

ALTRÉ TRASFORMATE E LA
TRASFORMATA COSENZA

lezione del corso di
TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE
NUMERICA DEI SEGNALI
A.A. 2015-16

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

Nella letteratura sulla teoria dei segnali sono state proposte varie alternative alla trasformata di Fourier. L'obiettivo principale è stato fornire delle trasformazioni che fermavano delle risposte causal. Infatti uno degli aspetti più fuorvianti della trasformata di Fourier, è che essa è una funzione complessa di variabile reale (la frequenza) anche quando lo segnale ($x(t)$) da trasformare è reale. Certo appare che se $x(t)$ è reale $X(f)$ è Hermitiana, ovvero $X(-f) = X(f)$. Quindi l'informazione sulle frequenze negative è del tutto contenuta nelle frequenze positive (Il modulo è pari $|X(f)| = |X(-f)|$ e la fase è opposta $\underline{X(f)} = -\underline{X(-f)}$). La necessità formale stessa di dover considerare "frequenze negative" ha stimolato lo sviluppo di trasformate reali che possano confrontare alle sole "frequenze" positive. Se ne potrebbe di volere fornire una discussione esauriente di tale argomento ne citiamo alcune.

TRASFORMATA DI HARTLEY

$$X_{\text{Hartley}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (\cos 2\pi ft + \sin 2\pi ft) dt$$

notare la omisso della j !

Il Kernel di trasformazione è reale ed è denominato $\text{cas}(x)$: $\text{cas } x = \cos x + \sin x$, (cosine-and-sine)

$$\text{cas } 2\pi ft = \cos 2\pi ft + \sin 2\pi ft$$

La frequenza $X_{\text{Hart}}(f)$ è reale.

E' evidente come esista un collegamento diretto con la trasformata di Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft) dt = X_R(f) + j X_I(f)$$

Poiché $X(f) + X^*(f) = 2 X_R(f)$

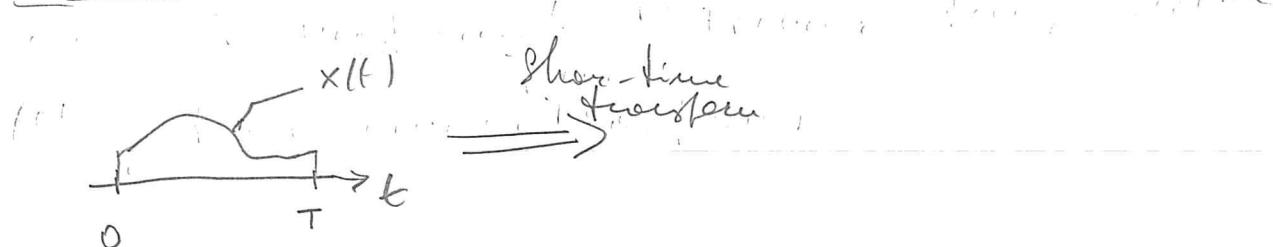
$$X(f) - X^*(f) = j 2 X_I(f)$$

$$\begin{aligned} X_{\text{Hartley}}(f) &= X_R(f) - X_I(f) = \frac{1}{2} [X(f) + X^*(f)] + j [X(f) - X^*(f)] \\ &= \frac{1}{2} [X(f)(1+j) + X^*(f)(1-j)] \end{aligned}$$

Antitrasformata è otta reperibile con facilmente derivabili, con l'eccezione del termine j la antitrasformata ha lo stesso segno della trasformata.

$$\mathcal{X}_{\text{Hartley}} [\mathcal{X}_{\text{Hartley}}(x(t))] = x(t).$$

Diverse trasformate sono anche definite rispetto ad un segmento limitato di segnale e dette trasformate a tempo breve (short-time transform).



SHORT-TIME FOURIER TRANSFORM

$$X_T(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \forall f$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) e^{j2\pi ft} df$$

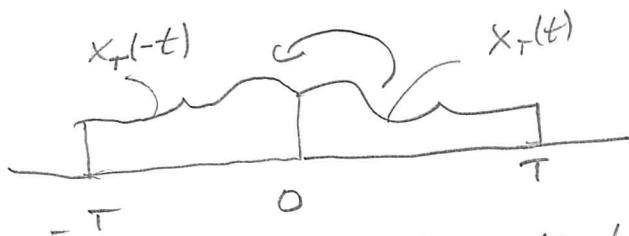
La trasformata è complessa e l'invertibilità per recuperare i valori di $x(t)$, $t \in [0, T]$ richiede fuori uso delle frequenze $f \in [-\infty, +\infty]$.

