

PALMIERI_QAM Ø

MODULAZIONE QAM SU
CANALE AWGN

Lezione del corso di

TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA
DEI SEGNALI / COMUNICAZIONI ELETTRICHE
(SUN)

AA. 2016-17

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

MODULAZIONE QAM DISCRETA

PATCHIORSI_QAM 1

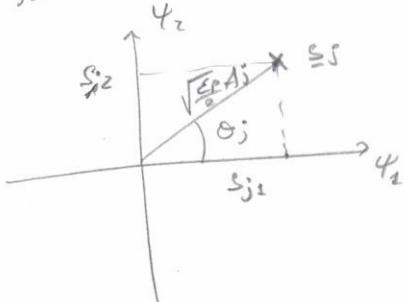
La matematica generalizzata delle modulazioni PSK e delle modulazioni PAM, è una modulazione che prevede la modifica di entrambi ampiezza e fase con i segnali

$$S_j(t) = A_j p(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_j) \quad t \in [0, T] ; f_0 = \frac{k}{T}$$

$$\{ (A_j, \theta_j) , j = 1, \dots, M \}$$

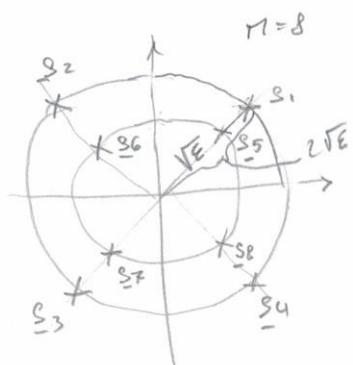
E' evidente che come nella modulazione PSK anche qui sono sufficienti due basi $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ con $S_j(t)$ esprimibile come

$$S_j(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{E_p}{2}} A_j \cos \theta_j}_{S_{j1}} \underbrace{\frac{\sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \cos 2\pi f_0 t}{\psi_1(t)}}_{\psi_1(t)} + \underbrace{\sqrt{\frac{E_p}{2}} A_j \sin \theta_j}_{S_{j2}} \underbrace{\frac{-\sqrt{\frac{2}{E_p}} p(t) \sin 2\pi f_0 t}{\psi_2(t)}}_{\psi_2(t)}$$

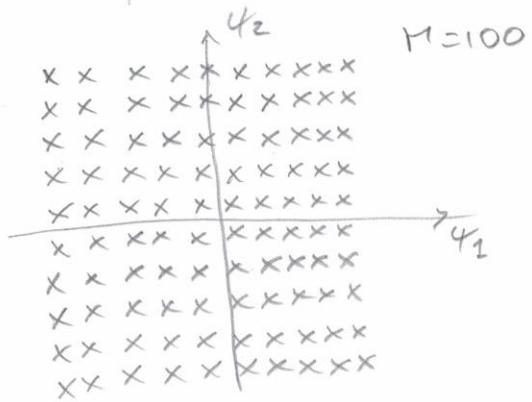
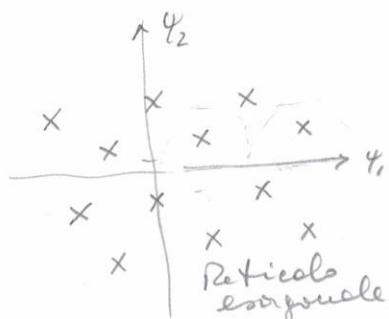
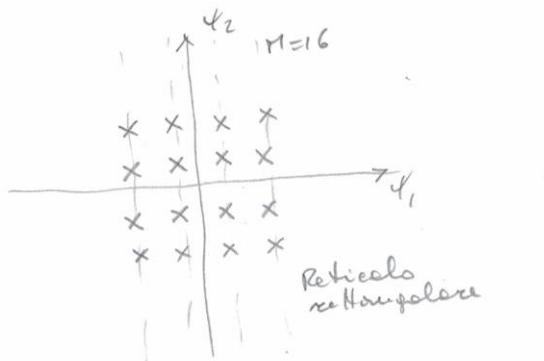
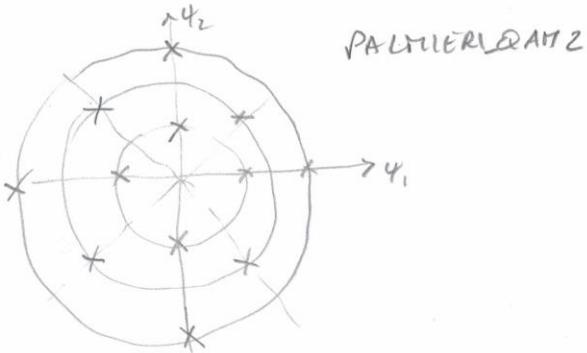
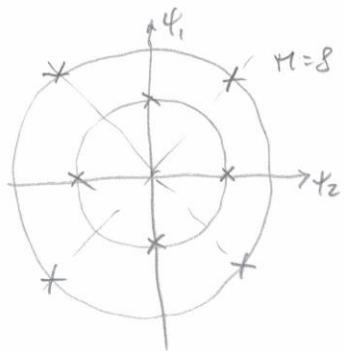


