FILTRI A MINIMO ERRORE QUADRATICO

Lezioni di Telecomunicazioni

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

Corso di "TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI"
AA 2014-15. (SUN).

Nella risoluzione di numerosi problemi di filtraggio, il progetto del filtro (tipicamente un FIR) viene effettuato in maniera statistica.

Lo schema di riferimento è il seguente

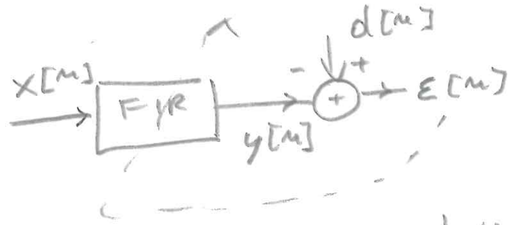


Fig 1

dove la sequenza di ingresso $\{x[n]\}$ è all'ingresso di un filtro che deve essere progettato per fornire la migliore stima (nel senso che sarà chiarito in seguito) di una sequenza "desiderata" $d[n]$.

La differenza tra $d[n]$ e $y[n]$ è la sequenza di errore $\varepsilon[n]$.

Assumiamo che il filtro FIR sia causale, quindi caratterizzato da una risposta impulsiva $\{h[n], n=0,\dots,N-1\}$ che fornisce l'uscita

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\, x[n-k] .$$ (convoluzione lineare discreta)

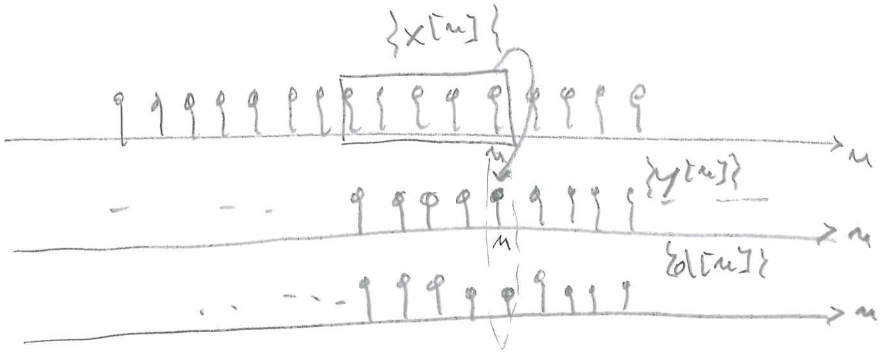
Definendo i vettori

$$\underline{x}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-N+1] \end{bmatrix} \qquad \underline{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[N-1] \end{bmatrix}$$

otteniamo che $y[n]$ può essere scritto come il prodotto

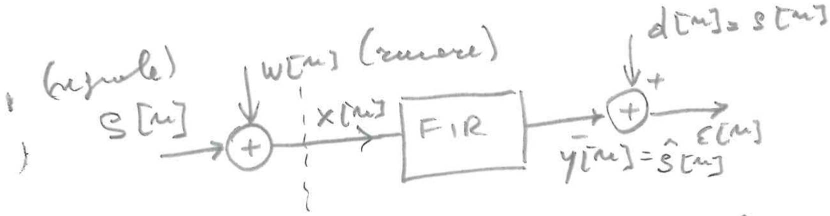
$$y[n] = \underline{h}^T \underline{x}[n] .$$

La figura seguente mostra come la finestra $\underline{x}[n]$ che scivola nella sequenza $x[n]$ produce l'uscita $y[n]$ che costituisce una stima di $d[n]$.

