

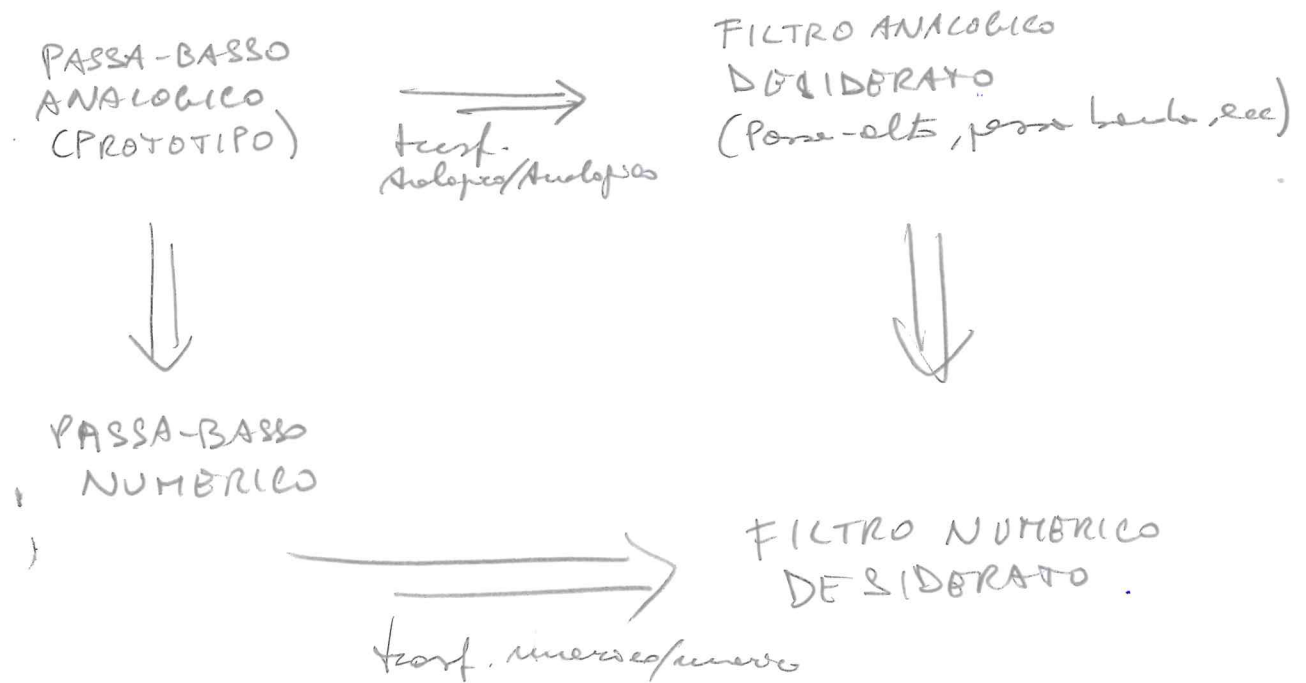
CORSO DI
TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE
NUMERICA DEI SEGNALI

Dipartimento di Ingegneria Industriale
e dell'Informazione
SECONDA UNIVERSITA' DI NAPOLI (SUN)

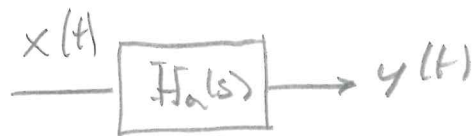
Prof. FRANCESCO A.N. PAUTIERI
ottobre 2014

PROGETTO DI FILTRI NUMERICI
DA FILTRI ANALOGICI

SCHEMA DI PROGETTO PER UN FILTRO NUMERICO DA PROTOTIPO ANALOGICO



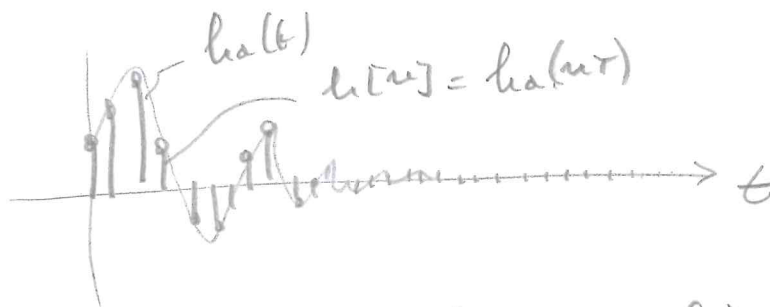
SIMULAZIONE DI SISTEMI TEMPO-CONTINUO MEDIANTE FILTRI NUMERICI



$$h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_a(s)] \quad \text{causale e stabile}$$