Le (1) regole possono essere piazzate nel piano
in varie configurazioni (costellazioni). Ad esempio

in coordinate polari in coordinate cartesiane



- | |
|--|
| $(A_1, \theta_1) = (2\sqrt{E}, \pi/4) = S_1 = (2\sqrt{E} \cos \frac{\pi}{4}, 2\sqrt{E} \sin \frac{\pi}{4})$ |
| $(A_2, \theta_2) = (2\sqrt{E}, \frac{3}{4}\pi) = S_2 = (2\sqrt{E} \cos \frac{3}{4}\pi, 2\sqrt{E} \sin \frac{3}{4}\pi)$ |
| $(A_3, \theta_3) = (2\sqrt{E}, \frac{5}{4}\pi) = S_3 = (2\sqrt{E} \cos \frac{5}{4}\pi, 2\sqrt{E} \sin \frac{5}{4}\pi)$ |
| $(A_4, \theta_4) = (2\sqrt{E}, \frac{7}{4}\pi) = S_4 = (2\sqrt{E} \cos \frac{7}{4}\pi, 2\sqrt{E} \sin \frac{7}{4}\pi)$ |
| $(A_5, \theta_5) = (\sqrt{E}, \pi/4) = S_5 = (\sqrt{E} \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{E} \sin \frac{\pi}{4})$ |
| $(A_6, \theta_6) = (\sqrt{E}, \frac{3}{4}\pi) = S_6 = (\sqrt{E} \cos \frac{3}{4}\pi, \sqrt{E} \sin \frac{3}{4}\pi)$ |
| $(A_7, \theta_7) = (\sqrt{E}, \frac{5}{4}\pi) = S_7 = (\sqrt{E} \cos \frac{5}{4}\pi, \sqrt{E} \sin \frac{5}{4}\pi)$ |
| $(A_8, \theta_8) = (\sqrt{E}, \frac{7}{4}\pi) = S_8 = (\sqrt{E} \cos \frac{7}{4}\pi, \sqrt{E} \sin \frac{7}{4}\pi)$ |



Lo stesso spazio può essere utilizzato per costellazioni con M elevato e quindi frequenze di cifra elevate.

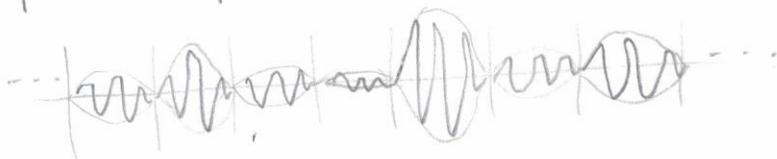
$$B_2 = \frac{\log_2 M}{T}$$

elevate.

Si può avvicinare o usare costellazioni con $M = 2^{10} = 1024$.

Evidentemente l'invecchiamento di molti segnali comporta che bisogna usare energie elevate per contenere la probabilità di errore.

Si noti che il segnale modulato occuperà estremamente le bande indipendentemente dalle cardinalità delle costellazioni. Si parla per sempre di una simmetria e frequenza fu modulata in ampiezza e fase.