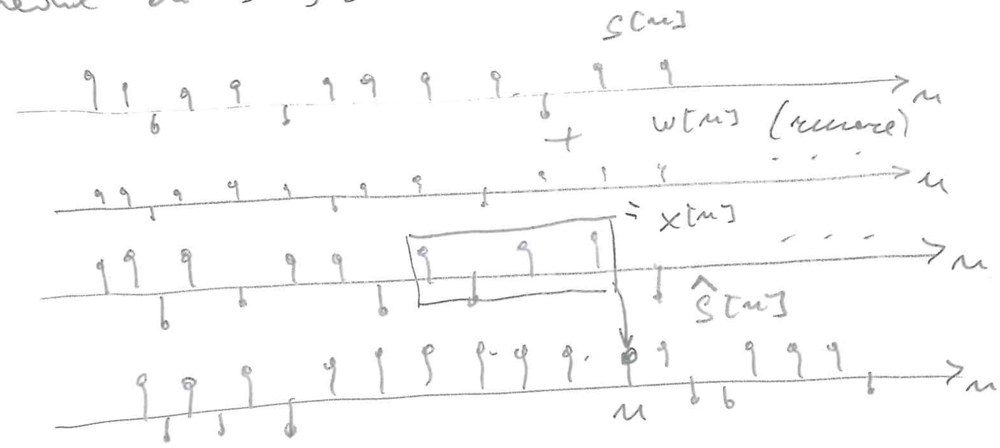


Prima di presentare l'analisi del problema e le possibili soluzioni, esaminiamo alcuni scenari tipici di utilizzo di questo schema.

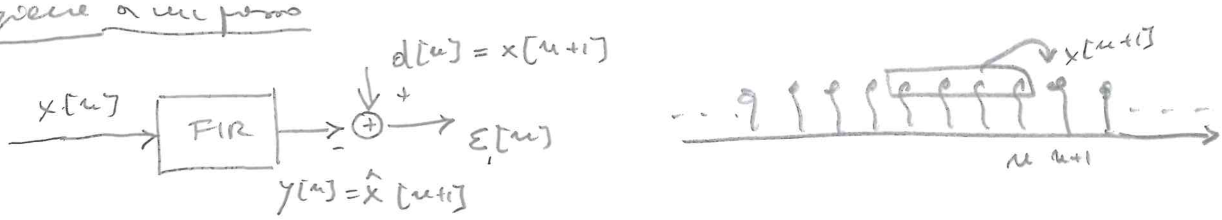
$\boxed{A1}$ Filtraggio di segnale rumoroso



Il filtro mira a recuperare al meglio s[n] da una sua versione contaminata da rumore additivo. È evidente che lo schema di riferimento costituisce il modello del problema in quanto se si disponesse del segnale s[n] incontaminato il problema non avrebbe senso. Vedremo in seguito che per la risoluzione del problema basta la conoscenza di caratteristiche medie di s[n] di w[n] e mutue tra s[n] e w[n].

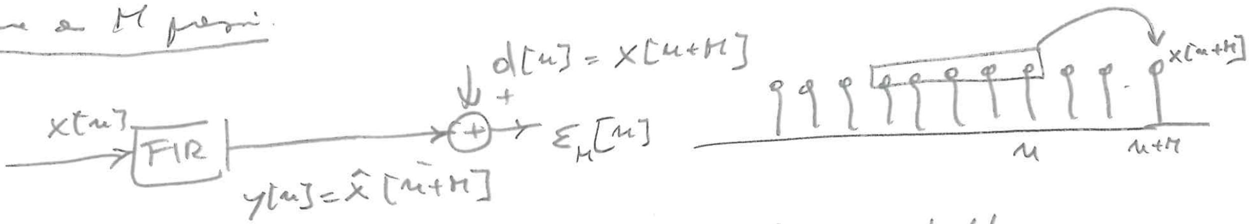


A2 Predizione a un passo



In questo caso il "desiderato" è un campione di $x[n]$ stesso "non ancora visto".

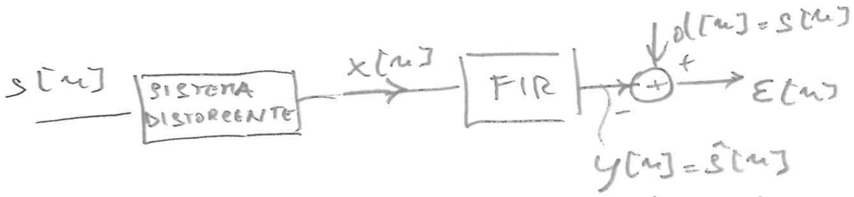
A3 Predizione a M passi



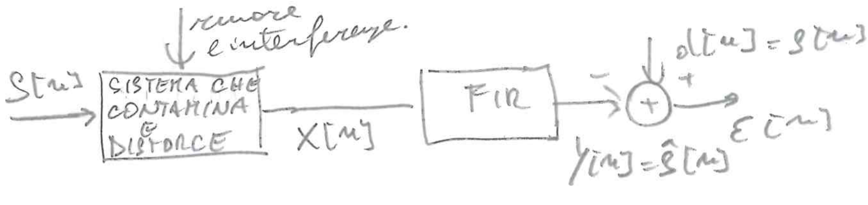
Il "desiderato" qui è lo stesso segnale predetto di M passi nel futuro.

