

PALMIERI-SOΦ

MODULAZIONE ORTOGONALE
SU CANALE AWGN

leggi del corso di

TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA
DEI SEGNALI / COMUNICAZIONI ELETTRICHE

(SUN)

A.A. 2016-17

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

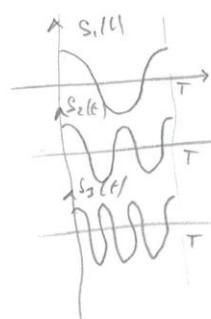
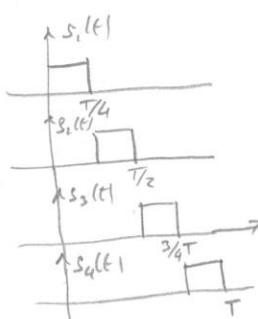
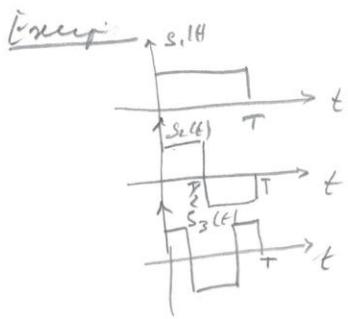
SEGNALAZIONE ORTOGONALE

PALCHERI - SO1

Un caso interessante di rappresentazione numerica è quando i segnali sono già ortogonali, ovvero

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\} \rightarrow \{s_i(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$$

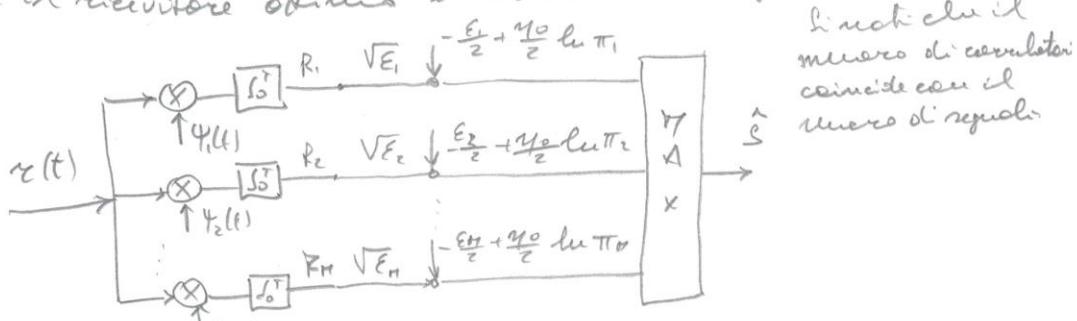
$$s_i(t) + s_j(t) \quad \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0 \quad \forall i \neq j$$



La base di rappresentazione è ovviamente collineare ai segnali con $N=M$:

$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} ; \psi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}} ; \dots ; \psi_M(t) = \frac{s_M(t)}{\sqrt{E_M}}$$

il ricevitore ottima i dati senza generale.



L'unico che il numero di correlatori coincide con il numero di segnali

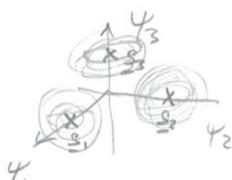
$$R_j | a_i = \int_0^T (s_i(t) + n(t)) \psi_j(t) dt = \int_0^T s_i(t) \psi_j(t) dt + \int_0^T n(t) \psi_j(t) dt$$

$$s_{ij} = \sqrt{E_i} \quad N_j$$

$$j, i = 1, \dots, M$$

$$s_i = (0, 0, \dots, \sqrt{E_i}, 0, \dots, 0)$$

i coordinate cartesiane.



$$\underline{R}/\alpha_1 = (\sqrt{\epsilon_1} + N_1, N_2, \dots, N_n)$$

PALMIERI-802

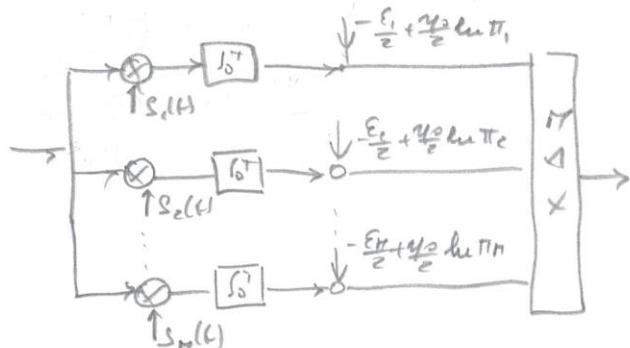
$$\underline{R}/\alpha_2 = (N_1, \sqrt{\epsilon_2} + N_2, \dots, N_n)$$