METODO DEL CAMPIONAMENTO DELLA RISPOSTA IMPULSIVA

Se del sistema analogico si dispone della risposta impulsiva $h_a(t)$, l'idea più immediata per simulare il sistema è realizzare un filtro con una risposta impulsiva ottenuta dai campioni di $h_a(t)$



Quindi si decide di trancare $h[n]$ a N campioni, magari perché la risposta (stabile) non è propriamente, possiamo realizzare il filtro FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

La risposta nel dominio z è

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k}$$

e in frequenza normalizzata

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-j2\pi\omega k}$$

Ovviamente $H(z) = \underbrace{z^{-N+1}}_{\substack{\text{polinomio con potenze positive} \\ \text{(poli nell'origine)}}} \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{N-k-1}$ (solo zeri)

e il filtro è certamente stabile con $N-1$ poli nell'origine e $N-1$ zeri.

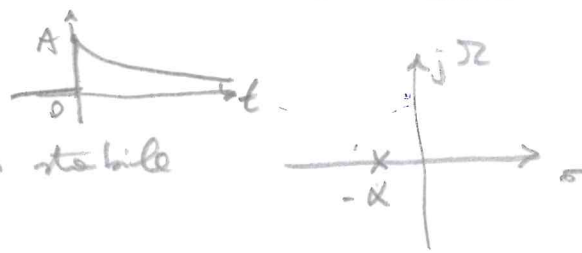
Lo complemento computazionale di questo realizza un sistema di ordine $O(N)$. Quando le frequenze di campionamento in gioco sono elevate e le risposte lunghe (relativamente), la complessità può diventare notevole.

Se, si dispone di una espressione analitica di $H(s)$ e di $h(t)$ si può ottenere un filtro IIR, (che quindi contiene anche parte ricorsiva, che "costa" meno dal punto di vista computazionale)

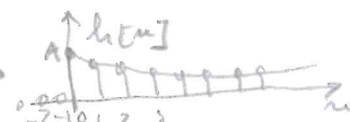
Eserciziamo questa idea con un esempio:

$$\begin{cases} h(t) = A e^{-\alpha t} u(t); \alpha > 0 \\ H(s) = \frac{A}{s + \alpha} \end{cases}$$

1 polo stabile



Campionando $h(t)$ otteniamo

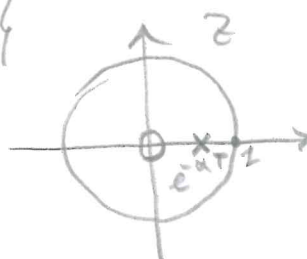
$$h[n] = h_a(nT) = A e^{-\alpha nT} u[n] \quad \forall n$$


Calcolando la Z-transformata (qui senza troncare)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\alpha nT} z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha T} z^{-1})^n = A \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

$$\text{e } |e^{-\alpha T} z^{-1}| < 1 \Rightarrow \text{ROC} = \{z : |z| > e^{-\alpha T}\}$$

$$H(z) = A \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$



- Un polo stabile
- uno zero in $z=0$

la risposta armonica è:

3

$$H(s) = \frac{A}{1 - e^{-sT} e^{-j2\pi\nu T}}$$

e l'equazione alle differenze da realizzare

$$y[n] = e^{-sT} y[n-1] + A x[n] \quad (\text{IR})$$

La complessità computazionale non è drasticamente alta rispetto alla soluzione FIR in quanto la parte ricorsiva viene calcolata in maniera compatta delle risposte impulsive di durata infinita (semi-infinita)

Algoritmi in generale:

1) Da $H_a(s)$ ottieni $h_a(t)$

2) Campiona $h_a(t)$ e ottieni la z -trasformata

ovvero

$$H(z) = Z \left[\mathcal{L}^{-1} [H_a(s)] \Big|_{t=nT} \right] \quad (1)$$

Questa tecnica è denominata:

- a) TECNICA DEL CAMPIONAMENTO DELLA RISPOSTA IMPULSIVA
- b) TECNICA DELL'INVARIANZA ALL'IMPULSO ^(manifattura) _(risposta in)

Quando non si dispone di tabelle di trasformate di Laplace con le rispettive antitrasformate, si può rapidamente passare alla versione campionata e ottenere $H(z)$. Vedi tabelle da [Stein & Hurl, Prentice Hall, 1950]