In coordinate cartesiane i segnali sono PALMIERI - AM3

$$\underline{s}_j = \left(s_{j1}, s_{j2} \right) = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_p}{2}} A_j \cos \theta_j, \sqrt{\frac{\epsilon_p}{2}} A_j \sin \theta_j \right) \quad j=1, \dots, M$$

$$s_j(t) = s_{j1} \Psi_1(t) + s_{j2} \Psi_2(t)$$

L'energia per ogni segnale è

$$\begin{aligned} E_j &= \int_0^T s_j(t)^2 dt = s_{j1}^2 + s_{j2}^2 = \frac{\epsilon_p}{2} A_j^2 \cos^2 \theta_j + \frac{\epsilon_p}{2} A_j^2 \sin^2 \theta_j \\ &= \frac{\epsilon_p}{2} A_j^2 \end{aligned}$$

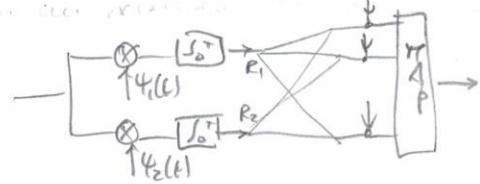
In coordinate polari i segnali sono

$$\underline{s}_j = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_p}{2}} A_j, \theta_j \right) \quad j=1, \dots, M$$

Il ricevitore MAP segue lo stesso schema della PSK, ma

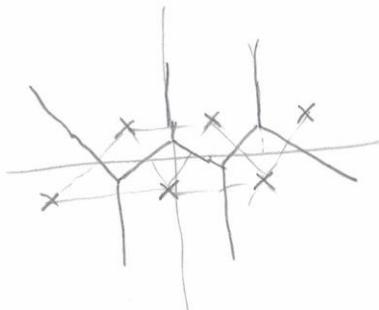
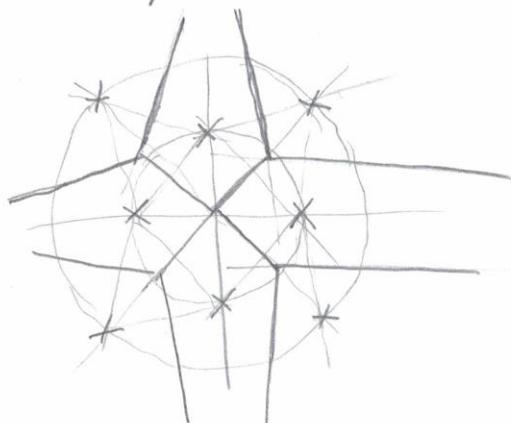
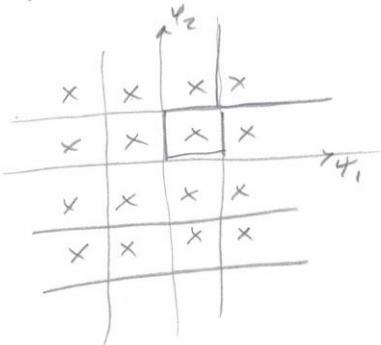
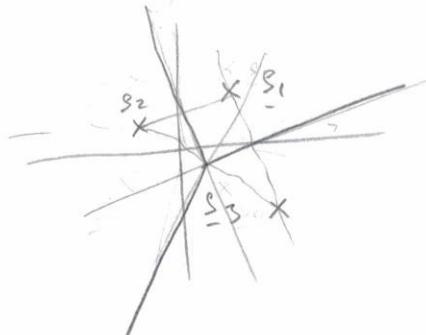
con un algoritmo di decodifica diverso.

PARTNERI-AM4

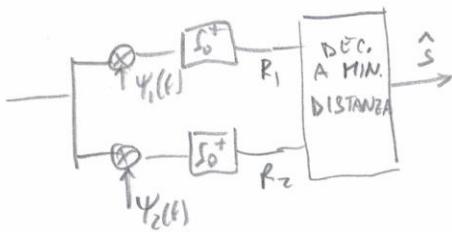


Ciononostante si considera solo il ricevitore MV
con regimi di decodifica delimitati da rette approssimate
da regole di regoli (tessellazione di Voronoi)
regime a minima distanza

Alcuni esempi:

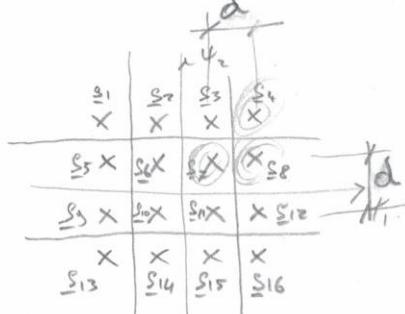


Ricevitore MV



Analizziamo ora le portogeneri del ricevitore MV
per una costellazione quadrata con $M = 4 \times 4$.