$$\underline{R}/\alpha_M = (N_1, N_2, \dots, \sqrt{\epsilon_M} + N_n)$$

La dispersione ottima ad ogni segnale è uguale e descritta dalla pdf governante

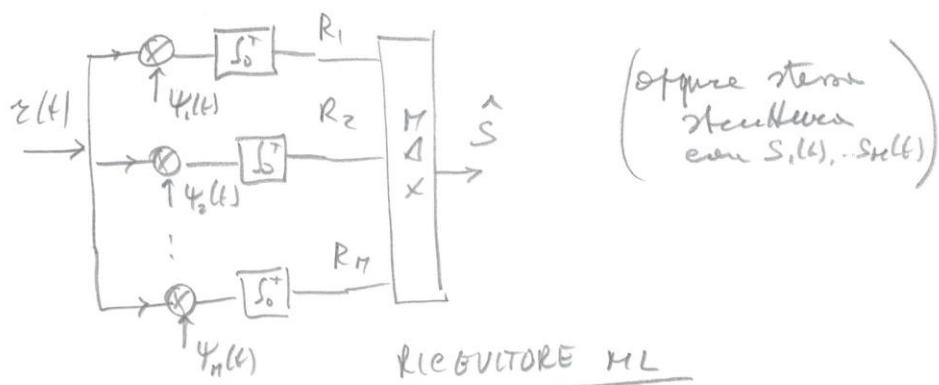
$$f_R(\underline{z}/\alpha_i) = N\left(\underline{z}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\epsilon_i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\gamma_0}{2} I_M\right)$$

Si noti che le strutture (a) (quelle con le bari) e le strutture (b) (quelle con i segnali) sono sostanzialmente le stesse



Se i segnali sono anche equivalenziali:

$\epsilon_i = \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, M$, la struttura del ricevitore ML è semplicemente

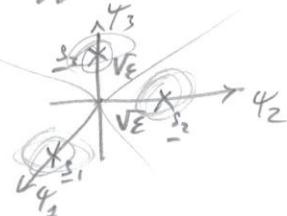


L'interpretazione è anche molto intuitiva: scegli
il segnale che si corrisponde al massimo con il
segnale ricevuto:

PAMIERI-803

$$\hat{s} = \arg \max_{\{a_1, \dots, a_M\}} (R_1, R_2, \dots, R_M)$$

Analoghia: le regole per $M=3$ per poi generalizzare.



le regole di decisione sono difficili
da visualizzare perché rappresentano
le probabilità di regioni definite da dei piani
 $r_1=r_2$ $r_2=r_3$ $r_1=r_3$

$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - \sum_{i=1}^3 p(e|a_i) \pi_i = 1 - \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} f_R(r|a_i) dr \pi_i$$

S_i = regione di \mathbb{R}^3 in cui $r_1 > r_2, r_1 > r_3$

Per simmetria le 3 regioni sono equivalenti e
scegli

$$\begin{aligned} P(e) &= 1 - \int_{S_1} f_R(r|a_1) dr = \sum_{i=1}^3 \pi_i \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{r_1} \int_{-\infty}^{r_1} N(r; \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\gamma_0}{2} I_3) dr \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{r_1} \int_{-\infty}^{r_1} \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{(r_1 - \sqrt{\gamma_1})^2}{\gamma_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{r_2^2}{\gamma_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{r_3^2}{\gamma_0}} dr_3 dr_2 dr_1 \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{(r_1 - \sqrt{\gamma_1})^2}{\gamma_0}} \left(\int_{-\infty}^{r_1} \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{r_2^2}{\gamma_0}} dr_2 \right) \left(\int_{-\infty}^{r_1} \frac{1}{\sqrt{\pi \gamma_0}} e^{-\frac{r_3^2}{\gamma_0}} dr_3 \right) dr_1 \\ &\quad 1 - Q\left(\frac{r_1 - \sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_0/2}}\right) \quad 1 - Q\left(\frac{r_1}{\sqrt{\gamma_0/2}}\right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{(z-\sqrt{E})^2}{\gamma_0}} \left(1 - Q\left(\frac{z_1}{\sqrt{\gamma_0} z}\right)\right)^2 dz,$$

PARLATORI-S04

Il caso per M parole è immediato

$$P(e) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{(z-\sqrt{E})^2}{\gamma_0}} \left(1 - Q\left(\frac{z}{\sqrt{\gamma_0} z}\right)\right)^{M-1} dz$$

L'integrale viene calcolato per via numerica.

$$\text{L'energia per bit è } E_b = \frac{E}{\log_2 M}$$

Curve logiche di $P(e)$ in funzione di $\frac{E_b}{N_0}$ sono riportate in figura.

