

MODULAZIONE PSK SU
CANALE AWGN

Lezione del corso di

TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALE
COMUNICAZIONI ELETTRICHE

(SUN)

AA. 2016-17

Prof. FRANCESCO A.N. PAUTIERI

MODULAZIONE DISCRETA DI FASE

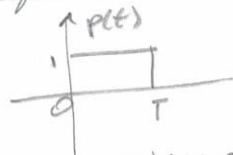
PSK (PHASE-SHIFT KEYING)

Nella modulazione di fase agli M simboli si assegnano frequenze associate sequenti di un segnale sinusoidale a M fasi diverse equispaziate.

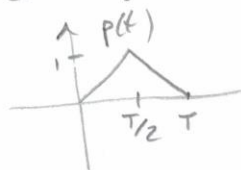
$$A = \{a_1, \dots, a_M\} \Rightarrow s_j(t) = A p(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_j) \quad t \in [0, T]$$

$$\theta_j = \phi_0 + (j-1) \frac{2\pi}{M} \quad j=1, \dots, M.$$

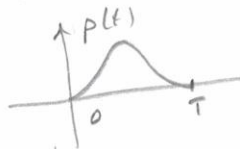
La frequenza f_0 è tipicamente scelta in modo da contenere all'interno dell'intervallo $[0, T]$ un numero intero di periodi della sinusoida: $T = \frac{K}{f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{K}{T}$, K intero.
L'impulso $p(t)$ ($\neq 0$ $t \in [0, T]$), può essere per default l'impulso rettangolare,



o una funzione simmetrica attorno a $T/2$ per controllare le transizioni in un intervallo di simbolo e gli adiacenti.

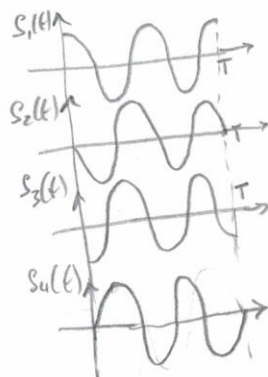


oppure

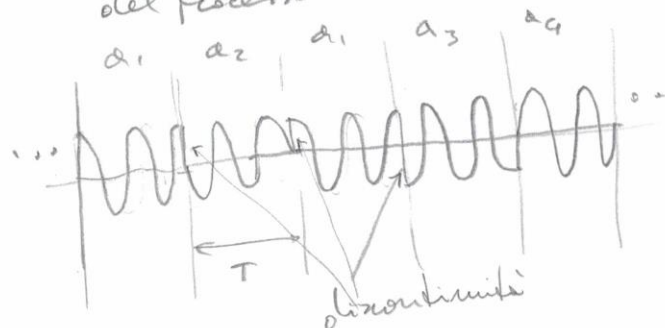


ad esempio:
 $p(t)$ coseno rialzato
 $p(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right)$

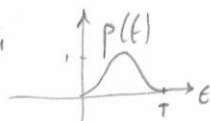
Esempio 1: $f_0 = \frac{2}{T}$, $\phi_0 = 0$, $M=4$, $p(t) = \pi \left(\frac{t - T/2}{T} \right)$



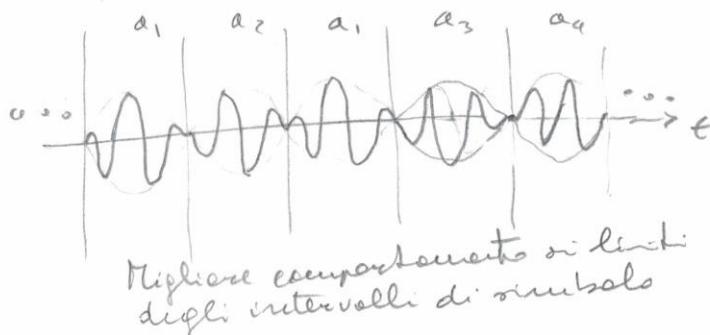
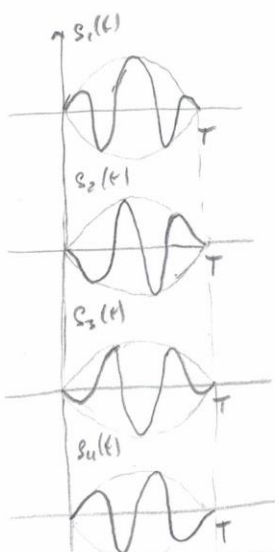
Un sequenza di una realizzazione del processo