PALMIERI - AM5



$$\begin{cases} X_l = -\frac{\pi}{2}d + ld, l = 1, 2, 3, 4 \\ Y_m = -\frac{\pi}{2}d + md, m = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$j = 4(l-1) + m$$

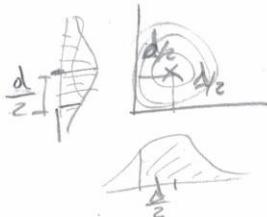
Al solito il canale AWGN correrà una dispersione sférica gaussiana attorno ai segnali. I segnali avranno non solo esponenti e le probabilità di corrette decodifiche saranno diverse a seconda che i segnali siano interni o sui bordi della costellazione.

$$P(e) = 1 - P(0) = 1 - \sum_{j=1}^{16} P(c|a_j) \pi_j = 1 - \sum_{j=1}^{16} \int_{S'_j} f_R(z|a_j) dz \approx \pi_j$$

Gli integrali raccolgono gli stessi per tutti i segnali:

S_1, S_4, S_{13}, S_{16}

$$\int_{S_1} f_R(z|a_1) dz = \left(1 - Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{M_0/2}}\right)\right)^2$$



$S_2, S_3, S_5, S_8, S_9, S_{12}, S_{14}, S_{15}$

$$\int_{S_2} f_R(z|a_2) dz = \left(1 - 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{M_0/2}}\right)\right) \left(1 - Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{M_0/2}}\right)\right)^2$$



S_6, S_7, S_{10}, S_{11}

$$\int_{S_6} f_R(z|a_6) dz = \left(1 - 2Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{M_0/2}}\right)\right)^2$$



$$Q(\cdot) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}y_0}\right)$$

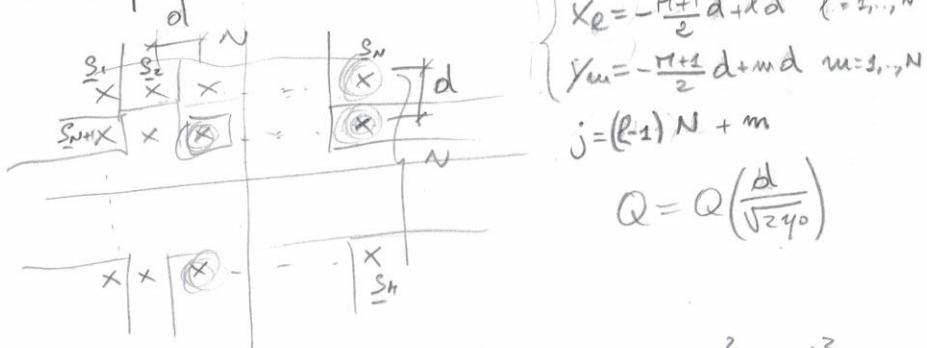
PALMIERI - DAMS

$$P(e) = 1 - (1-Q(\cdot))(\pi_1 + \pi_4 + \pi_{13} + \pi_{16}) - (1-2Q(\cdot))(1-Q(\cdot))(\pi_2 + \pi_3 + \pi_5 + \pi_8 + \pi_9 + \pi_{12} + \pi_{14} + \pi_{15}) - (1-2Q(\cdot))^2(\pi_6 + \pi_7 + \pi_{10} + \pi_{11})$$

Se i simboli non sono equiprobabili ($\pi_j = \frac{1}{M}$)

$$P(e) = 1 - (1-Q(\cdot))\frac{1}{4} - (1-2Q(\cdot))(1-Q(\cdot))\frac{1}{2} - (1-2Q(\cdot))^2\frac{1}{4}$$

