ALCUNI METODI DI APPROSSIMAZIONE DELLA RISPOSTA IMPULSIVA

Lezioni del corso di TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI

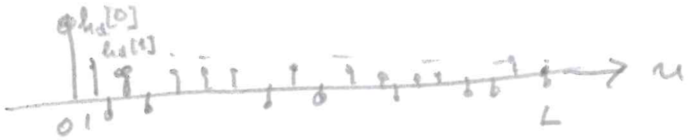
SUN - A.A. 2014-15

(Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI)

APPROSSIMAZIONE DELLA RISPOSTA IMPULSIVA

In numerose applicazioni DSP in controlli, elaborazione di segnali acustici, segnali vocali ecc, si presenta l'esigenza di approssimare con un filtro numerico una risposta impulsiva disponibile per campioni.

$\{h_d[n]\}$



La lunghezza L della sequenza può essere molto grande. Se L fosse limitata a un valore piccolo si potrebbe immediatamente associare $h_d[n]$ a un filtro FIR causale con $b_n = h_d[n]$ $n = 0, \dots, L$. $\left(H(z) = \sum_{n=0}^{L} b_n z^{-n}\right)$

Viceversa se L è grande si vuole cercare una approssimazione H(z) che contenga anche una parte ricorsiva:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Un sistema del genere (IIR) rappresenta come è ben noto l'equazione alle differenze

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M]$$

Se all'ingresso del sistema è applicato un impulso $x[n] = \delta[n]$ la risposta impulsiva soddisfa l'equazione alle differenze

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \dots + b_M \delta[n-M]$$

Rammentando che $\delta[n-k] = 0$ eccetto che per $n = k$

otteniamo:

$$
\begin{cases}
h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + b_n \\
\qquad \text{per } 0 \le n \le M \\
h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-1] - \dots - a_N h[n-N] \\
\qquad \text{per } n > M
\end{cases}
\qquad (*)
$$

<u>METODO DI PADE'</u>:

Osservando che la relazione tra $a_1 \dots a_N$ b_n e $h[n]$ in $(*)$ è lineare, si può impostare la ricerca dei coefficienti come un sistema lineare con $N+M+1$ incognite.

<u>Esempio</u>: $N=2$, $M=3$ $\Rightarrow \{a_1, a_2, b_0, b_1, b_2\}$ incognite.

$$
\begin{aligned}
h_d[0] &= -a_1 \cancel{h_d[-1]}^{\,0} - a_2 \cancel{h_d[-2]}^{\,0} + b_0 \\
h_d[1] &= -a_1 h_d[0] - a_2 \cancel{h[-1]}^{\,0} + b_1 \\
h_d[2] &= -a_1 h_d[1] - a_2 h_d[0] + b_2 \\
h_d[3] &= -a_1 h_d[2] - a_2 h_d[1] + b_3 \\
h_d[4] &= -a_1 h_d[3] - a_2 h_d[2] \\
h_d[5] &= -a_1 h_d[4] - a_2 h_d[3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-h_d[0] & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-h_d[1] & -h_d[0] & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-h_d[2] & -h_d[1] & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-h_d[3] & -h_d[2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-h_d[4] & -h_d[3] & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} h_d[0] \\ h_d[1] \\ h_d[2] \\ h_d[3] \\ h_d[4] \\ h_d[5] \end{bmatrix}
$$

La limitazione di questo metodo è che tiene conto solo dei primi $N+M+1$ campioni ignorando il resto dei campioni fino ad L. Si tratta inoltre di una tecnica troppo "puntuale" e quindi poco robusta rispetto a eventuale rumore su $h_d[n]$. (ammesso che il sistema abbia soluzione)

METODO SOLO-POLI (ALL POLES)

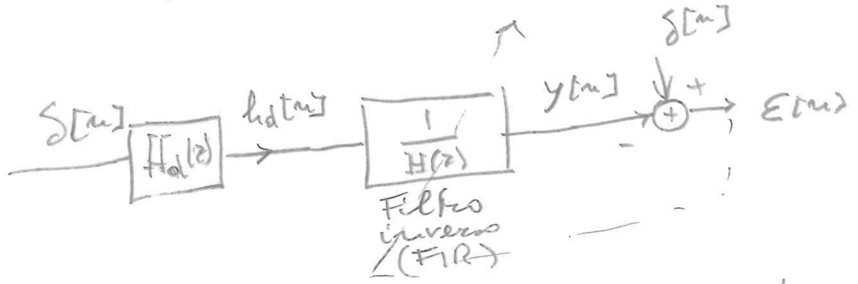
Se il filtro approssimante possiede solo poli, abbiamo

$$\bar{H}(z) = \frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

(in effetti contiene N poli, ma anche N zeri nell'origine, ma questo non influenza la parametrizzazione)

Quindi bisogna determinare b_0 e $\{a_1 \dots a_N\}$.