TRASFORMATA COSENNO (Fourier - cosinus)

T3

La trasformata coseno viene estraeta per essere una trasformata a tempo-breve e reale.

Dal segnale di $x(t)$, $t \in [0, T]$, si ottiene un segnale simmetrico in $[T, T]$ ribaltando la parte a destra.



e considerando lo sviluppo di Fourier che aveva scritto:

$$X_{\cos}(f) = \mathcal{F}_{2T} \left[\frac{x(t) + x(-t)}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_{[-T, 0]}(x(t)) + \mathcal{F}_{[0, T]}(x(t)) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-T}^0 x(-t) e^{-j2\pi ft} dt + \frac{1}{2} \int_0^T x(t) e^{j2\pi ft} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^T x(t) e^{j2\pi ft} dt + \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) = \int_0^T x(t) \cos 2\pi f t dt$$

$$\boxed{X_{\cos}(f) = \int_0^T x(t) \cos 2\pi f t dt \quad f \in \mathbb{R}^+}$$

TRASFORMATA
COSENO

(Nota che $X_{\cos}(f) = X_{\cos}(-f)$ quindi basterà fare solo la fascia positiva.)

Per ricavare una trasformata inversa si può usare la trasformata di Fourier a tempo breve, infatti:

$$X_{\cos}(f) = \frac{1}{2} [X_r(f) + X_r(-f)]$$

Definendo $P_{2T}(t) = x_r(t) + x_r(-t)$, $t \in [-T, T]$

$$X_{\cos}(f) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[P_{2T}(t)] \Rightarrow P_{2T}(t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} X_{\cos}(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$= 2 \left[\int_{-\infty}^0 X_{\cos}(f) e^{j2\pi ft} df + \int_0^{+\infty} X_{\cos}(f) e^{j2\pi ft} df \right] = \downarrow$$

$$= 2 \left[\int_0^\infty X_{\cos}(f) e^{-j2\pi ft} df + \int_0^\infty X_{\cos}(f) e^{j2\pi ft} df \right]$$

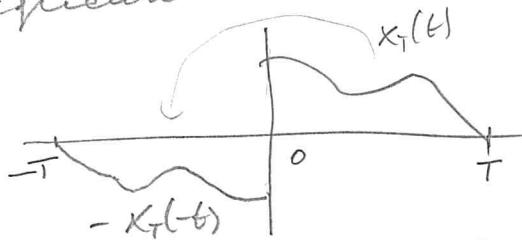
$$= 4 \int_0^\infty X_{\cos}(f) \cos 2\pi f t df$$

$$\boxed{X_T(t) = 4 \int_0^\infty X_{\cos}(f) \cos 2\pi f t df \quad t \in [0, T]}$$

TRASFORMATA
COSENO
INVERSA.

TRASFORMATA SENO (Haus-aerativo)

È possibile estrarre un numero analogo ma trasformato
suo del segnale $x(t)$, $t \in [0, T]$ usando la
trasformata di Fourier. Ribaltando e cambiando
segno il segnale



$$X_{\text{sen}}(f) = \mathcal{F} \left[\frac{x_T(t) - x_T(-t)}{2j} \right] = \frac{1}{2j} \left[\int_{-T}^0 x(-t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^T x(t) e^{j2\pi ft} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[- \int_0^T x(t) e^{j2\pi ft} dt + \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] = - \int_0^T x(t) \sin 2\pi f t dt$$

$$\boxed{X_{\text{sen}}(f) = - \int_0^T x(t) \sin 2\pi f t dt \quad f \in \mathbb{R}^+}$$

TRASFORMATA
SENO

Basta l'omogeneità di f perché $X_{\text{sen}}(f) = -X_{\text{sen}}(f)$

Anche qui la antitrasformata è facilmente
ottenibile usando la trasformata di Fourier:

$$X_{\sin}(f) = - \frac{X_T(-f) + X_T(f)}{2j}, \text{ vero}$$

Definendo $d_{2T}(t) = X_T(t) - X_T(-t)$

$$\begin{aligned} X_{\sin}(f) &= \frac{1}{2j} \int_{-2T}^{2T} [d_{2T}(t)] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= 2j \left[\int_{-\infty}^0 X_{\sin}(f) e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} X_{\sin}(f) e^{j2\pi ft} df \right] \\ &= 2j \left[- \int_0^{\infty} X_{\sin}(f) \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{\cos - j \sin} df + \int_0^{\infty} X_{\sin}(f) \underbrace{e^{j2\pi ft}}_{\cos + j \sin} df \right] \\ &= 2j \left[\int_0^{\infty} 2j X_{\sin}(f) \sin 2\pi ft df \right] = -4 \int_0^{\infty} X_{\sin}(f) \sin 2\pi ft df \end{aligned}$$

$$X_T(t) = -4 \int_0^{\infty} X_{\sin}(f) \sin 2\pi ft df \quad t \in [0, T]$$

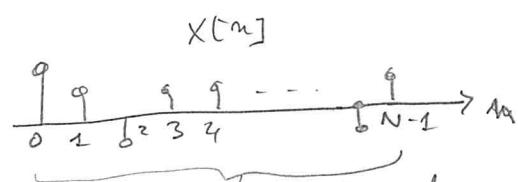
TRASFORMAZIONE
SONO
INVIRSA

Quale che volte nella lettura si trova la definizione
verso il segnale vero, che avviene infatti
venerà la trasformata di Fourier di $- \frac{(X_T(t) - X_T(-t))}{2j}$.

La trasformata di Hartley può essere vista come una
trasformata continua e reale.

TRASFORMATE DISCRETE

Una trasformata discreta realizza una trasformazione tra un segnale di segnale discreto e un altro dominio



Trasformazione

tipicamente il dominio delle trasformate è visualmente associato a frequenze. Il campo notevole è la DFT ottenuta compionendo la DTFT

$$X[k] = X(\nu) \Big|_{\nu=\frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi\nu n} \Big|_{\nu=\frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

(gradi discorsi in precedenza)

$\nu = 0, \dots, N-1$
Avere una trasformata discreta (DT)



è descrivibile anche con una matrice notevolmente

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = \underline{C} \underline{x} \quad \underline{x} = \underline{C}^{-1} \underline{X}$$

Per la DFT abbiamo già visto che $\underline{C} = \left[e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} \right]_{k=0, \dots, N-1}^{n=0, \dots, N-1} = \underline{W}_N$.

Poiché \underline{W}_N è ortogonale e simmetrica: $\underline{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \underline{W}_N^*$.

$$\boxed{\underline{X} = \underline{W}_N \underline{x}}$$

$$\text{DFT} \quad ; \quad \boxed{\underline{x} = \frac{1}{N} \underline{W}_N^* \underline{X}}$$

DFT^{-1}

Traffettando sequenze $x[n]$ reali emerge anche per le trasformate discrete l'esigenza di definire trasformata reale. Per la DFT $X[k]$ notiamo che se $x[n]$ è reale, $X(r) \neq X^*(-r)$.

Dalle periodicità di $X(r)$ emerge che

$$X[k] = X^*[N-k], \quad k=0, \dots, \frac{N}{2}-1. \quad (\text{perciò})$$

Questo vuol dire che l'informazione è già tutta contenuta nella prima metà della sequenza $X[k]$, $k=0, \dots, \frac{N}{2}-1$ e

ovvero nei valori reali

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}[X[k]], \quad k=0, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \operatorname{Im}[X[k]], \quad k=0, \dots, \frac{N}{2}-1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |X[k]|, \quad k=0, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \angle X[k], \quad k=0, \dots, \frac{N}{2}-1 \end{array} \right.$$

Una migliore manipolabilità si ottiene se $\{x[n], n=0, \dots, N-1\}$ è reale e anche $\{X[k], k=0, \dots, N-1\}$ è reale.

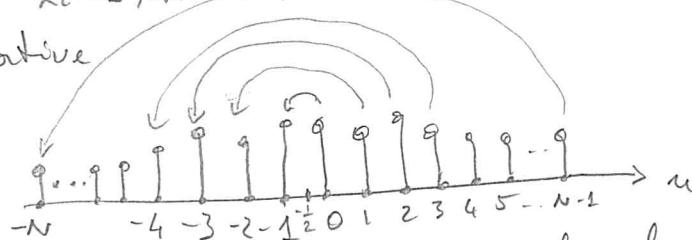
Vediamo alcuni esempi di trasformate discrete reali.

CA TRASFORMATA COSENTO DISCRETA

DCT (DISCRETE COSINE TRANSFORM)

La costruzione della DCT segue un schema simile a quelli delle trasformate coseno continue.