A4 Filtraggio di un segnale distorto.

Lo stesso schema di riferimento può essere utilizzato per "invertire" un sistema distorcente.



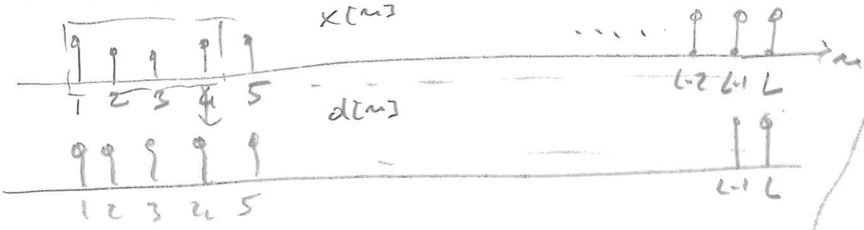
A5 Filtraggio di un segnale distorto e/o contaminato



Qui distorsioni e effetti indesiderati possono combinarsi in maniera più generale, anche non lineare. Vedremo che per la risoluzione del problema del filtraggio sarà necessario conoscere solo la autocorrelazione di $x[n]$ e la funzione di mutua correlazione tra $x[n]$ e $s[n]$.

SOLUZIONE BASATA SU UN INSIEME DI "APPRENDIMENTO" (TRAINING SET)

Con riferimento allo schema generale di Figura 1, supponiamo di disporre di dati completi $(x[n], d[n])$ $n = 1, \dots, L$, ovvero di un training set di lunghezza $L \gg N$.



È evidente che una volta progettato il filtro esso andrà utilizzato su sequenze non note, ma dalle caratteristiche simili.

Applicando il filtro a $x[n]$ otteniamo

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\, x[n-k] \qquad n = N, \dots, L.$$

Si noti che il filtro non può essere applicato prima di $n = N$ non disponendo di dati precedenti a $n = 1$, salvo assumere che $x[n]$ sia nullo per $n \leq 0$. Questo in genere è da evitare eccetto che in situazioni specifiche. Ovviamente i valori di $d[n]$ per $n < N$ non saranno utilizzati.

Il problema può essere formulato come minimizzazione di somma di quadrati o MINIMUM SQUARED ERROR (MSE) come:

> Determina $\{h[0], \dots, h[N-1]\}$ tale che MSE
>
> $$\mathcal{E}(\underline{h}) = \sum_{n=N}^{L} \varepsilon^2[n] = \sum_{n=N}^{L} \left(d[n] - y[n]\right)^2$$
>
> sia minimo.

Nota: l'utilizzo della funzione quadrato $(\cdot)^2$ serve a rendere positivi i contributi e a rendere il problema facilmente risolvibile. Sono possibili altre formulazioni con il modulo $|\cdot|$, o altre funzioni convesse, che portano a procedure di risoluzione generalmente più complesse.

Riscrivendo esplicitamente $\mathcal{E}(\underline{h})$, otteniamo

$$\mathcal{E}(\underline{h}) = \sum_{n=N}^{L} \left(d[n] - \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\, x[n-k]\right)^2$$

Per l'ottimizzazione calcoliamo il gradiente e annulliamo le sue componenti.