Il problema può essere inquadrato come in figura.



L'ipotetico sistema che fornisce la risposta impulsiva $h_d[n]$ è messo in cascata con l'inverso di $\bar{H}(z)$ che ora è un FIR. Quindi se $\bar{H}(z)$ approssimasse $H_d(z)$ il suo inverso dovrebbe fornire un'uscita più simile possibile ad un impulso.

Poiché $\frac{1}{\bar{H}(z)} = \frac{1}{b_0}\left(1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right)$, l'uscita del FIR è

$$y[n] = \frac{1}{b_0}\left(h_d[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k h_d[n-k]\right)$$

Imponendo l'uguaglianza per $n=0$, ovvero $y[0]=1$, otteniamo $\boxed{b_0 = h_d[0]}$ poiché $h_d[n]=0$ $n<0$

Per gli altri coefficienti cerchiamo la soluzione che minimizza la somma dei quadrati.

$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{L} (y[n] - \delta[n])^2$. Poiché $y[0] = 1$, abbiamo che la quantità da minimizzare è

$$\boxed{\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{L} (y[n])^2}$$

ovvero

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{b_0} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k h_d[n-k] \right)^2$$

Si tratta di una forma quadratica. Eseguendo il gradiente rispetto ad uno dei parametri abbiamo.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_l} = \frac{2}{b_0} \sum_{n=1}^{L} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k h_d[n-k] \right) h_d[n-l] \qquad l = 1, \dots, N$$

la soluzione $\{a_{01}\, a_{02} \dots a_{0N}\}$ può essere ottenuta ponendo i gradienti a zero, $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_N} = 0$, ovvero

$$-\sum_{n=1}^{L} h_d[n] h_d[n-l] = \sum_{k=1}^{N} a_{0k} \sum_{n=1}^{L} h_d[n-k] h_d[n-l] \qquad l = 1, \dots, N$$

Denotando

$$r_{h_d}[k, l] \triangleq \sum_{n=1}^{L} h_d[n-k] h_d[n-l]$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^{N} a_{0k}\, r_{h_d}[k, l] = r_{h_d}[0, l] \qquad l = 1, \dots, N.$$

$N = 3$

$$\begin{bmatrix} r_{h_d}[1,1] & r_{h_d}[2,1] & r_{h_d}[3,1] \\ r_{h_d}[1,2] & r_{h_d}[2,2] & r_{h_d}[3,2] \\ r_{h_d}[1,3] & r_{h_d}[2,3] & r_{h_d}[3,3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{h_d}[0,1] \\ r_{h_d}[0,2] \\ r_{h_d}[0,3] \end{bmatrix}$$

la matrice è ovviamente simmetrica e si noti la analogia con i filtri ottenuti con il metodo dei minimi quadrati. Le differenze potrebbero essere nella finestratura dei dati nel calcolo di $r_{h_d}[k,l]$.

APPROSSIMAZIONE ZERI-POLI

METODO 1

Un primo metodo che includa anche i parametri $b_0, \dots, b_M$ può essere ottenuto osservando (di nuovo) che

$$\begin{cases} h[n] = -\sum_{K=1}^{N} a_K h[n-K] + b_n & 0 \le n \le M \quad (a) \\ h[n] = -\sum_{K=1}^{N} a_K h[n-K] & n > M \quad (b) \end{cases}$$

Quindi per $n > M$ possiamo cercare i coefficienti $a_1, \dots, a_N$ tali da ottenere una prima stima

$$\hat{h}[n] = -\sum_{K=1}^{N} a_K h_d[n-K]$$

che minimizzi

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{n=M+1}^{L} \left(h_d[n] - \hat{h}[n]\right)^2$$

ovvero

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{n=M+1}^{L} \left(h_d[n] + \sum_{K=1}^{N} a_K h_d[n-K]\right)^2$$