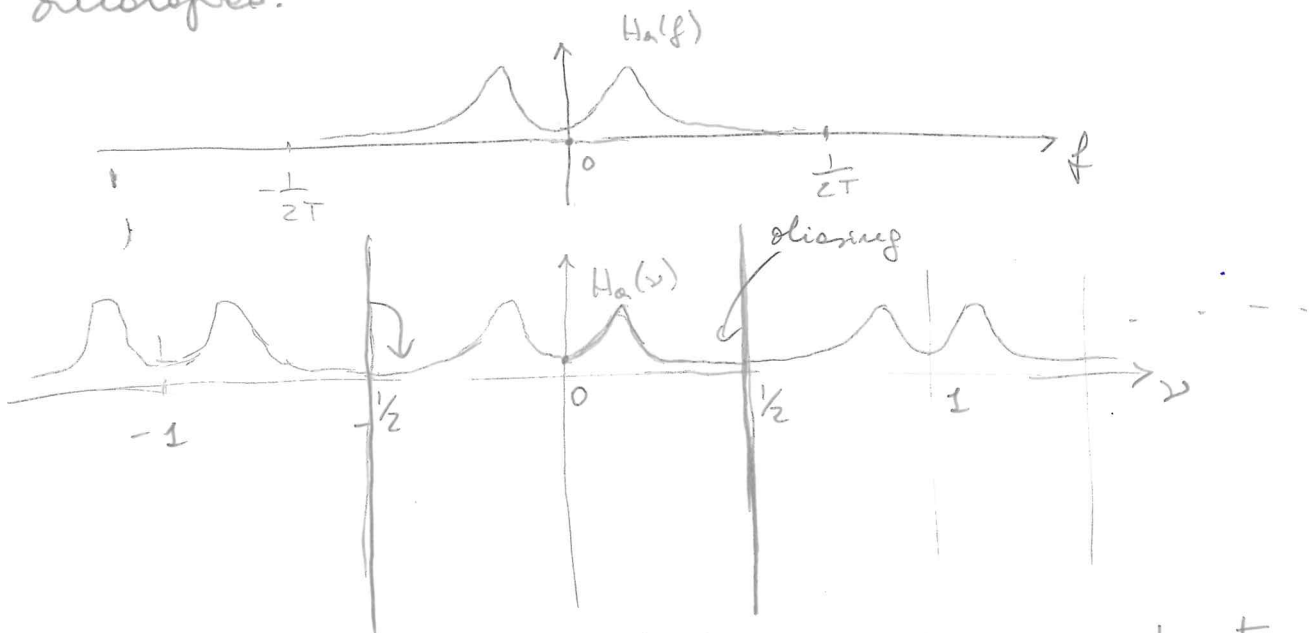
$$H_a(s) \longleftrightarrow h_a(t) \longleftrightarrow h_a(nT) \longleftrightarrow H(z)$$



La tecnica del campionamento dello *response* impulsivo 3^{bs}.
 rappresenta una buona approssimazione a $\tilde{H}_a(s)$ per di
 utilizzare frequenze di campionamento sufficientemente elevate.
 Questo si vede ricorrendo che

$$H(\nu) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi\nu}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(\frac{\nu - k}{T}\right)$$

dove $H_a(f) = H_a(s) \Big|_{s=e^{j2\pi f}}$ è la *response* analogica del filtro
 analogico.

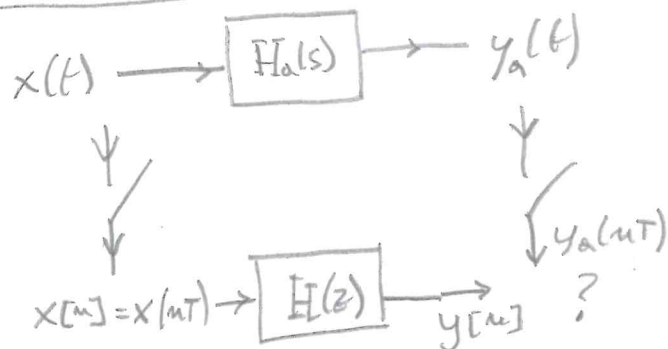


La *response* analogica del filtro numerico sarà tanto
 migliore quanto minore sarà l'aliasing nel campionamento
 di $h_a(t)$, come mostrato nella figura precedente.

La *response* di un sistema casuale non è mai
 esattamente limitata in banda. È ~~meno~~ ^{meno o} ~~occultata~~ ^{meno} nella
 di $\frac{1}{T}$ o secondo del tipo di filtro e della *response*
 desiderata. Per esempio un filtro passa-alta
 non può essere realizzato perché la banda infinita.
 Un passa-banda con frequenza massima elevata in
 ma con una frequenza di campionamento ben
 dimensionata.