$$\nabla_{\underline{h}} \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_0} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_{N-1}} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(h)}{\partial h[\ell]} = \sum_{n=N}^{L} 2\left(d[n] - \sum_{k=0}^{N-1} h_0[k]\,x[n-k]\right)\left(-x[n-\ell]\right) = 0$$

$$\ell = 0, \dots, N-1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_0[k] \underbrace{\sum_{n=N}^{L} x[n-k]\,x[n-\ell]}_{r_x[k,\ell]} = \underbrace{\sum_{n=N}^{L} d[n]\,x[n-\ell]}_{r_{dx}[\ell]} \qquad \ell = 0 \dots N-1$$

$$\begin{bmatrix} r_x[0,0] & r_x[1,0] & \dots & r_x[N-1,0] \\ r_x[0,1] & r_x[1,1] & \dots & r_x[N-1,1] \\ r_x[0,2] & r_x[1,2] & \dots & r_x[N-1,2] \\ & & \ddots & \\ r_x[0,N-1] & r_x[1,N-1] & \dots & r_x[N-1,N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0[0] \\ h_0[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ h_0[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{dx}[N-1] \end{bmatrix} \qquad (N1)$$

$$\underline{\underline{R}}_x \left(\begin{matrix}\text{Matrice simmetrica} \\ \text{poiché } r_x[k,\ell] = r_x[\ell,k]\end{matrix}\right) \underline{h}_0 = \underline{r}_{dx}$$

$$\boxed{\underline{\underline{R}}_x\,\underline{h}_0 = \underline{r}_{dx}}$$

Equazione normale

$$\underline{h}_0 = \underline{\underline{R}}_x^{-1}\,\underline{r}_{dx} \qquad (*)$$

Dai dati vanno calcolati gli elementi della matrice $\underline{\underline{R}}_x$ e del vettore $\underline{r}_{dx}$ come segue:

$$\begin{cases} r_x[k,\ell] = \sum_{n=N}^{L} x[n-k]\,x[n-\ell] & k,\ell = 0,\dots,N-1 \\ r_{dx}[\ell] = \sum_{n=N}^{L} d[n]\,x[n-\ell] \end{cases}$$

Per valutare l'errore quadratico in condizioni di ottimalità, riscriviamo l'espressione dell'errore in funzione di $r_x[k,\ell]$ e $r_{dx}[\ell]$.

$$\mathcal{E} = \sum_{n=N}^{L} d^2[n] + \sum_{n=N}^{L} y^2[n] - 2\sum_{n=N}^{L} d[n]\,y[n]$$

$$= \sum_{n=N}^{L} d[n] + \sum_{n=N}^{L} \sum_{k_1=0}^{N-1} h[k_1]\,x[n-k_1] \sum_{k_2=0}^{N-1} h[k_2]\,x[n-k_2] -$$

$$- 2\sum_{n=N}^{L} d[n] \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\,x[n-k]$$

$$= \sum_{n=N}^{L} d^2[n] + \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h[k_1]\, h[k_2] \underbrace{\sum_{n=N}^{L} x[n-k_1]\, x[n-k_2]}$$

$$- 2 \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \underbrace{\sum_{n=N}^{L} d[n]\, x[n-k]}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=N}^{L} d^2[n]}_{\mathcal{E}_d} + \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h[k_1]\, h[k_2]\, r_x[k_1,k_2] - 2 \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\, r_{dx}[k]$$

In forma matriciale

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_d + \underline{h}^T \underline{\underline{R}}_x \underline{h} - 2\, \underline{h}^T \underline{r}_{dx}$$

In condizioni di ottimalità

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_d + \underline{h}_0^T \underbrace{\underline{\underline{R}}_x \underline{h}_0}_{\underline{r}_{dx}} - 2\, \underline{h}_0^T \underline{r}_{dx}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_d - \underline{h}_0^T \underline{r}_{dx} = \mathcal{E}_d - \underline{r}_{dx}^T \underline{\underline{R}}_x^{-1} \underline{r}_{dx}}$$

Minima somma quadratica.

Tutte le quantità in gioco $r_x[k,l]$, $r_{dx}[l]$ e $\mathcal{E}_d$ potrebbero essere divise per $L-N+1$ per tenere i numeri contenuti. I risultati ovviamente non cambiano poiché i fattori di normalizzazione compaiono ad entrambi i lati delle equazioni.