La sequenza $x[n], n=0, \dots, N-1$ viene ribaltata verso l'alto delle n negative



La differenza con il caso continuo è che il ribaltamento lo si fa attorno a $-\frac{1}{2}$. Quindi la simmetria è ottenuta a $-\frac{1}{2}$.

La sequenza ottenuta è

$$v[n] = \begin{cases} x[n] & n=0, \dots, N-1 \\ x[-n-1] & n=-N, \dots, -1 \end{cases}$$

Per ottenere una trasformazione reale, si scommette che ottenuta allo zero operando formalmente un shift a destra di $\frac{1}{2}$. La sequenza completa viene trasformata secondo uno DFT su $2N$ valori.

$$V[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}K\frac{1}{2}} \sum_{n=-N}^{N-1} v[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn} = \sum_{n=-N}^{N-1} v[n] e^{-j\frac{\pi}{N}(\frac{1}{2} + n)K} \quad T8$$

$$= \sum_{n=-N}^{-1} x[-m-1] e^{-j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{2N}(2n+1)k}$$

$m = -m-1$ $2n+1 = 2(-m-1)+1 = -(2m+1)$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j\frac{\pi}{2N}(2m+1)k} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{\pi}{2N}(2m+1)k}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{\pi}{2N} (2n+1) k$$

La definizione delle DCT si ottiene dividendo per δ e
modificando il valore per $K=0$:

$$n=0$$

$$X[k] \stackrel{\Delta}{=} x[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{\pi k}{2N} (2n+1)$$

TRASFORMATA
DISCRETA
ESSENDO
ACT

l'inverso si ricava facilmente dalle proprietà di simmetria;

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k] X_{\cos}[k] \cos \frac{\pi k}{2N} (2n+1) \quad n=0, \dots, N-1$$

IDCT
TRANSFORMATA
COSENO
INVERSA

Vinolizzium la matrice di trasformazione per $N=4$

| | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | π |
|---|---|---|---|---|-------|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| 1 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{5\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{7\pi}{8}$ | |
| 2 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{9\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{11\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{13\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{15\pi}{8}$ | |
| 3 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{17\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{19\pi}{8}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{21\pi}{8}$ | | |

(*) la malattia viene infettata per effettuare esercizio ortopedico.

rigid sternocostalis

Qc

Si può dimostrare che $\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}_N$. Pertanto

$Q_c^{-1} = Q_{c'}^T$ da cui la IDCT.

Dimostrazione delle ortogonalità di Q_C

Tg

La prima riga $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ è normale in quanto

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 = 1 \quad \checkmark$$

Le altre righe ($k \geq 1$) la norma quadratico è e'

$$\sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos \frac{\pi k}{2N} (2n+1), \underbrace{\cos \frac{\pi k}{2N} (2n+1)}_{n=1}, \dots, \underbrace{\cos \frac{\pi k}{2N} (2n+1)}_{n=N-1} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \cos^2 \frac{\pi k}{2N} (2m+1) &= \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N} (2m+1) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \cos \frac{\pi k}{N} (2m+1) = 1 + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j\frac{\pi k}{N}(2m+1)}}{2} + e^{-j\frac{\pi k}{N}(2m+1)} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2N} e^{j\frac{\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{\pi k 2m}{N}} + \frac{1}{2N} e^{-j\frac{\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{\pi k 2m}{N}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2N} e^{j\frac{\pi k}{N}} \frac{1 - e^{j\frac{\pi k 2N}{N}}}{1 - e^{j\frac{\pi k 2}{N}}} + \frac{1}{2N} e^{-j\frac{\pi k}{N}} \frac{1 - e^{-j\frac{\pi k 2N}{N}}}{1 - e^{-j\frac{\pi k 2}{N}}} = 1 \quad \checkmark$$