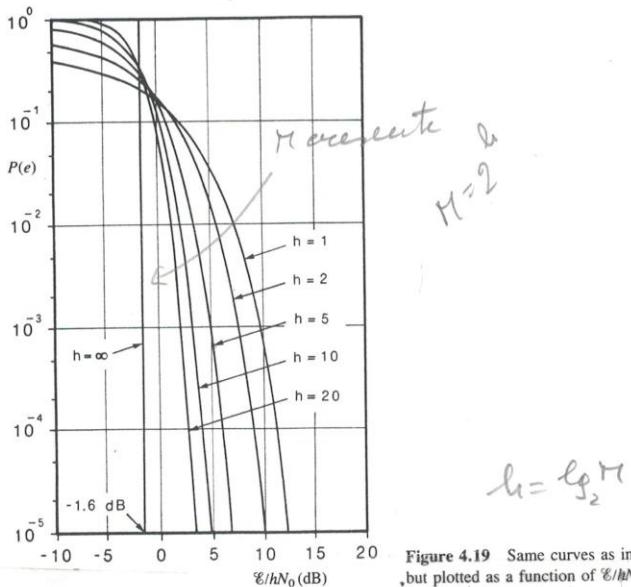


Figure 4.19 Same curves as in Fig. 4.1, but plotted as a function of E/hN_0 .

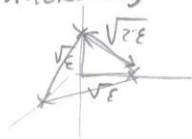
S'noti che per M crescente o per bit di E_b/N_0 le prestazioni migliorano. Questo può apparire come una contraddizione se paragonato alle prestazioni del PAM o del QAM.

In effetti ogni volta che si incrementa M si aggiunge una nuova base e tutti i segnali restano allo

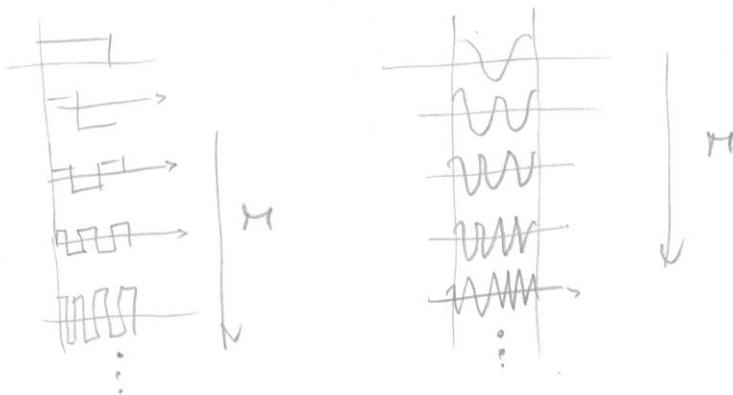
stesse distanze da tutti gli altri!!

la distanza fra \vec{s}_i e \vec{s}_j è sempre $\sqrt{2\epsilon}$!!

Visti a qualche dimensione!



la minima di cui si attinge per ottenere rettangoli
crescenti al crescere di M è la brevetta necessaria
a trasmettere tutti i segnali.



Abbiamo dimostrato altrove che in generale per una sequenza unimoda

$$P(e) \leq (M-1) Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2}\gamma_0}\right)$$



dove d_{\min} è la minima distanza fra i segnali delle costellazioni. Applicando l'upper bound alle sequenze ortogonali abbiamo facilmente

$$P(e) \leq (M-1) Q\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma_0}}\right) = \underbrace{(M-1)}_{\text{crece}} Q\left(\sqrt{\frac{E_b N_0 T}{\gamma_0}}\right) \underbrace{\text{decrese}}_{\substack{\text{al crescere} \\ \text{di } M}} \rightarrow \text{per i veloci}$$

LA MATRICE DI CANALE

PARTE I - SO 6

La struttura delle matrici per segnali ortogonali e energie dei canali conferisce alla matrice di canali le caratteristiche di canali uniformi.