Example 2 $f_0 = \frac{2}{T}$, $\phi_0 = 0$, $n=4$



PALMERI-PEKZ



Le funzioni di base per rappresentare i segnali possono essere ottenute mediante lo procedimento di Gram-Schmidt. Ma una inspectione diretta dei segnali ci porta a capire immediatamente che il tempo t deve essere come ben ortogonali possono essere usati un coseno e un seno. Infatti

$$s_j(t) = A p(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_j) = A p(t) (\cos \theta_j \cos 2\pi f_0 t - \sin \theta_j \sin 2\pi f_0 t),$$

quindi le due funzioni ortogonali possono essere

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = A p(t) \cos 2\pi f_0 t \\ \psi_2'(t) = -A p(t) \sin 2\pi f_0 t \end{cases}$$

perché per impulsi $p(t)$ simmetrici abbiamo

$$\int \psi_1'(t) \psi_2'(t) dt = -A^2 \int p^2(t) \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t dt$$

$$= -A^2 \int_0^T p^2(t) \sin 4\pi f_0 t dt = A^2 \int_0^T \underbrace{p^2(t)}_{\text{pari}} \underbrace{\sin 4\pi f_0 t}_{\text{dispari}} dt = 0$$

Per normalizzare, valutiamo le energie di $\psi_1'(t)$ e $\psi_2'(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^T |\psi_1'(t)|^2 dt &= \int_0^T A^2 p^2(t) \cos^2 \frac{2\pi K}{T} t dt = \underbrace{\frac{A^2}{2} \int_0^T p^2(t) dt}_{\varepsilon_p} + \underbrace{\frac{A^2}{2} \int_0^T p^2(t) \cos \frac{4\pi K}{T} t dt}_{\varepsilon_2} = \frac{A^2}{2} \varepsilon_1 \\ \int_0^T |\psi_2'(t)|^2 dt &= \int_0^T A^2 p^2(t) \sin^2 \frac{2\pi K}{T} t dt = \underbrace{\frac{A^2}{2} \int_0^T p^2(t) dt}_{\varepsilon_p} - \underbrace{\frac{A^2}{2} \int_0^T p^2(t) \cos \frac{4\pi K}{T} t dt}_{\varepsilon_2} = \frac{A^2}{2} \varepsilon_2 \end{aligned} \right.$$

PALMIERI-PSK3

Per $p(t)$ impulso rettangolare $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_p = T$, $\varepsilon_1 = T = \varepsilon_2$

Per altri impulsi simmetrici $\varepsilon_2 \neq 0$ e comunque tende a zero per $K \gg 2$.

In generale:

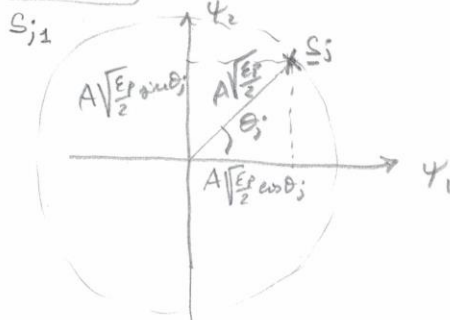
$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{A p(t)}{\sqrt{\frac{A^2}{2} \varepsilon_1}} \cos 2\pi f_0 t = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_1}} \cos 2\pi f_0 t \\ \psi_2(t) &= -\frac{A p(t)}{\sqrt{\frac{A^2}{2} \varepsilon_2}} \sin 2\pi f_0 t = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_2}} \sin 2\pi f_0 t \end{aligned} \right.$$