Il prodotto scalare tra righe per $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \cos \frac{\pi k_1}{2N} (2m+1) \cos \frac{\pi k_2}{2N} (2m+1) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \cos \frac{\pi}{2N} (k_1 + k_2) (2m+1) \\ + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \cos \frac{\pi}{2N} (2m+1) (k_1 - k_2) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2N}(2m+1)(k_1+k_2)}}{2} + e^{-j\frac{\pi}{2N}(2m+1)(k_1+k_2)} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2N}(2m+1)(k_1-k_2)}}{2} + e^{-j\frac{\pi}{2N}(2m+1)(k_1-k_2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2N} e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{\pi}{2N} 2m(k_1+k_2)} + \frac{1}{2N} e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{\pi}{2N} 2m(k_1+k_2)}$$

$$+ \frac{1}{2N} e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{\pi}{2N} 2m(k_1-k_2)} + \frac{1}{2N} e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{\pi}{2N} 2m(k_1-k_2)}$$

$$= \frac{1}{2N} e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)} \frac{1 - e^{j\pi(k_1+k_2)}}{1 - e^{j\frac{\pi}{N}(k_1+k_2)}} + \frac{1}{2N} e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)} \frac{1 - e^{-j\pi(k_1+k_2)}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{N}(k_1+k_2)}}$$

$$+ \frac{1}{2N} e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)} \frac{1 - e^{j\pi(k_1-k_2)}}{1 - e^{j\frac{\pi}{N}(k_1-k_2)}} + \frac{1}{N} e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)} \frac{1 - e^{-j\pi(k_1-k_2)}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{N}(k_1-k_2)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2N} \frac{\frac{e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}}{e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}} \left(1 - (-1)^{k_1+k_2}\right)}{\left(e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)} - e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}\right)} + \frac{1}{2N} \frac{\frac{e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}}{e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}} \left(1 - (-1)^{k_1+k_2}\right)}{\left(e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)} - e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}\right)} \\
&+ \frac{1}{2N} \frac{\frac{e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}}{e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}} \left(1 - (-1)^{k_1-k_2}\right)}{\left(e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)} - e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}\right)} + \frac{1}{2N} \frac{\frac{e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}}{e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}} \left(1 - (-1)^{k_1-k_2}\right)}{\left(e^{j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)} - e^{-j\frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}\right)} \\
&= \frac{1}{2N} \frac{\cancel{\left(1 - (-1)^{k_1+k_2}\right)z_j}}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}} + \frac{1}{2N} \frac{\cancel{\left(1 - (-1)^{k_1+k_2}\right)z_j}}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2N}(k_1+k_2)}} \\
&+ \frac{1}{2N} \frac{\cancel{\left(1 - (-1)^{k_1-k_2}\right)z_j}}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}} + \frac{1}{2N} \frac{\cancel{\left(1 - (-1)^{k_1-k_2}\right)z_j}}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2N}(k_1-k_2)}} = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Resterà da dimostrare l'autogesoltà di tutte le regole
con le prime, ovvero

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{z}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \cos \frac{\pi k}{2N} (2m+1) \frac{1}{\sqrt{N}} &= \frac{\sqrt{z}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{e^{j\frac{\pi k}{2N}(2m+1)} + e^{-j\frac{\pi k}{2N}(2m+1)}}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{j\pi k}{2N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\frac{\pi k}{2N} 2m} + \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-j\frac{\pi k}{2N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{\pi k}{2N} 2m} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{\frac{j\pi k}{2N}} \frac{1 - e^{j\frac{\pi k}{2N} \cdot N}}{1 - e^{j\frac{\pi k}{2N}}} + \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-j\frac{\pi k}{2N}} \frac{1 - e^{-j\frac{\pi k}{2N} \cdot N}}{1 - e^{-j\frac{\pi k}{2N}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{e^{\frac{j\pi k}{2N}} (1 - (-1)^k)}{e^{\frac{j\pi k}{2N}} (e^{-j\frac{\pi k}{2N}} - e^{j\frac{\pi k}{2N}})} + \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2N}} (1 - (-1)^k)}{e^{-j\frac{\pi k}{2N}} (e^{j\frac{\pi k}{2N}} - e^{-j\frac{\pi k}{2N}})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{(1 - (-1)^k) z_j}{-\sin \frac{\pi k}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{(1 - (-1)^k) z_j}{\sin \frac{\pi k}{2N}} = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$\checkmark K = 1, \dots, N-1$$

LA TRASFORMATA SENO DISERETA (DST)

Con una costruzione analoga a quelle delle DCT (ovvero ribaltando e accorciando di segno la sequenza originale) si ottiene la DST (*)

$$X[k] = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin \frac{\pi (k+1)(n+1)}{N+1} \quad k=0, \dots, N-1$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sin \frac{\pi (k+1)(n+1)}{N+1} \quad n=0, \dots, N-1$$

Anche questa è una trasformata unitaria e invertibile

$$\underline{x} = Q_s \underline{X}$$

$$Q_s = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi (k+1)(n+1)}{N+1} \end{bmatrix}_{k=0, \dots, N-1, n=0, \dots, N-1}$$

(*) Esistono varie versioni delle DST [vedi libro di Jai e lezione di Giacomo]. Questa è la più comune ed è la versione 1.