Tutti i segnali hanno la stessa composizione rispetto agli altri,

$P(c) = P_a \{ \hat{s} = a_i | s = a_i \}$ è la stessa per tutti e anche le probabilità di tutti gli errori sono le stesse. Pertanto

$$P_c = \begin{bmatrix} P(c) & \frac{1-P(c)}{M-1} & \dots & \frac{1-P(c)}{M-1} \\ \frac{1-P(c)}{M-1} & P(c) & \dots & \frac{1-P(c)}{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-P(c)}{M-1} & \frac{1-P(c)}{M-1} & \dots & P(c) \end{bmatrix}$$

ess

$$P(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \eta_0}} e^{-\frac{(x-\sqrt{\epsilon})^2}{2\eta_0}} \left(1 - Q\left(\frac{x}{\sqrt{\eta_0/\epsilon}}\right)\right)^{M-1} dx$$

MODULAZIONE FSK (FREQUENCY-SHIFT KEYING)

ORTOGONALE

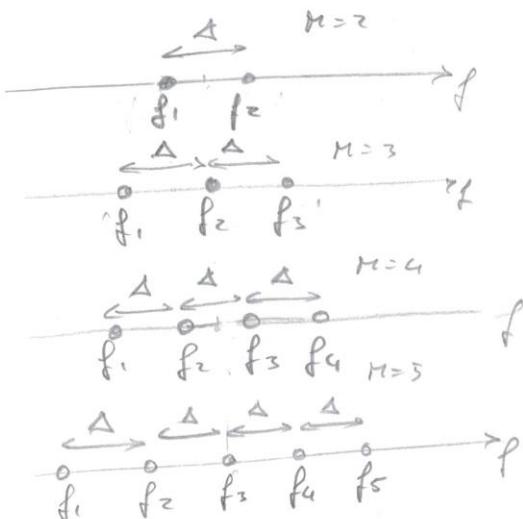
Uno dei casi più tipici di modulazione ortogonale è la FSK ortogonale in cui i segnali sono segmenti di sinusoidi a frequenze diverse. In particolare

$$\mathcal{R} = \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \left\{ s_i(t) = A p(t) \cos(2\pi f_i t) \right|_{i=1, \dots, M}$$

con frequenze esponenti proporzionali di Δ Hertz.

$$f_i = f_1 + (i-1)\Delta \quad i=1, \dots, M$$

Asonico $p(t)$ costante
(segnale rettangolare)



La scelta delle frequenze è cruciale per garantire l'ortogonalità, esigenza questa di coerenza. Vediamo subito

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) s_j(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) s_j(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A p(t) \cos(2\pi f_i t) A p(t) \cos(2\pi f_j t) dt =$$

Per le energie abbiamo

$$\begin{aligned}
 E_i &= \int_0^T S_i(t) dt = \int_0^T A^2 \cos^2 2\pi f_i t dt = \frac{A^2}{2} \int_0^T dt + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos 4\pi f_i t dt \\
 &= \frac{A^2}{2} T + \frac{A^2}{2} \left[\frac{\sin 4\pi f_i t}{4\pi f_i} \right]_0^T = \frac{A^2}{2} T + \frac{A^2}{2} \frac{\sin 4\pi f_i T}{4\pi f_i} \\
 &\quad \xrightarrow{=0 \text{ se}} \\
 &\quad \frac{4\pi f_i T = K\pi}{f_i = \frac{K}{4T}} \quad \begin{array}{l} \text{condizione di} \\ \text{economia di} \end{array} \\
 &\quad \text{energia elettrica}
 \end{aligned}$$

Per l'ortogonalità

$$\begin{aligned}
 \int_0^T S_i(t) S_j(t) dt &= \int_0^T A^2 \cos 2\pi f_i t \cos 2\pi f_j t dt = \\
 &= \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos 2\pi(f_i - f_j)t dt + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos 2\pi(f_i + f_j)t dt \\
 &= \frac{A^2}{2} \frac{\sin 2\pi(f_i - f_j)T}{2\pi(f_i - f_j)} + \frac{A^2}{2} \frac{\sin 2\pi(f_i + f_j)T}{2\pi(f_i + f_j)} \\
 &\quad \xrightarrow{=0 \text{ se}} \\
 &\quad \boxed{f_i - f_j = \frac{K}{2T}} \quad \boxed{f_i + f_j = \frac{K}{2T}} \\
 &\quad \text{condizioni per l'ortogonalità}
 \end{aligned}$$