Quindi i segnali $s_j(t)$ possono essere espressi in funzione delle due basi ortogonali come

$$s_j(t) = \underbrace{A \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cos \theta_j}_{s_{j1}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_1}} p(t) \cos 2\pi f_0 t}_{\psi_1(t)} + \underbrace{A \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{2}} \sin \theta_j}_{s_{j2}} \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_2}} p(t) \sin 2\pi f_0 t \right)}_{\psi_2(t)}$$

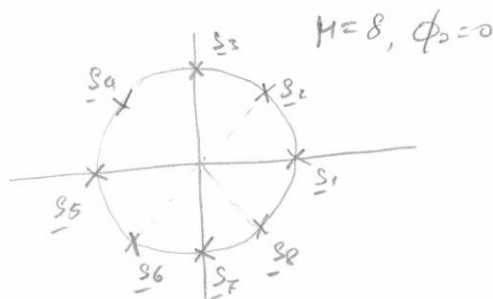
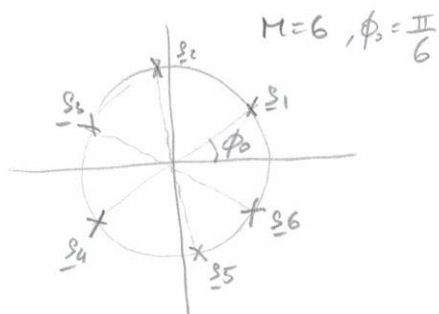
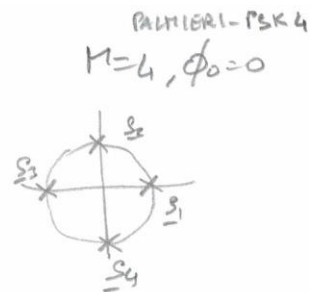
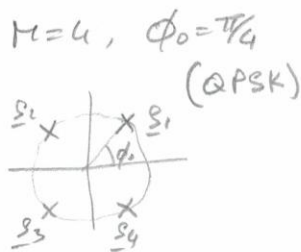
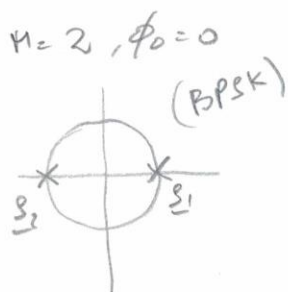
Assumendo per semplicità che $\varepsilon_2 = 0$ e che $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_p$

$$s_j(t) = \underbrace{A \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{2}} \cos \theta_j}_{s_{j1}} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_p}} p(t) \cos 2\pi f_0 t + \underbrace{A \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{2}} \sin \theta_j}_{s_{j2}} \left(-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_p}} p(t) \sin 2\pi f_0 t \right)$$

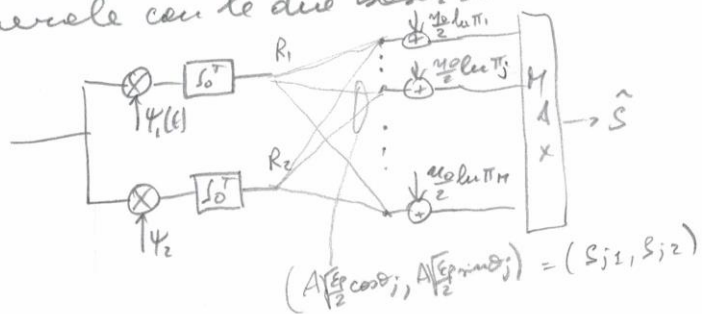


I segnali sono tutti localizzati in una circonferenza di raggio $A \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{2}}$

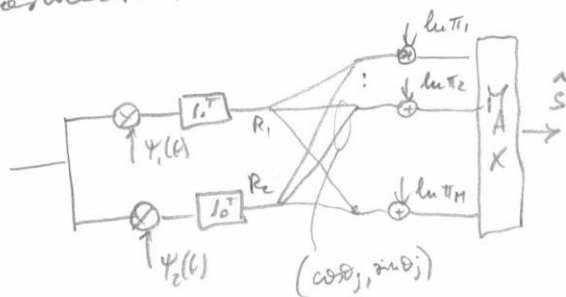
Tipiche costellazioni sono:



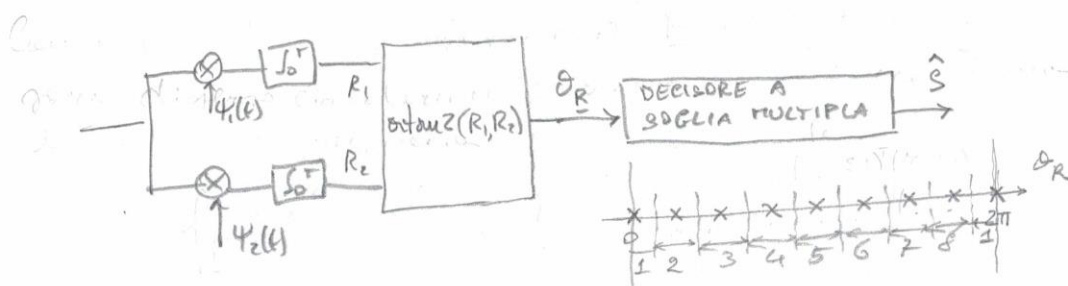
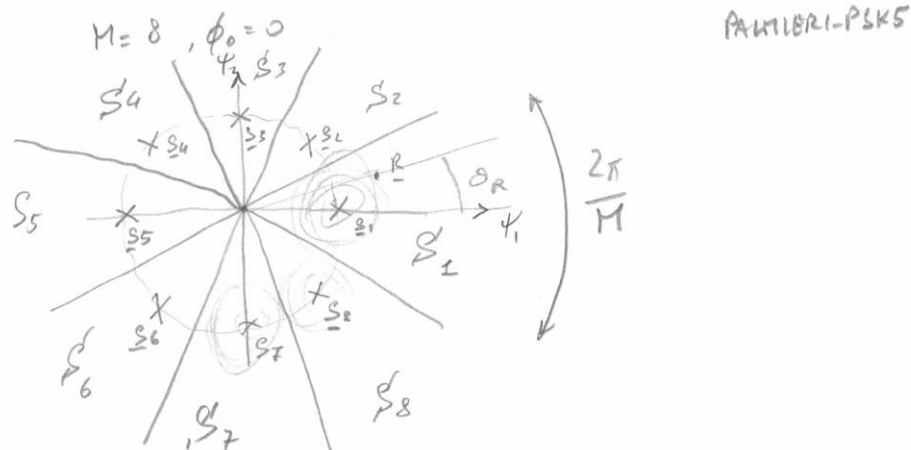
Il ricevitore ottiene MAP la quindi la struttura generale con le due vari. Si noti che i segnali sono equispaziati:



Le costanti nel conteggio possono essere eliminate, quindi:



Il ricevitore MV è più semplice perché le regioni di decisione sono semplicemente i settori circolari



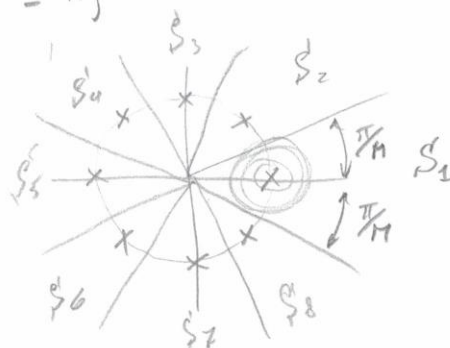
Come il solito il vettore ricevuto $\underline{R}$ nell'ipotesi a_j non disperso circolarmente attorno a $\underline{s}_j$ secondo una pdf gaussiana bidimensionale

$$f_{\underline{R}}(\underline{r}|a_j) = N(\underline{r}; \underline{s}_j, \frac{\gamma_0}{2} \underline{I}_2) = \frac{1}{\pi \gamma_0} e^{-\frac{(\underline{r} - \underline{s}_j)^T (\underline{r} - \underline{s}_j)}{\gamma_0}}$$

