

FILTRI DI
BUTTERWORTH

Corso di Telecomunicazioni

Prof. FRANCESCO A.N. PAULORI

Corso di TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE
NUMERICA DEI SEGNALE (SUN)

A.A. 2014-15

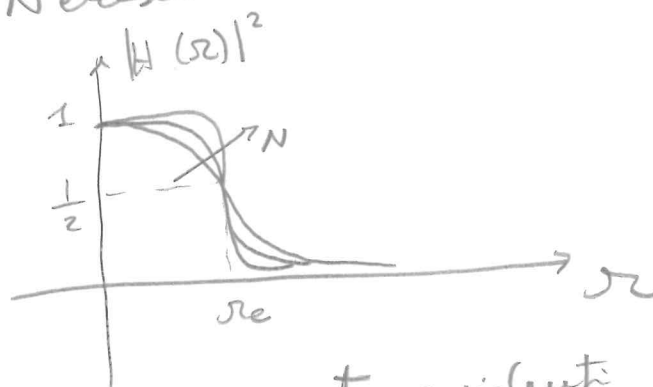
FILTRI DI BUTTERWORTH

B1

Un filtro appartenente a questa categoria ha la risposta in frequenza di energia del tipo pass-banda

$$|H_{LP}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}, \text{ dove } N \text{ determina}$$

l'ordine del filtro. Disegnando le famiglie di curve per N crescente



Per rendere maggiormente evidenti le caratteristiche di banda passante, banda di transizione e banda occlusa, riparametrizziamo la funzione scrivendo

$$|H_{LP}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}$$

con per $\omega = \omega_p$ $|H_n(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$

Imponendo che

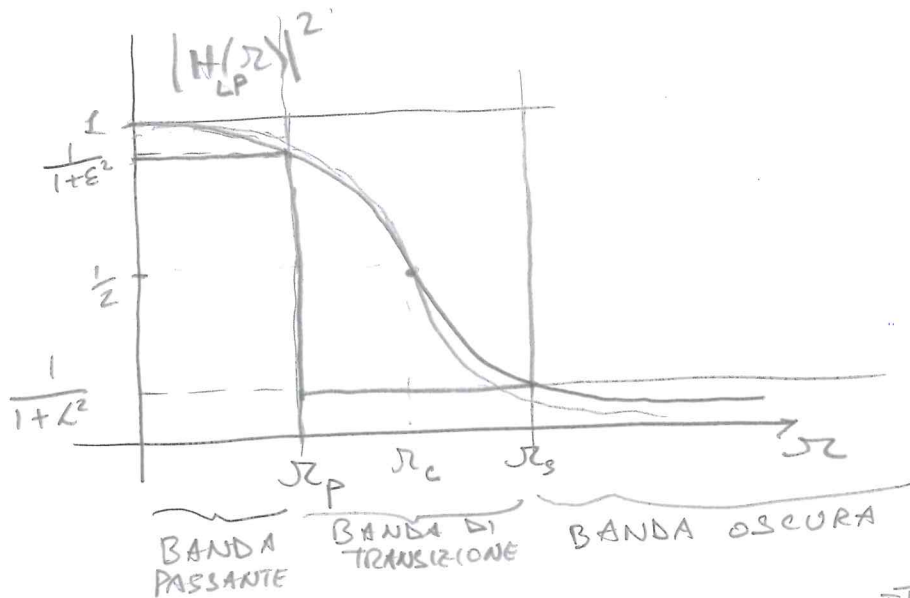
$$\frac{1}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N}}$$

$$\lambda^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N}$$

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} = \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^N \Rightarrow N = \frac{\log \frac{\lambda}{\varepsilon}}{\log \frac{\omega_s}{\omega_p}}$$

Dati ω_p e ω_s con λ ed ε

$$N = \left\lceil \frac{\log \lambda / \varepsilon}{\log \omega_s / \omega_p} \right\rceil \quad \left(\text{arrotondando le specifiche (ovvero la risposta è all'interno) alla intera} \right)$$



Per arrivare alla definizione di una $H_{LP}(s)$ bisogna ricordare che

$$|H_{LP}(j\omega)|^2 = H_{LP}(s) H_{LP}(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

Per questo operando la sostituzione $j\omega = \frac{s}{j}$ otteniamo,

$$H_{LP}(s) H_{LP}(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-s^2}{\omega_c^2}\right)^N}$$