Per verificare che la soluzione (*) ottenuta sia un minimo per $\mathcal{E}(\underline{h})$ riscriviamo il gradiente in forma matriciale

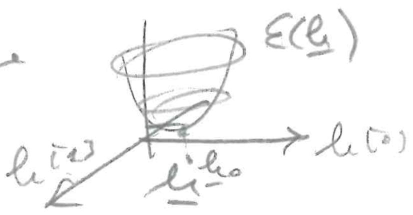
$$\nabla_{\underline{h}} \mathcal{E} = 2\, \underline{\underline{R}}_x \underline{h} - 2\, \underline{r}_{dx}$$

e calcoliamo l'Hessiano

$$\nabla_{\underline{h}}^2 \mathcal{E} = \underline{\underline{R}}_x$$

Ora se $\underline{\underline{R}}_x$ è definita positiva $\underline{h}_0$ è un punto di minimo.

Ma R_x può anche essere scritta come



$$R_x = \sum_{n=N}^{L} \underline{x}[n]\,\underline{x}^T[n]$$

Pertanto

$$\underline{z}^T \underline{\underline{R}}_x \underline{z} = \sum_{n=N}^{L} \underline{z}^T \underline{x}[n]\,\underline{x}^T[n]\,\underline{z} = \sum_{n=N}^{L} \left(\underline{z}^T \underline{x}[n]\right)^2 > 0$$

$\forall \underline{z}$ ($\underline{\underline{R}}_x$ è definita positiva)

La struttura della matrice R_x

Da una delle espressioni precedenti si vede come R_x sia stata ottenuta essenzialmente come somma dei prodotti esterni di $\underline{x}[n]$ con se stesso. Ma poiché $\underline{x}[n]$ è una finestra che scivola su una serie temporale si può supporre che $r_x[k,l]$ non dipenda da k e l separatamente ma dalla loro differenza

$$r_x[k,l] = r_x[k-l]. \quad (V1)$$

Questa ipotesi, che è analoga ad una assunzione di stazionarietà in senso lato (SSL o Wide-sense stationarity WSS), conferisce alla matrice R_x una speciale struttura

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \cdots & r_x[N-1] \\ r_x[-1] & r_x[0] & \cdots & r_x[N-2] \\ r_x[-2] & r_x[-1] & r_x[0] & r_x[N-3] \\ \vdots & & & \vdots \\ r_x[-N+1] & r_x[-N+2] & \cdots & r_x[0] \end{bmatrix}$$

Si tratta di una <u>MATRICE DI TOEPLITZ</u>: le diagonali principali hanno elementi uguali. Con il vincolo ulteriore di simmetria, $r_x[m] = r_x[-m]$, l'equazione normale diventa

$$\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & \dots & r_x[N-1] \\ r_x[1] & r_x[0] & \dots & r_x[N-2] \\ \vdots & & & \vdots \\ r_x[N-1] & r_x[N-2] & \dots & r_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o[0] \\ h_o[1] \\ \vdots \\ h_o[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \\ \vdots \\ r_{dx}[N-1] \end{bmatrix} \qquad (N2)$$

Pertanto l'equazione normale può essere impostata immediatamente dalla conoscenza di solo 2N parametri:

$\{r_x[m], m=0,\dots,N-1\}$ e di $\{r_{dx}[m], m=0,\dots,N-1\}$.

L'equazione normale (N1) formulata in generale va sotto il nome di: <u>METODO DELLA COVARIANZA</u>.

L'equazione normale (N2) formulata con il vincolo nella matrice R_x, va sotto il nome di: <u>METODO DELLA AUTOCORRELAZIONE</u>.

La differenza sta nel fatto che in (N1) non si fanno ipotesi al di fuori dei dati realmente disponibili. Viceversa in (N2) si può dimostrare che il vincolo (V1) è equivalente ad assumere che la sequenza è nulla al di fuori degli L campioni disponibili.

W3

FORMULAZIONE MATRICIALE COMPLESSIVA (CON LA PSEUDOINVERSA)

È possibile formulare il problema del filtro impostando il tutto come un grande sistema lineare sovradeterminato. Vediamo come.