La probabilità di errore media si valuta come al solito

$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - \sum_{j=1}^M p(c|a_j) \pi_j = 1 - \sum_{j=1}^M P\{\underline{R} \in \mathcal{S}_j | a_j\} \pi_j$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^M \int_{\mathcal{S}_j} f_{\underline{R}}(\underline{r}|a_j) d\underline{r} \pi_j$$



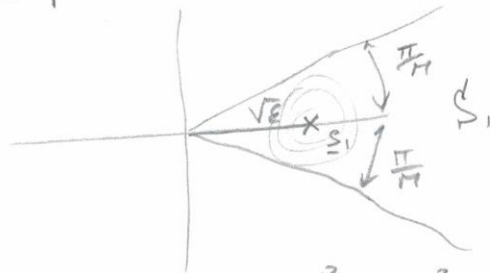
Si noti che gli integrali sono tutti uguali visto la struttura simmetrica della costellazione. Pertanto

M. L. MERI-PSK6

$$P(e) = 1 - \int_{S_1} f_R(\underline{r}|\underline{a}_1) d\underline{r}$$

Da qui si vede che le prestazioni del ricevitore PSK non dipendono dalle probabilità a priori (canale uniforme).
Per la valutazione dell'integrale si può passare a coordinate polari

$$\sqrt{E} = A\sqrt{\frac{E_s}{2}}$$



$$\int_{S_1} f_R(\underline{r}|\underline{a}_1) d\underline{r} = \int_{S_1} \frac{1}{\pi\eta_0} e^{-\frac{(\underline{r}_1 - \sqrt{E})^2}{\eta_0}} e^{-\frac{\underline{r}_2^2}{\eta_0}} d\underline{r}_1 d\underline{r}_2$$

$$\underline{r}_1 = \rho \cos \theta$$

$$\underline{r}_2 = \rho \sin \theta$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\pi\eta_0} e^{-\frac{(\rho \cos \theta - \sqrt{E})^2}{\eta_0}} e^{-\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\eta_0}} \rho d\theta d\rho$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\pi\eta_0} e^{-\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\eta_0}} e^{-\frac{E}{\eta_0}} e^{+2\rho \frac{\sqrt{E} \cos \theta}{\eta_0}} e^{-\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\eta_0}} \rho d\theta d\rho$$

$$= \frac{1}{\pi\eta_0} e^{-\frac{E}{\eta_0}} \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{\eta_0}} \rho d\rho \underbrace{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{\frac{2\rho \sqrt{E} \cos \theta}{\eta_0}} d\theta}_{I(\rho, \eta)} \quad (*)$$

L'integrale va valutato numericamente.

Perciò i segnali sono espressi in termini

l'energia per bit è $E_b = \frac{\bar{E}}{\log_2 M} = \frac{E}{\log_2 M}$. l'andamento
in funzione di $\gamma_b = \frac{E_b}{\eta_0}$ è riportato in figura.

PAWIERI-PSK 7

da J. G. Proakis.
Digital Communications
McGraw Hill 1983

170 DIGITAL COMMUNICATIONS

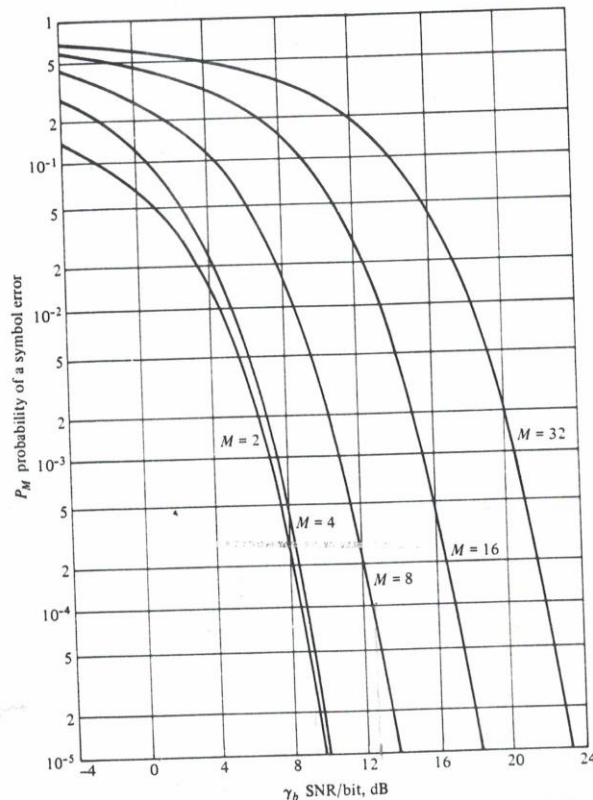


Figure 4.2.15 Probability of a symbol error for PSK signals.

