nuclei sono abbastanza piccoli
le probabilità fuori diagonale tendono a essere piccole
e la matrice di canale assume una forma quasi
tri-diagonale. In generale la matrice è diagonale
dominante.