Supponiamo di organizzare tutte le finestre osservate $\underline{x}[n]$, $n=N,\dots,L$ in una lunga matrice A

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} N \\ \begin{bmatrix} \underline{x}^T[N] \\ \underline{x}^T[N+1] \\ \underline{x}^T[N+2] \\ \vdots \\ \underline{x}^T[L] \end{bmatrix} \end{array} \; L-N+1$$

Il problema può essere formulato come il tentativo di risolvere il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{bmatrix} x[N] & x[N-1] & \dots & x[1] \\ x[N+1] & x[N] & \dots & x[2] \\ x[N+2] & x[N+1] & \dots & x[3] \\ x[N+3] & x[N+2] & \dots & x[4] \\ \vdots & & & \\ x[L-1] & x[L-2] & \dots & x[L-N] \\ x[L] & x[L-1] & \dots & x[L-N+1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[N] \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} d[N] \\ d[N+1] \\ d[N+2] \\ \vdots \\ d[L] \end{bmatrix} \; L-N+1$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{h} \doteq \underline{d}$$

$$\underset{(L-N+1)\times N}{\underline{\underline{A}}} \quad \underset{N}{\underline{h}} \quad \underset{L-N+1}{\underline{d}}$$

La minimizzazione dei quadrati (MSE) richiede che si trovi il vettore $\underline{h}_o$ che minimizza la norma quadratica

$$\mathcal{E}(\underline{h}) = \|\underline{\underline{A}}\,\underline{h} - \underline{d}\|_2 = (\underline{\underline{A}}\,\underline{h} - \underline{d})^T(\underline{\underline{A}}\,\underline{h} - \underline{d})$$

Esplicitando $\mathcal{E}(\underline{h}) = \underline{h}^T\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{h} + \underline{d}^T\underline{d} - \underline{d}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{h} - \underline{h}^T\underline{\underline{A}}^T\underline{d}$

$$= \underline{d}^T\underline{d} + \underline{h}^T\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{h} - 2\,\underline{d}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{h}.$$

Calcolando il gradiente e annullando, abbiamo

$$\cancel{2}\, \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{h}_0 - \cancel{2}\, \underline{\underline{A}}^T \underline{d} = \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{h}_0 = (A^T A)^{-1} A^T \underline{d}}$$

o inversa di Moore-Penrose

La quantità $A^\# = (A^T A)^{-1} A^T$ è detta pseudoinversa di $\underline{A}$.

L'errore quadratico risultante dalla soluzione ottima è

$$\boxed{\mathcal{E}(\underline{h}_0) = \underline{d}^T \underline{d} - \underline{h}_0^T \underline{\underline{A}}^T \underline{d} = \underline{d}^T \underline{d} - \underline{d}^T \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{\underline{A}}^T \underline{d}}$$

La soluzione e l'errore ottenuti sono esattamente gli stessi della formulazione esplicita MSE.

FORMULAZIONE STOCASTICA

Nella formulazione probabilistica del problema si assume che $x[n]$ sia un processo aleatorio almeno stazionario in senso lato. Si suppone inoltre che $d[n]$ sia stazionario nella media quadratica e congiuntamente stazionario con $x[n]$. L'obiettivo è la minimizzazione dell'errore quadratico medio (MEAN SQUARED ERROR)

$$\mathcal{E}(\underline{h}) = E\left[(d[n] - y[n])^2\right]$$

Scrivendo $\mathcal{E}(\underline{h})$ esplicitamente e annullandone il gradiente, otteniamo

$$\mathcal{E}(\underline{h}) = E\left[\left(d[n] - \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\underline{h})}{\partial h[l]} = \cancel{2}\, E\left[\left(d[n] - \sum_{k=0}^{N-1} h_o[k]x[n-k]\right)(-x[n-l])\right] = 0 \qquad l = 0, \dots, N-1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_o[k]\, E\left[x[n-k]\,x[n-l]\right] = E\left[d[n]\,x[n-l]\right] \qquad l = 0, \dots, N-1$$

Assumendo stazionarietà

$$E[x[n-k]\,x[n-l]] = R_x[l-k] \qquad \text{(Autocorrelazione di } x[n])$$

$$E[d[n]\,x[n-l]] = R_{dx}[l] \qquad \text{(Mutua correlazione tra } d[n] \text{ e } x[n])$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} h_o[k]\, R_x[l-k] = R_{dx}[l] \qquad l = 0, \dots, N-1}$$

Equazione normale

Posta in forma matriciale ci fornisce di nuovo il sistema con matrice dei coefficienti Toeplitz