Dell'ortogonalità delle righe l'inverso è benelmente $Q_s^{-1} = Q_s^T = Q_s \Rightarrow \underline{x} = Q_s \underline{X}$

LA TRASFORMATA DI HADAMARD

(DHT)

La trasformata di Hadamard può essere ottenuta dal complessamento delle fasi - di Wohlke che le ha caratteristiche (importante dal punto di vista computazionale) di richiedere solo somme e confronti di segni.

Si assume che $N = 2^b$ (potenze di due)

$$X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (-1)^{b(k,n)} \quad k=0, \dots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] (-1)^{b(k,n)} \quad n=0, \dots, N-1$$

DHT

IDHT

dove

$$b[K, n] = \sum_{i=0}^{b-1} k_i m_i \quad k_i, m_i = 0, 1$$

$\{k_i\}$ e $\{m_i\}$ sono le rappresentazioni binarie di K e n , ovvero

$$\begin{cases} K = k_0 + 2k_1 + 2^2 k_2 + \dots + 2^{b-1} k_{b-1} \\ n = m_0 + 2m_1 + 2^2 m_2 + \dots + 2^{b-1} m_{b-1} \end{cases}$$

Quindi, nello spazio di trasformazione esistono solo
+1 e -1.

Ese. $N=8$

$$Q_H = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} n \rightarrow 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ K \rightarrow 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'ortogonalità è immediata
da verificare.
La matrice è simmetrica, quindi
 $Q_H^{-1} = Q_H^T = Q_H$.

Altre trasformate possono essere definite e riportate
nelle voci delle letterature sull'argomento.

(vedi per esempio A.K. JAIN, "Fundamentals of Digital
Image Processing", PRENTICE HALL 1989.)

come

- LA TRASFORMATA DISCRETA DI HARTLEY $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{2\pi}{N} kn$
 $k=0, \dots, N-1$
- LA TRASFORMATA DI HAAR
- LA TRASFORMATA SLANT

ecc.

Per apprezzare le differenze fra le varie trasformate, la
Figura delle pagine seguenti mostra le singole ali dei
diverse trasformate per $N=8$.

Si noti la notevole oscillazione (eccetto che per le Hadamard e la KLT) delle basi. La KLT è calcolata per una sequenza di Markov del I° ordine. T13

Le proprietà di convergenza e decorrelazione delle varie basi sono molto simili. Esse ereditano e conservano il carattere oscillante della DFT.