I poli di $H_{LP}(s) H_{LP}(-s)$ sono soluzioni dell'equazione

$$1 + \left(\frac{-s^2}{\omega_c^2}\right)^N = 0 \Rightarrow (-1)^N \frac{s^{2N}}{\omega_c^{2N}} = -1 \Rightarrow s^{2N} = (-1)^{N+1} \omega_c^{2N}$$

$$s = \rho e^{j\theta}$$

$$\rho^{2N} e^{j2N\theta} = (-1)^{N+1} \omega_c^{2N} \Rightarrow \rho e^{j2N\theta} = e^{j\pi(N+1)} \omega_c^{2N}$$

$$\begin{cases} \rho = \omega_c \\ 2N\theta = \pi(N+1) + K 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \omega_c \\ \theta = \frac{\pi(N+1)}{2N} + K \frac{2\pi}{2N} \end{cases}$$

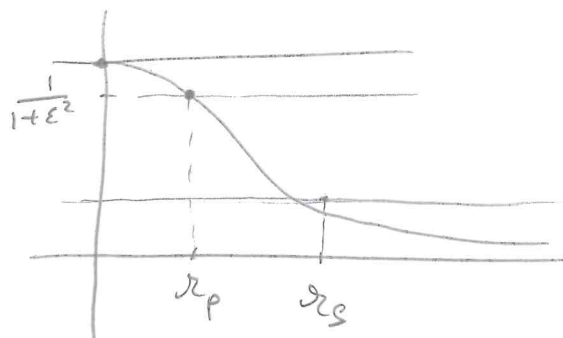
$$\boxed{\begin{cases} \rho = \omega_c \\ \theta_K = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{N} K \\ K = 0, 1, \dots, 2N-1 \end{cases}}$$

POLI DI
 $H_{LP}(s) H_{LP}(-s)$

Trovato l'ordine N dobbiamo trovare ω_c con
 $\omega_p < \omega_c < \omega_s$

B4

Sol.1) Se imponiamo il passaggio a ω_p per $\frac{1}{1+\epsilon^2}$



$$\frac{1}{1+\epsilon^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\omega_c = \omega_p \epsilon^{-1/N}$$

$$\omega_c = 2\pi f_p \epsilon^{-1/N} = 2\pi \cdot 4800 \cdot 0.6^{-1/2} = 31471 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad f_c = 5003 [\text{Hz}]$$

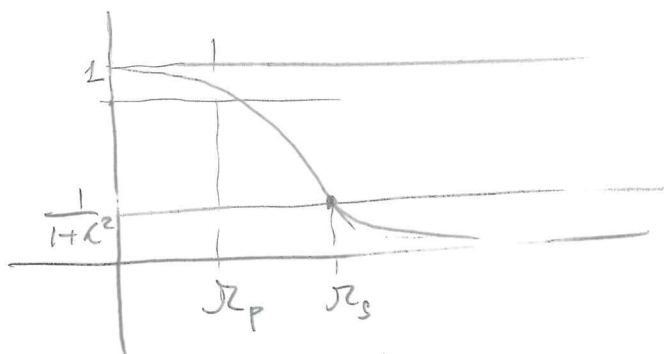
Questo automaticamente soddisfa la specifica a ω_s ,
 infatti.

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\left(\frac{f_s}{f_c}\right)^{2N}} = 0.0358 < 0.1$$

Sol.2) Se imponiamo il passaggio a ω_s per $\frac{1}{1+\epsilon^2}$

$$\frac{1}{1+\epsilon^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\omega_c = \omega_s \epsilon^{-1/N}$$

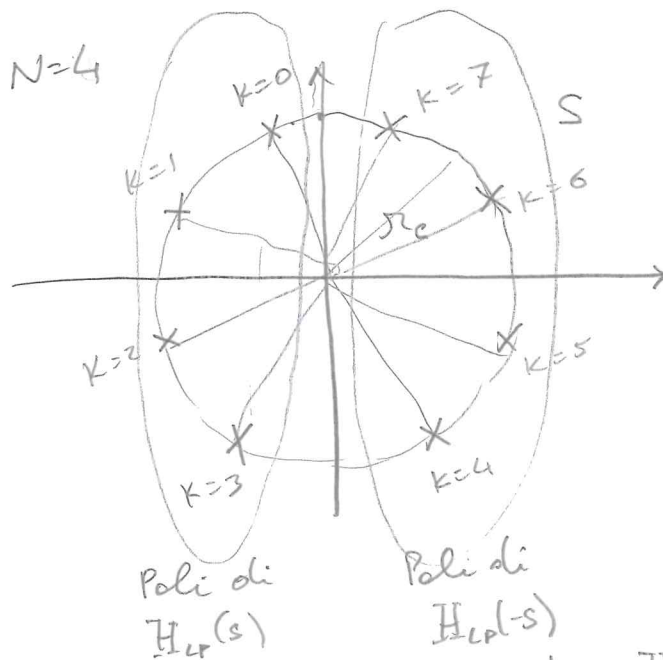


$$\omega_c = 2\pi f_s \epsilon^{-1/N} = 2\pi \cdot 5500 \cdot 3^{-1/2} = 31534 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad f_c = 5013 [\text{Hz}]$$