In generale per una constellazione $M = N \times N$



$$P(e) = 1 - (1-Q)\frac{4}{N^2} - (1-2Q)(1-Q)\frac{(N-2)4}{N^2} - (1-2Q)^2\frac{(N-2)^2}{N^2}$$

Si noti che il ricevitore MV per una constellazione quadrata è piuttosto semplice



Infatti si tratta di una modulazione con due PAM in quadratura

$$\underline{s}_j(t) = \underbrace{s_{j1}\psi_1(t)}_{\text{PAM1}} + \underbrace{s_{j2}\psi_2(t)}_{\text{PAM2}}$$

Per il calcolo dell'energia media osserviamo che

$$E_j = \int_0^T s_j^2(t) dt = s_{j1}^2 + s_{j2}^2 \text{ e quindi}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{PAM}2} + \bar{E}_{\text{PAM}2}$$

Usando: minima del PAM, abbiamo

$$\bar{E}_{\text{PAM}2} = \frac{d^2(N^2-1)}{12} = \bar{E}_{\text{PAM}2}$$

$$\bar{E} = \frac{d^2(N^2-1)}{6}$$

$$\bar{E}_b = \frac{\bar{E}}{\log_{2} N^2} = \frac{d^2(N^2-1)}{12 \log_2 N}$$

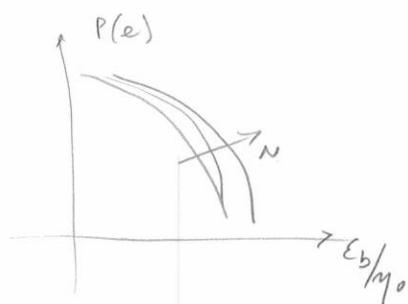
Ricavando d^2 e sostituendo nelle $Q(\cdot)$ delle rettangoli
abbiamo:

$$d^2 = \frac{12 \log_2 N}{(N^2-1)} \bar{E}_b$$

$$Q = Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 N}{N^2-1} \frac{\bar{E}_b}{\eta_0}}\right)$$

Sipensi tracciare le curve delle $P(e)$ in funzione

di $\frac{\bar{E}_b}{\eta_0}$.



La struttura delle catellegrene può essere studiata più in dettaglio per minimizzare le prob. di errore a partire da un'era media (CONSTELLATION DESIGN).
 Reticoli più compatti, come il reticolo esagonale, sono spesso utilizzati nelle applicazioni che esigono di mantenere comunque una certa simmetria nella realizzazione del dispositivo. Si consiglia agli studenti di guardare alle bibliografie specifiche e agli standard più comuni.

Per quanto riguarda la matrice di coude, il calcolo è un po' tedioso (anche se può essere semplificato nel metodo). In genere per la matrice di coude non siamo soltanto che gli errori febbili ma sia più simbolici simboli sovraccaricati. Dopotutto una catellazione corrente ha senso se il ruore è obiettivamente contenuto rispetto alla curvatura dei segnali (scalo delle catellegrene). Anzi ormai che un errore è distanza di due simboli oltre probabilità nulla appare decisamente ragionevole. Questo risulta in una matrice di coude spesso

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|cc|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & X & X & X & X \\ 2 & X & X & X & X \\ 3 & X & X & X & X \\ 4 & X & X & X & X \\ \hline 5 & X & X & X & X \\ 6 & X & X & X & X \\ 7 & X & X & X & X \\ \hline 8 & X & X & X & X \\ 9 & X & X & X & X \\ 10 & X & X & X & X \\ 11 & X & X & X & X \\ \hline 12 & X & X & X & X \\ 13 & X & X & X & X \\ 14 & X & X & X & X \\ \hline 15 & X & X & X & X \\ 16 & X & X & X & X \\ \hline 17 & X & X & X & X \\ 18 & X & X & X & X \\ 19 & X & X & X & X \\ \hline 20 & X & X & X & X \\ \hline \end{array} \\
 \Rightarrow P_E = \left[\begin{array}{cccc} X & X & X & X \\ X & X & X & X \end{array} \right]_{20} \\
 \text{sparsa matrice}
 \end{array}$$