Dall'annullamento del gradiente

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial a_\ell} = \sum_{n=M+1}^{L} \left(h_d[n] + \sum_{K=1}^{N} \hat{a}_K h_d[n-K]\right) h_d[n-\ell] = 0 \qquad \ell = 1, \dots, N$$

abbiamo il sistema di equazioni lineari

$$\sum_{K=1}^{N} \hat{a}_K \underbrace{\sum_{n=M+1}^{L} h_d[n-K]\, h_d[n-\ell]}_{\triangleq\, r_{hd}[K,\ell]} = -\sum_{n=M+1}^{L} h_d[n]\, h_d[n-\ell] \qquad \ell = 1, \dots, N$$

che come sopra possono essere organizzate in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} r_{hd}[1,1] & r_{hd}[2,1] & \dots & r_{hd}[N,1] \\ r_{hd}[1,2] & r_{hd}[2,2] & \dots & r_{hd}[N,2] \\ \vdots & & & \\ r_{hd}[1,N] & r_{hd}[2,N] & \dots & r_{hd}[N,N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{hd}[0,1] \\ r_{hd}[0,2] \\ \vdots \\ r_{hd}[0,N] \end{bmatrix}$$

Ora, fissate $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N$ i coefficienti $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots \hat{b}_M$ possono essere ottenuti facilmente per sostituzione in (a), ovvero

$$\hat{b}_n = h_d[n] + \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k \, h_d[n-k] \qquad n=0,\dots,M.$$

Ad esempio, per $N=2$, $M=3$, ottenuti $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ dal metodo least squares,

$$\hat{b}_0 = h_d[0]$$

$$\hat{b}_1 = h_d[1] + \hat{a}_1 h_d[0]$$

$$\hat{b}_2 = h_d[2] + \hat{a}_1 h_d[1] + \hat{a}_2 h_d[2]$$

$$\hat{b}_3 = h_d[3] + \hat{a}_1 h_d[2] + \hat{a}_2 h_d[1]$$

Lo svantaggio di questo metodo è che i coefficienti $b_0 \dots b_M$ dipendono solo dai primi campioni di $h_d[n]$, mentre $a_1, \dots a_N$ dipendono "globalmente" da $h_d[n]$. Questo suggerisce il metodo seguente

METODO 2 (o metodo di SHANK)

(1) Calcola con il metodo solo-poli una prima approssimazione $\dfrac{\hat{b}_0}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$. Ignora la scala $\hat{b}_0$ e risulta $H_1(z) = \dfrac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$.

(2) Migliora la approssimazione mettendo in cascata ad $H_1(z)$ un altro filtro solo-zeri $H_2(z)$ (FIR) che risolve il problema least squares con $h_d[n]$, come in figura

Il secondo sistema ha funzione di trasferimento RIF $H_2(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$ (FIR). I coefficienti possono essere trovati con il metodo least squares minimizzando

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{L} \left(y[n] - h_d[n] \right)^2$$

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{L} \left(\sum_{k=0}^{M} b_k v[n-k] - h_d[n] \right)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_\ell} = 2 \sum_{n=1}^{L} \left(\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k v[n-k] - h_d[n] \right) v[n-\ell] = 0 \qquad \ell = 0, \dots, M$$

$$\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k \underbrace{\sum_{n=1}^{L} v[n-k]\, v[n-\ell]}_{r_v[k,\ell]} = \underbrace{\sum_{n=1}^{L} h_d[n]\, v[n-\ell]}_{r_{h_d v}[0,\ell]} \qquad \ell = 0, \dots, M$$

$$\begin{bmatrix} r_v[0,0] & r_v[1,0] & \dots & r_v[M,0] \\ r_v[0,1] & r_v[1,1] & & r_v[M,1] \\ \vdots & & & \\ r_v[0,M] & r_v[1,M] & \dots & r_v[M,M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{h_d v}[0,0] \\ r_{h_d v}[0,1] \\ \vdots \\ r_{h_d v}[0,M] \end{bmatrix}$$

<u>NOTA</u>: In tutti i metodi least squares esposti, la finestratura dei dati riveste una importanza cruciale soprattutto quando L non è molto grande. Bisogna fare attenzione nel calcolo delle auto e mutue correlazioni a non includere campioni nulli che potrebbero non avere senso dal punto di vista del problema da risolvere.