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \dots & R_x[N-1] \\ R_x[1] & R_x[0] & & R_x[N-2] \\ \vdots & & & \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o[0] \\ h_o[1] \\ \vdots \\ h_o[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[1] \\ \vdots \\ R_{dx}[N-1] \end{bmatrix}$$

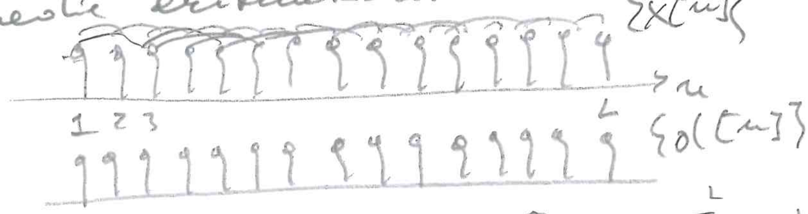
$$\underline{\underline{R}}_x \quad \underline{h}_o = \underline{R}_{dx}$$

$$\boxed{\underline{h}_o = \underline{\underline{R}}_x^{-1}\, \underline{R}_{dx}}$$

In condizioni di ottimalità l'errore quadratico medio diventa

$$\boxed{\mathcal{E}(\underline{h}_o) = E[d^2] - \underline{h}_o^T \underline{R}_{dx} = E[d^2] - \underline{R}_{dx}^T \underline{\underline{R}}_x^{-1} \underline{R}_{dx}}$$

Ai fini dell'utilizzo della soluzione stocastica è necessario stimare $\{R_x[m],\ m=0,\dots,N-1\}$ e $\{R_{dx}[m],\ m=0,\dots,N-1\}$ dai dati disponibili. Supponiamo di disporre di $x[n]$ e $d[n]$ per $n=1,\dots,L$ e stimare i momenti con delle medie aritmetiche.



$$\hat{R}_x[0] = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L} x[n]^2 \qquad \hat{R}_{dx}[0] = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{L} d[n]\,x[n]$$

$$\hat{R}_x[1] = \frac{1}{L-1}\sum_{n=2}^{L} x[n]\,x[n-1] \qquad \hat{R}_{dx}[1] = \frac{1}{L-1}\sum_{n=2}^{L} d[n]\,x[n-1]$$

$$\hat{R}_x[2] = \frac{1}{L-2}\sum_{n=3}^{L} x[n]\,x[n-2] \qquad \hat{R}_{dx}[2] = \frac{1}{L-2}\sum_{n=3}^{L} d[n]\,x[n-2]$$

$$\vdots$$

$$\hat{R}_x[m] = \frac{1}{L-m}\sum_{n=m+1}^{L} x[n]\,x[n-m] \qquad \hat{R}_{dx}[m] = \frac{1}{L-m}\sum_{n=m+1}^{L} d[n]\,x[n-m]$$

$$\vdots$$

Secondo questo schema c'è una leggera differenza tra il numero di campioni sui quali vengono stimati i momenti con time-lag diverso.
Una formula che può andare bene per tutti anche non usa proprio tutti i dati è

$$\begin{cases} \hat{R}_x[m] = \dfrac{1}{L-N+1}\displaystyle\sum_{n=N}^{L} x[n]\,x[n-m] & m=0,\dots,N-1 \\ \hat{R}_{dx}[m] = \dfrac{1}{L-N+1}\displaystyle\sum_{n=N}^{L} d[n]\,x[n-m] \end{cases}$$

Se si assume che la sequenza $x[n]$ sia nulla per $n<1$

$$\begin{cases} \hat{R}_x[m] = \dfrac{1}{L}\displaystyle\sum_{n=1}^{L} x[n]\,x[n-m] & m=0,\dots,N-1 \\ R_{dx}[m] = \dfrac{1}{L}\displaystyle\sum_{n=1}^{L} d[n]\,x[n-m] \end{cases}$$

Le differenze tra le varie formule sono veramente trascurabili se $L \gg N$.

Applichiamo ora i risultati ottenuti ad alcuni degli esempi.