Se vogliamo anche impostare continuità per il segnale modulato, ovvero che esso non presenti salti di discontinuità per un intervallo di misura e spelli sovraeletti,

$$\begin{aligned}
 &\text{bisogna imporre che i periodi delle n misurazioni siano un} \\
 &\text{multifrequenza di } T \text{ ovvero che} \\
 &\boxed{f_i = \frac{K}{T}} \quad i = 1, \dots, M \\
 &\quad \text{condizione di continuità}
 \end{aligned}$$

Più esplicitamente usando la operazione uniforme Δ :

$$f_i - f_j = f_i + (i-1)\Delta - f_i - (j-1)\Delta = (i-j)\Delta = \frac{K}{2T} \quad \text{operazione minima } \Delta = \frac{1}{2T}$$

$$f_i + f_j = f_i + (i-1)\Delta + f_i + (j-1)\Delta = 2f_i + (i+j-2)\Delta = \frac{K}{2T}$$

EQUILIBRIO	ORTOGONALITÀ	CONTINUITÀ
(e)	(O1) $(i-j)\Delta = \frac{K}{2T}$	(C) $f_i + (i-1)\Delta = \frac{K}{T}$
$f_1 + (i-1)\Delta = \frac{K}{4T}$	$? f_i + (i+j-2)\Delta = \frac{K}{2T}$ (O2)	
$\forall i$	$\forall i, j$	

Si noti che spesso le frequenze sono elevate

$f_1, f_2, \dots, f_M \gg 0$ negli soluzioni degli integrali
i denominatori dimensioni e pertanto la condizione di equilibrio è praticamente sempre rispettata e la condizione di ortogonalità richiede solo che le operazioni siano multipli di $\frac{1}{2T}$.

Anche la condizione di continuità può essere garantita in quanto le discontinuità si presentano di rado rispetto alle oscillazioni del segnale

Ad esempio se $\Delta = \frac{1}{2T}$ (operazione minima)

$$(e) f_1 + (i-1)\frac{1}{2T} = \frac{K}{4T} \Rightarrow \frac{4Tf_1 + 2(i-1)}{4T} = \frac{K}{4T} \Rightarrow 4Tf_1 + \underset{\substack{\text{interv} \\ \text{frequ}}}{\cancel{2i-2}} = \underset{\substack{\text{interv} \\ \text{frequ}}}{\cancel{K}} \quad | \quad \text{interv} f_i$$

$$4Tf_1 = \text{interv} \Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{K}{4T}}$$

$$(O2) ? f_i + (i+j-2)\frac{1}{2T} = \frac{K}{2T} \Rightarrow \frac{4Tf_1 + \cancel{(i+j-2)}}{2T} = \frac{K}{2T} \quad | \quad \text{interv} f_{i,j}$$

$$4Tf_1 = \text{interv} \Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{K}{4T}}$$

$$(C) f_1 + (i-1)\frac{1}{2T} = \frac{K}{T} \Rightarrow -Tf_1 + \frac{(i-1)}{2} = K \Rightarrow Tf_1 + \frac{i-1}{2} = \text{interv}$$

impossibile per ogni
valore di i

La continuità non è possibile
rendere forse era necessaria per
operazione minima!!

Si invece sostituiamo una operazione $\Delta = \frac{1}{T}$ PALMIERI - 3010

$$(e) f_1 + (i-1)\frac{1}{T} = \frac{k}{4T} \Rightarrow \frac{4Tf_1 - 4(i-1)}{4T} = \frac{k}{4T}$$

$$4Tf_1 - 4i + 4 = \text{intero} \\ 4Tf_1 = \text{intero} \xrightarrow{\text{intero}} \boxed{f_1 = \frac{k}{4T}}$$

$$(02) 2f_1 + (i+j-2)\frac{1}{T} = \frac{k}{2T} \Rightarrow \frac{4Tf_1 + 2i + 2j - 4}{2T} = \frac{k}{2T}$$

$$4Tf_1 = \text{intero} \\ \boxed{f_1 = \frac{k}{4T}}$$

$$(c) f_1 + (i-1)\frac{1}{T} = \frac{k}{T} \Rightarrow Tf_1 + \underbrace{i-1}_{\text{intero} \neq i} = k \Rightarrow Tf_1 = \text{intero} \\ \boxed{f_1 = \frac{k}{T}}$$

$$\boxed{f_1 = \frac{k}{T}} \text{ solo per tutte le cedizioni}$$

Ovviamente in questo caso la banda occupata dal segnale sarà maggiore (lo studio dettagliato del comportamento spettrale dei segnali della modulazione numerica non riportato altrove).