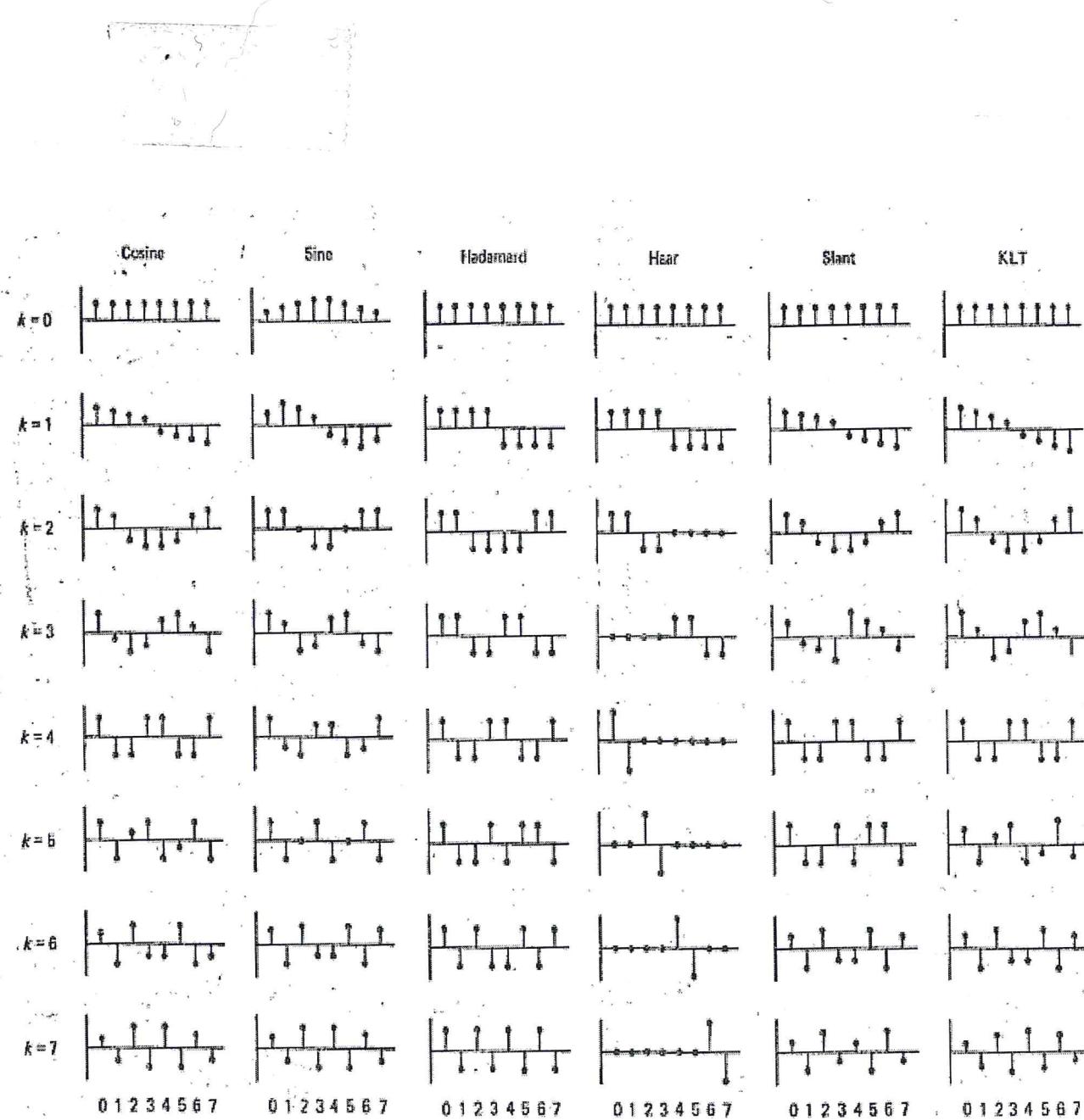


Figure 5.1 Basic vectors of the 8×8 transforms.

PROPRIETÀ DECORRELANTE DELLA DCT

La DCT riveste un'importante ruolo nella decorrelazione dei segnali (e sono negli standard JPEG e MPEG) per alcune sue proprietà notevoli.

PROPOSIZIONE: Le righe della matrice della Trasformata coseno sono gli autovettori della seguente matrice tridiagonale

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha(1-\alpha) \end{bmatrix} .$$

Questo significa che se esegui la decomposizione spettrale di \underline{G} , ottieni

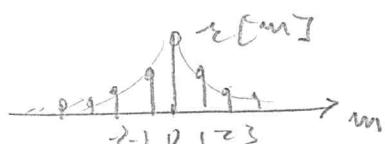
$$\underline{G} = \underline{Q}_c^T \underline{\Lambda} \underline{Q}_c$$

Avendo per un processo vettoriale \underline{X} che avesse matrice di autocorrelazione \underline{G} , $\underline{X} = \underline{Q}_c \underline{X}$ sarebbe un filtro a resone quadrato con $E[\underline{X}\underline{X}^T] = \underline{\Lambda}$.

Vogliamo ora dimostrare come la DCT sia molto simile alle LTCI per tutti i processi Markoviani del T° ordine.

Un processo Markoviano del T° ordine si rappresenta in questo modo, la sua autocorrelazione

$$\gamma[m] = \sum_{l=1}^{T^m} |g_l|^2 \quad |g_l| < 1$$



Il modello di Markov del T° ordine è applicabile a molte situazioni di analisi dei segnali dove la correlazione tra campioni decresce con le distanze in maniera esponenziale. Per esempio nei segnali non strutturati con piccoli salti basosi la osservazione più semplice è che essi abbiano una struttura

di correlazione di questo tipo. Nella elaborazione delle T15 si misura, se si va a misurare la matrice correlazione fra pixel si trova spesso sempre un andamento decrescente o crescente delle distanze. Questo suggerisce un modello di karta del 1° ordine (in 2 dimensioni ovviamente, sulla elaborazione di segnali 2D si vede qualche di seguito).