$$\gamma_b = \frac{E}{\log_2 M \eta_0} = \frac{E_b}{\eta_0}$$

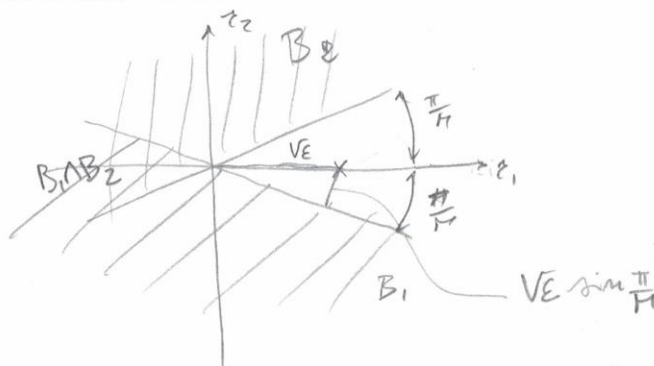
Notare come a parità di γ_b le prestazioni peggiorano al crescere della cardinalità M . Questo è evidente dal fatto che i segnali diventano più densamente localizzati nella circonferenza.

Le curve possono essere usate ad esempio fornendo una massima $P(e)$ e valutando l'energia per bit necessario per una certa cardinalità.

Si ricordi che l'energia di ogni simbolo può essere controllata sia dall'ampiezza A che dalla durata T .

Una valutazione approssimata della $P(e)$ può essere ottenuta notando che

PARTIERI-PSK8



$$P(e) < P_2 \{R \in B_1 | a_1\} + P_2 \{R \in B_2 | a_1\}$$

Il limite superiore sovrastima $P(e)$ poiché valuta l'integrale della $f_R(z/a_1)$ due volte nella regione $B_1 \cap B_2$. Si noti però che all'aumentare di VE le code di $f_R(z/a_1)$ sono sempre più piccole in $B_1 \cap B_2$ e diventano trascurabili.

Notiamo anche che $P(e) > P_2 \{R \in B_1 | a_1\}$. Poiché la $P_2 \{R \in B_1 | a_1\}$ (che è anche uguale a $P_2 \{R \in B_2 | a_1\}$) può essere valutata facilmente,



$$Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta_0}} \sin \frac{\pi}{H}\right) < P(e) < 2 Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta_0}} \sin \frac{\pi}{H}\right)$$

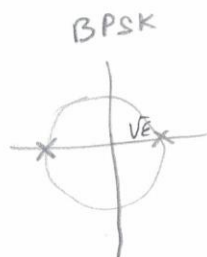
Con una riferimento per l'upper bound che diventa sempre più accurato per $\frac{E}{\eta_0}$ crescente.

Infatti, per le prestazioni del PSK si derivano direttamente come

$$P(e) \approx 2 Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta_0}} \sin \frac{\pi}{H}\right)$$

Per alcuni semplici costellazioni la probabilità di errore
 si valuta esattamente

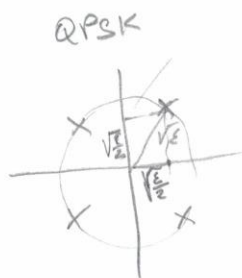
PALEMBRI-PSK



$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta_0}}\right)$$

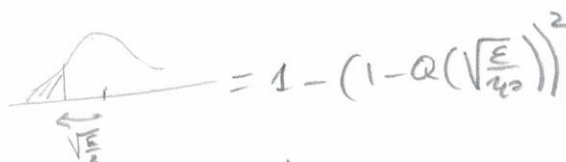


$$E = E_b$$



$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - P(c|a_1)$$

$$= 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{2} \frac{1}{\eta_0}}\right)\right)^2$$