Nelle applicazioni specifiche si vuole comunque con spettroscopia numerica, e adatto la modulazione CPM (Continuous - Phase Modulation) in cui i simboli vengono generati in numero dipendente, e quindi con memoria, facendo in modo che la fase tra un intervallo e il successivo resti continua.

Questo schema però non rientra nelle nostre discussioni sulla modulazione senza memoria e non presenta altrove.

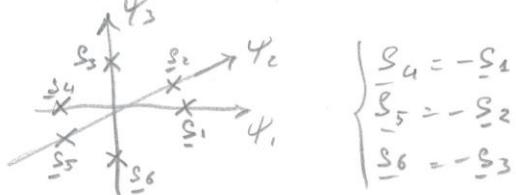
MODULAZIONE BI-ORTOGONALE

Una semplice estensione delle rappresentazioni ortogonali
consiste nel considerare i segnali ortogonali insieme
ai loro antipodali. Quindi, dato $\frac{M}{2}$ segnali (M pari)
ortogonali, l'insieme dei segnali è:

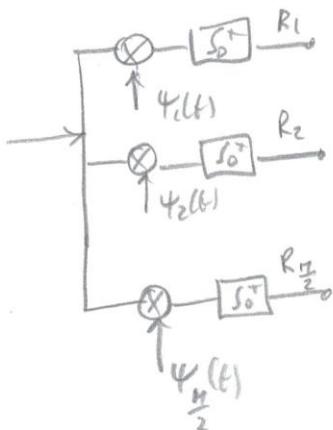
$$\left\{ s_1(t), s_2(t), \dots, s_{\frac{M}{2}}(t), -s_1(t), -s_2(t), \dots, -s_{\frac{M}{2}}(t) \right\}$$

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, \frac{M}{2}.$$

Ovviamente la base di rappresentazione
ufficiente per tutti i segnali è quella formata
dagli $\frac{M}{2}$ segnali ortogonali. Sono però
segnalati da i segnali siano esigenze con le quali
Per $M=6$ la costellazione è:



Il primo studio del ricevitore ottiene una $\frac{M}{2}$
correlatori con $\Psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E}}, \dots, \Psi_{\frac{M}{2}}(t) = \frac{s_{\frac{M}{2}}(t)}{\sqrt{E}}$



All'interno dei correlatori abbisces

PALMIERI, 2012

$$R/\alpha_1 = (\sqrt{E} + N_1, N_2, \dots, N_{\frac{n}{2}}) \propto \frac{1}{(\pi \gamma_0)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{(x_1 - \sqrt{E})^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{x_2^2}{\gamma_0}} \dots e^{-\frac{x_{\frac{n}{2}}^2}{\gamma_0}}$$

$$R/\alpha_2 = (N_1, \sqrt{E} + N_2, \dots, N_{\frac{n}{2}}) \propto \frac{1}{(\pi \gamma_0)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{x_1^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{(x_2 - \sqrt{E})^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{x_3^2}{\gamma_0}} \dots e^{-\frac{x_{\frac{n}{2}}^2}{\gamma_0}}$$

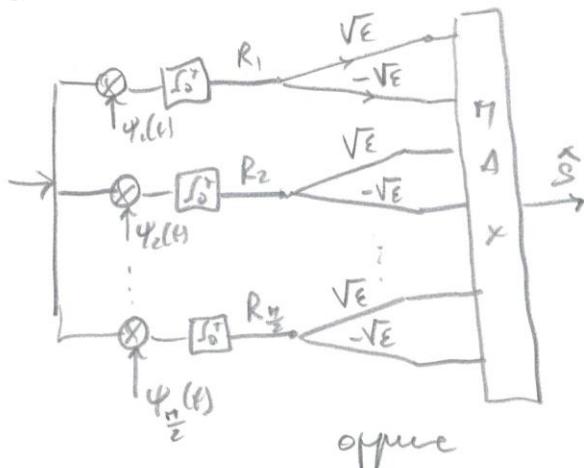
$$R/\alpha_{\frac{n}{2}} = (N_1, N_2, \dots, \sqrt{E} + N_{\frac{n}{2}}) \propto \frac{1}{(\pi \gamma_0)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{x_1^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{x_2^2}{\gamma_0}} \dots e^{-\frac{(x_{\frac{n}{2}} - \sqrt{E})^2}{\gamma_0}}$$