$\boxed{A1}$ Filtraggio di segnale rumoroso

$$x[n] = s[n] + w[n]$$; stimare $s[n]$ con un FIR di ordine N

$s[n]$ sequenza stocastica SSL con media nulla e autocorrelazione $\{R_s[m]\}$.
$w[n]$ sequenza stocastica SSL di rumore con media nulla e autocorrelazione $R_w[m] = \sigma_w^2 \delta[m]$ (bianca)
$s[n]$ e $w[n]$ sono congiuntamente stazionarie e incoerenti
i.e. $R_{sw}[m] = 0 \quad \forall m$.

Quindi $R_x[m] = E[x[n]x[n-m]] = E[(s[n]+w[n])(s[n-m]+w[n-m])]$

$$= E[s[n]s[n-m]] + \cancel{E[w[n]s[n-m]]} + \cancel{E[s[n]w[n-m]]} + E[w[n]w[n-m]]$$

$$= R_s[m] + \sigma_w^2 \delta[m]$$

$$R_{sx}[m] = E[s[n]x[n-m]] = E[s[n](s[n-m]+w[n-m])]$$

$$= E[s[n]s[n-m]] + \underbrace{\cancel{E[s[n]w[n-m]]}}_{0}$$

$$= R_s[m]$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{bmatrix} R_s[0]+\sigma_w^2 & R_s[1] & \cdots & R_s[N-1] \\ R_s[1] & R_s[0]+\sigma_w^2 & & R_s[N-2] \\ & & \ddots & \\ R_s[N-1] & & & R_s[0]+\sigma_w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0[0] \\ h_0[1] \\ \vdots \\ h_0[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s[0] \\ R_s[1] \\ \vdots \\ R_s[N-1] \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{R}}_s + \sigma_w^2 \underline{\underline{I}}_N)\, \underline{h}_0 = \underline{R}_s$$

$\boxed{A2}$ Predizione a un passo

$x[n]$ sequenza stocastica SSL a media nulla e autocorrelazione $R_x[m]$.

$d[n] = x[n+1]$

$$R_{dx}[m] = E\left[x[n+1]\,x[n-m]\right] = R_x[m+1]$$

L'equazione normale diventa

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \cdots & R_x[N-1] \\ R_x[1] & R_x[0] & & R_x[N-2] \\ & & \ddots & \\ R_x[N-1] & \cdots & \cdots & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o[0] \\ h_o[1] \\ \vdots \\ h_o[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x[1] \\ R_x[2] \\ \vdots \\ R_x[N] \end{bmatrix}$$

$\boxed{A4}$ Deconvoluzione

$s[n]$ sequenza stocastica a media nulla e stazionaria in senso lato con autocorrelazione $R_s[m]$.

$x[n]$ uscita di un sistema lineare causale avente risposta impulsiva $g[n]$, $n = 0, \dots, M-1$

$$x[n] = (g * s)[n] = \sum_{k=0}^{M-1} g[k]\,s[n-k]$$

$$R_x[m] = E[x[n]x[n-m]] = E\left[\sum_{k_1=0}^{M-1} g[k_1]\,s[n-k_1] \sum_{k_2=0}^{M-1} g[k_2]\,s[n-m-k_2]\right]$$

$$= \sum_{k_1=0}^{M-1} g[k_1] \sum_{k_2=0}^{M-1} g[k_2] \underbrace{E\left[s[n-k_1]\,s[n-m-k_2]\right]}_{R_s[m+k_2-k_1]}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{M-1} g[k_1] \sum_{k_2=0}^{M-1} g[k_2]\, R_s[m-k_1-(-k_2)] = \sum_{k_1=0}^{M-1} g[k_1] \sum_{k_3=0}^{-M+1} g[-k_3]\, R_s[m-k_1-k_3] \quad k_3 = -k_2$$

g flipped

$$= (g * g(-) * R_s)[m] = (r_g * R_s)[m]$$

autocorrelazione deterministica di g

$$R_{sx}[m] = E[s[n]\,x[n-m]] = E\left[s[n] \sum_{k=0}^{M-1} g[k]\,s[n-m-k]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} g[k]\, E\left[s[n]\,s[n-m-k]\right] = \sum_{k=0}^{M-1} g[k]\, R_s[m+k]$$

$$= (g(-) * R_s)[m]$$

I valori ottenuti vanno messi nell'eq. normale.