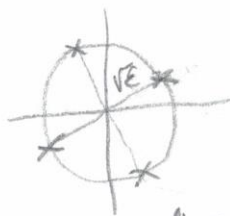
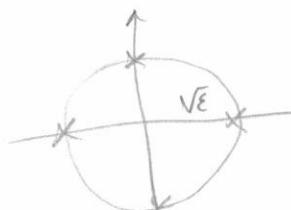
$$= 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta_0}}\right)\right)^2$$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta_0}}\right) \left(2 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta_0}}\right)\right)$$

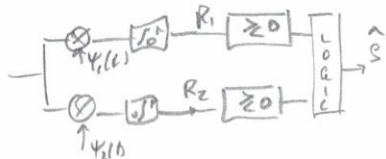
Qui $E_b = \frac{E}{\log_2 4} = \frac{E}{2}$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta_0}}\right) \left(2 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta_0}}\right)\right)$$

Le stesse prestazioni valgono ovviamente anche
 per la costellazione modulata



Si noti come il ricevitore MV per il QPSK sia molto semplice



R_1	R_2	$\hat{S}$
>0	>0	a_1
<0	>0	a_2
<0	<0	a_3
>0	<0	a_4

REALIZZAZIONE DELLA MODULAZIONE PSK PARTICOLARE PSK 10

Modulazione: è demodulata con per la PSK semplice
 semplice, ovverossia. Ricordiamo che il segnale
 inviato nel canale è costituito dalla sovrapposizione
 di segnali $s_j(t)$ offsetati nel tempo.

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT; s[k]) \quad \text{dove} \quad s(t; s[k]) = \begin{cases} s_1(t) & \text{se } s[k] = 0, \\ s_2(t) & \text{se } s[k] = 1, \\ \vdots & \vdots \\ s_n(t) & \text{se } s[k] = n \end{cases}$$

Nel nostro caso

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \cos \theta_{s[k]} p(t - kT) \cos 2\pi f_0(t - kT) - A \sin \theta_{s[k]} p(t - kT) \sin 2\pi f_0(t - kT)$$

Dove $\theta_{s[k]} = \theta_j$ se $s[k] = j$

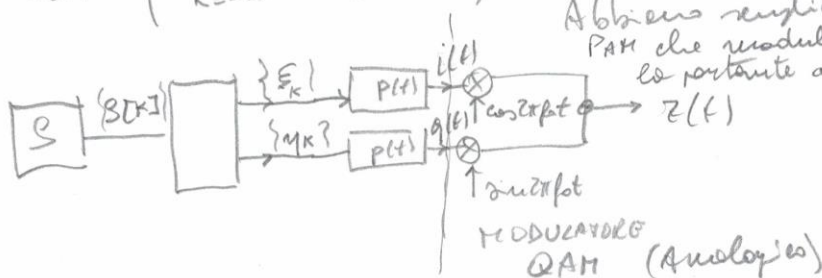
Perché $f_0 = \frac{M}{T}$ $\cos(2\pi \frac{M}{T} t - 2\pi \frac{M}{T} kT) = \cos 2\pi \frac{M}{T} t$
 $\sin(\dots) = \sin 2\pi \frac{M}{T} t$

$$\begin{cases} \cos 2\pi f_0(t - kT) = \cos 2\pi f_0 t \\ \sin 2\pi f_0(t - kT) = \sin 2\pi f_0 t \end{cases}$$

$$z(t) = A \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos \theta_{s[k]} p(t - kT)}_{\text{PAM}} \cos 2\pi f_0 t - A \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin \theta_{s[k]} p(t - kT)}_{\text{PAM}} \sin 2\pi f_0 t$$