Una funzione di N componenti estremamente simile al processo di Blackov del 1° ordine, ha quindi una matrice di autocorrelazione del tipo

$$\underline{R}_M = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta^2 & \cdots & \beta^{N-1} \\ \beta & 1 & \beta & \cdots & \beta^{N-2} \\ \beta^2 & \beta & 1 & \cdots & \beta^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{N-1} & \cdots & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti che \underline{R}_M è
Toeplitz

Se analizziamo la struttura di \underline{R}_M troviamo che gli autovettori e gli autovalori non ottenibili qualitativamente sono per N pari [Jain]

$$\lambda_k = \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta \cos w_k + \beta^2} \quad k = 0, \dots, N-1$$

dove le w_k , $k = 0, \dots, N-1$ sono le N radici dell'esponente

$$f_g(Nw) = -\frac{(1-\beta^2) \sin w}{\cos w - 2\beta + \beta^2 \cos w}$$

e gli autovettori sono

$$\phi_k[m] = \phi[m, k] = \left(\frac{2}{N+\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left[w_k\left(m+1 - \frac{N+1}{2}\right) + \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$$

$m, k = 0, \dots, N-1$

Si tratta di sinusoidi non perfettamente circolari. Le w_k devono essere calcolate iterativamente con un qualche metodo numerico. In pratica restituisce.

$$\underline{R}_M = \underline{\phi}^T \Delta \underline{\phi}$$

Tl risulta non essere particolarmente illuminante, ma
vele anche il seguente risultato:

T16

$$\beta^2 R_M^{-1} = \begin{bmatrix} 1-\beta\alpha & -\alpha & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1-\alpha \\ & & & -\alpha & 1-\beta\alpha \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \triangleq \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \\ \alpha \triangleq \frac{\beta}{1+\beta^2} \\ \gamma \triangleq 1 \end{array} \right.$$

Questo risulta molto simile alla matrice B vista
prima!! Quindi se

$$\beta^2 R_M^{-1} \approx B, \quad \beta \approx 1$$

possiamo dire che Q_c , la matrice degli autovettori
di B , è all'inverso la matrice degli autovettori di
 R_M^{-1} . Ma la decomposizione rettangolare dell'inversa
di una matrice è l'estensione di quelle delle
matrici di per sé con gli autovettori invertiti,
ovvero

$$R_M^{-1} = \underline{\Phi} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\Phi}^T$$

Pertanto

$$Q_c \approx \underline{\Phi}$$

Ovvero lo DCT è all'inverso lo KLT per i processi
di Markov del J^{o} ordine.

Questo conferma che DCT ha importanza cruciale
in molte applicazioni applicative in cui la struttura
di autocorrelazione è approssimativamente quella
di un processo di Markov del J^{o} ordine.

Ecco perché nelle applicazioni all'analisi delle
immagini si usa direttamente lo DCT invece il
ceto computazionale aggiuntivo di dover volutamente
lo KLT esatto (Vedere la matrice di autocorrelazione e
risolvere il problema agli autovettori)

I simboli presentati per le DCT non stendibili ad π sono trasformate oscillanti come quelle presentate brevemente in precedenza.

Queste analogie hanno suggerito lo sviluppo delle cosiddette CLASSE DI JAIN, ovvero di matrici che generalizzano quelle di cui la DCT è autostruzione.

$$J = J(k_1 k_2 k_3) = \begin{bmatrix} 1 - k_1 \alpha & -\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & k_3 \alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

• Tali simboli per $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 0$ $J(1, 1, 0) = B$.

• Per $k_1 = k_2 = \beta$, $k_3 = 0$, $\beta^2 = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$, $\alpha = \frac{\beta}{1+\beta^2}$ abbiamo

$$J(\beta, \beta, 0) = \beta^2 B_H^{-1}$$

• Si può dimostrare [Joint] che la trasformata reale osservata è autostruttura di $J(0, 0, 0)$

• La trasformata diretta di Fourier è autostruttura di $J(1, 1, -1)$ (circante)

Si può inoltre dimostrare che altre trasformate circante sono ottenibili da diverse combinazioni di k_1 , k_2 e k_3 come ad esempio:

④ SENTO DISPARI(-1) $k_1 = k_3 = 0$, $k_2 = 1$

$$\phi_m[k] = \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \sin \frac{(k+1)(2m+1)\pi}{2N+1} \quad m, k = 0, \dots, N-1$$

⑤ COSENO DISPARI(-1) $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$

$$\phi_m[k] = \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \cos \frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2(2N+1)}$$