$$R/\alpha_{\frac{n}{2}+1} = (-\sqrt{E} + N_1, N_2, \dots, N_{\frac{n}{2}}) \propto \frac{1}{(\pi \gamma_0)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{(x_1 + \sqrt{E})^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{x_2^2}{\gamma_0}} \dots e^{-\frac{x_{\frac{n}{2}}^2}{\gamma_0}}$$

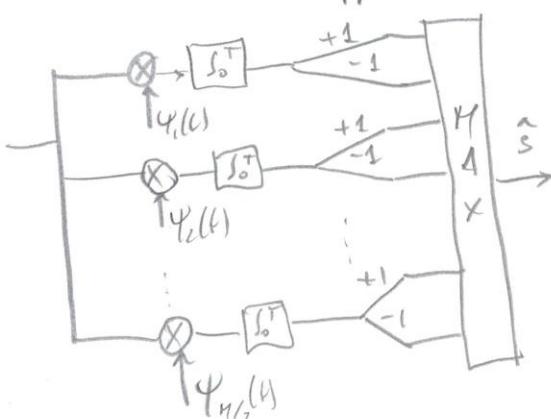
$$R/\alpha_{\frac{n}{2}+2} = (N_1, -\sqrt{E} + N_2, \dots, N_{\frac{n}{2}}) \propto \frac{1}{(\pi \gamma_0)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{x_1^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{(x_2 + \sqrt{E})^2}{\gamma_0}} \dots e^{-\frac{x_{\frac{n}{2}}^2}{\gamma_0}}$$

$$R/\alpha_n = (N_1, N_2, \dots, \sqrt{E} + N_{\frac{n}{2}}) \propto \frac{1}{(\pi \gamma_0)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{x_1^2}{\gamma_0}} e^{-\frac{x_2^2}{\gamma_0}} \dots e^{-\frac{(x_{\frac{n}{2}} + \sqrt{E})^2}{\gamma_0}}$$

Il ricevitore offisce σ , rispetto lo schema generale,



oppure



La regola di decisione può anche essere descritta come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Decidi per } a_j \text{ se } |R_j| > |R_i| \text{ e } R_j > 0 \quad j, i = 1, \dots, \frac{M}{2} \\ \text{ " " } a_{j+\frac{M}{2}} \text{ se } |R_j| > |R_i| \text{ e } R_j < 0 \end{array} \right.$$

Ora ho trovato $|R_j|$ per ogni j e decido per $a_j = a_{j+\frac{M}{2}}$
a seconda che $R_j > 0$ o $R_j < 0$.

La probabilità di errore si calcola come semplice estensione
del caso ortogonale:

$$P(e) = 1 - P(\bar{e}) = 1 - \sum_{i=1}^n P(e|a_i) \pi_i$$

Per simmetria

$$P(e) = 1 - P(e|a_1)$$

$$P(e|a_1) = P_e \{ R_1 > 0, R_1 > |R_2|, R_1 > |R_3|, \dots, R_1 > |R_{\frac{M}{2}}| \mid a_1 \}$$

$$= P_e \{ R_1 > 0, -R_1 < R_2 < R_1, -R_1 < R_3 < R_1, \dots, -R_1 < R_{\frac{M}{2}} < R_1 \mid a_1 \}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{(x_1 - \sqrt{E})^2}{\gamma_0}} \left(\int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{x_2^2}{\gamma_0}} dx_2 \right) \int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{x_3^2}{\gamma_0}} dx_3 \cdots \int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{x_{\frac{M}{2}}^2}{\gamma_0}} dx_{\frac{M}{2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi} \gamma_0} e^{-\frac{(x_1 - \sqrt{E})^2}{\gamma_0}} \left(1 - 2Q\left(x_1 \sqrt{\frac{E}{\gamma_0}}\right)\right)^{\frac{M}{2}-1} dx_1$$

Anche qui l'integrale non è risolvibile
infine elenco e va valutato numericamente

$$\frac{E_b}{\gamma_0} = \frac{E}{\log M \gamma_0}$$