Questo automaticamente soddisfa la specifica a ω_p

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\left(\frac{f_p}{f_c}\right)^{2N}} = 0.7447 > 0.73$$

Si sceglie la soluzione più adatta al problema specifico, ovvero
 se il filtro deve essere meno distortante o più selettivo.



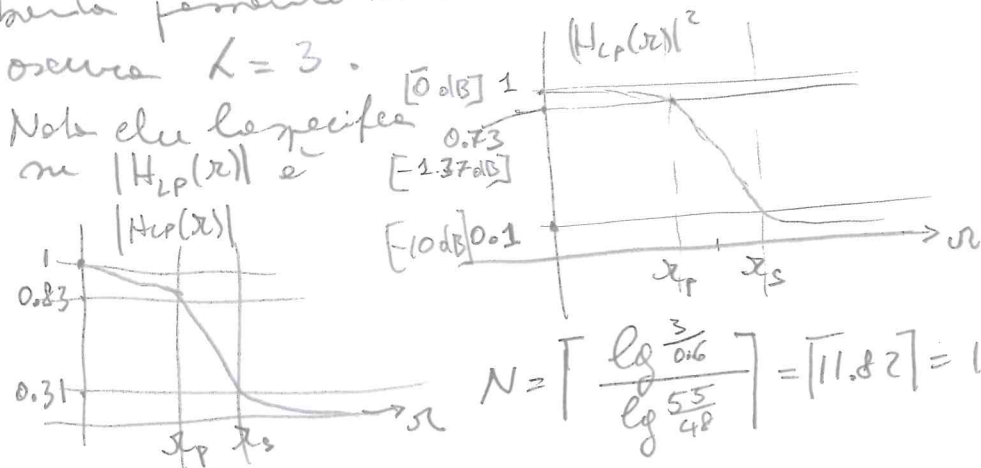
La ovvia simmetria dei poli tra $H_{LP}(s)$ e $H_{LP}(-s)$ è ovvia, e quindi quelli stabili a $H_{LP}(s)$. Pertanto

$$H_{LP}(s) = \frac{(-1)^N s_0 \dots s_{N-1}}{(s-s_0) \dots (s-s_{N-1})}$$

$$s_k = r_c e^{j\theta_k}; \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{N}k, \quad k=0, \dots, N-1$$

Il numeratore è stato introdotto per ottenere qualche statico unitario, ovvero $H_{LP}(z)=1$.

Esempio 1. Progettare un passa-basso di Butterworth con frequenza di banda passante e oscura rispettivamente di $f_p = 4.8 \text{ KHz}$; $f_s = 5.5 \text{ KHz}$. Le specifiche nella banda passante sono $\epsilon = 0.6$ e nella banda oscura $L = 3$.



$$N = \left\lceil \frac{\lg \frac{3}{0.6}}{\lg \frac{5.5}{4.8}} \right\rceil = \lceil 11.82 \rceil = 12$$

ESEMPLO 2: A volte l'ordine del filtro è imposto dalla complessità massima accettabile. Ad esempio, si decide che $N=3$ e che la freq. di taglio deve essere di 5 KHz, abbiamo $\Omega_c = 2\pi 5000 = 31416 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

$$|H_{LP}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^6}$$

La banda di transizione possiamo volutamente fissarla in certe frequenze Ω_p e Ω_s che corrisponderanno, per esempio, al 10% sotto il valore in $\Omega=0$ e al 10% sopra lo zero, ovvero

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^6} = 0.9 \quad ; \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^6} = 0.1$$

$$\Omega_p = \Omega_c \left(\frac{1}{0.9} - 1 \right)^{1/6} = 21783$$

$$f_p = 3467 \text{ Hz}$$

$$\Omega_s = \Omega_c \left(\frac{1}{0.1} - 1 \right)^{1/6} = 45310$$

$$f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = 7211 \text{ Hz}$$