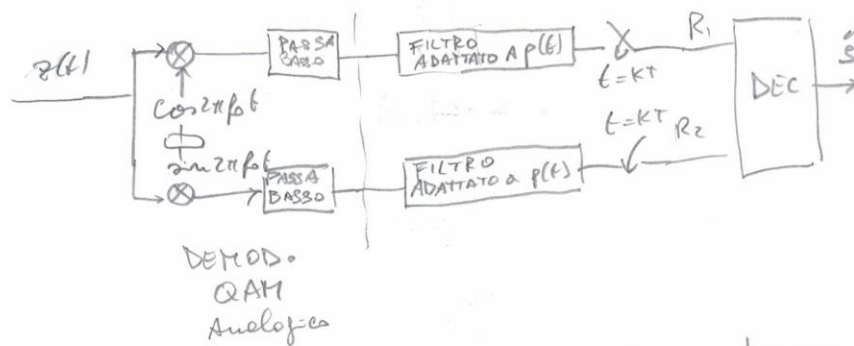
$$z(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k p(t - kT) \right) \cos 2\pi f_0 t + \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k p(t - kT) \right) \sin 2\pi f_0 t$$

Abbiamo semplicemente due
 PAM che modulano in quadratura
 la portante a frequenza f_0



MODULATORE

Anche il demodulatore può seguire la stessa realizzazione
PALMERI-PSK11



A seconda della frequenza f_0 , passa-basso e filtro adattato possono essere messi insieme in un unico filtro.

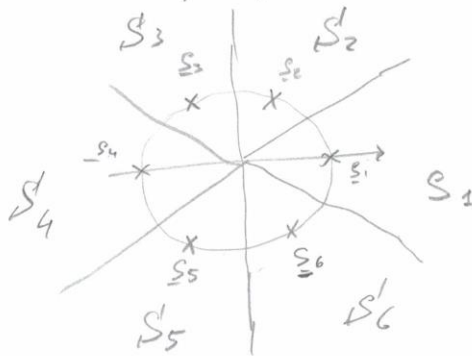
Si noti che le espressioni ξ_k e η_k che modulano i due PAM non sono indipendenti (in generale) e la decisione finale deve essere presa in maniera congiunta.

LA MATRICE DI CANALE

La valutazione completa delle prestazioni della modulazione PSK richiede che si calcoli anche tutta la matrice di canale

$$\underline{P}_c = \begin{bmatrix} P_r\{\hat{s}=a_1/s=a_1\} & \dots & P_r\{\hat{s}=a_M/s=a_1\} \\ P_r\{\hat{s}=a_1/s=a_2\} & \dots & P_r\{\hat{s}=a_M/s=a_2\} \\ \vdots & & \vdots \\ P_r\{\hat{s}=a_1/s=a_M\} & \dots & P_r\{\hat{s}=a_M/s=a_M\} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che per la valutazione di $P(e)$ abbiamo solo calcolato gli elementi della diagonale principale (tutti uguali). Il calcolo delle altre probabilità segue uno schema analogo. Ad esempio per $M=6$



Per la prima riga:

$$\begin{array}{cccccc} P_r\{\hat{s}=a_1/s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_2/s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_3/s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_4/s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_5/s=a_1\} & P_r\{\hat{s}=a_6/s=a_1\} \\ \int_{s_1} f_R(z|a_1) dz & \int_{s_2} f_R(z|a_1) dz & \int_{s_3} f_R(z|a_1) dz & \int_{s_4} f_R(z|a_1) dz & \int_{s_5} f_R(z|a_1) dz & \int_{s_6} f_R(z|a_1) dz \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array}$$

gli integrali vanno valutati numericamente come in (*)
Notiamo però che per la simmetria della costellazione,

$P_2 = P_6$ & $P_3 = P_5$. Inoltre le altre righe di $\underline{P}_c$ sono permutazioni circolari della prima

$$P_c = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ p_6 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ p_5 & p_6 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_4 & p_5 & p_6 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_1 \end{bmatrix}$$

In generale la matrice di correlazione è

$$P_c = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & \dots & \dots & p_m \\ p_m & p_1 & \dots & \dots & \dots & p_{m-1} \\ p_{m-1} & p_m & p_1 & \dots & \dots & p_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_2 & p_3 & \dots & \dots & p_m & p_1 \end{bmatrix}$$

Il canale è un canale uniforme