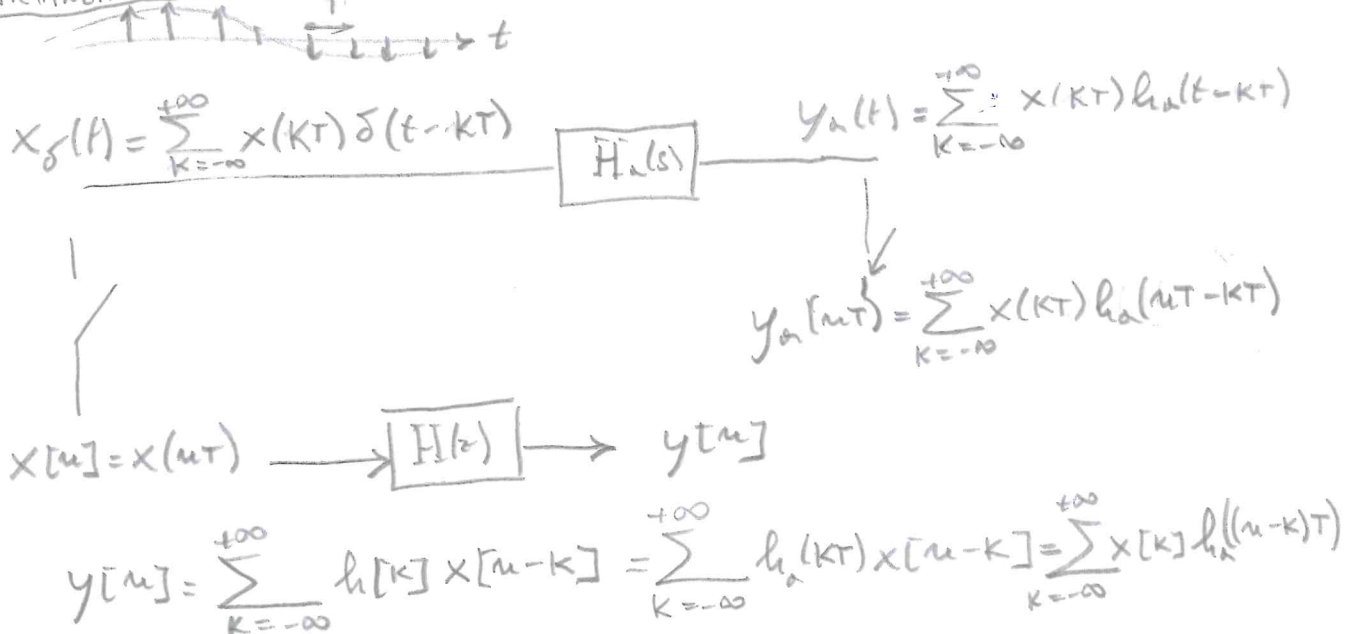
METODO DELL' INVARIANZA ALL'INGRESSO

4



La figura mostra un sistema tempo-continuo e un sistema tempo-discreto che mira a simulare il primo. Se il sistema discreto opera numericamente sui campioni dell'ingresso $x(t)$, che relazione c'è tra $y[n]$ e $y_a(nT)$? E' evidente che $H(z)$ mira ad una approssimazione più fedele possibile di $H_a(s)$ in cui $y[n]$ riproduce al meglio $y_a(nT)$. Una esatta coincidenza tra $y[n]$ e $y_a(nT)$ è probabilmente senza speranza a meno che non si restringe la classe dei segnali $x(t)$ in ingresso al sistema.

INVARIANZA ALL'INGRESSO



La figura mostra il concetto quando al sistema analogico viene presentato un segnale ideale $x_\delta(t)$ costituito da una sequenza di delta di Dirac con aree corrispondenti ai valori campionati.

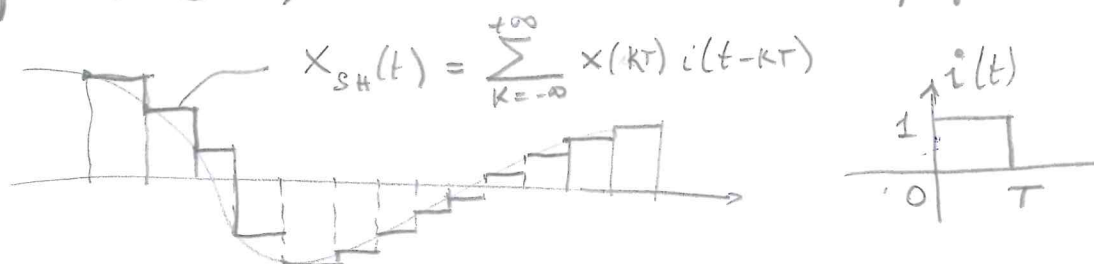
Si noti come nel caso tempo-discreto, x è utilizzato una lista costituita dai campioni di $h(t)$ e la coincidenza delle uscite è perfetta! la formula è la (1) di pag. 3.

Questo è la ragione della nomenclatura: x il segnale d'ingresso è un impulso, o una sovrapposizione di impulsi, il sistema discreto simula esattamente il sistema analogico.

INVARIANZA AL GRADINO

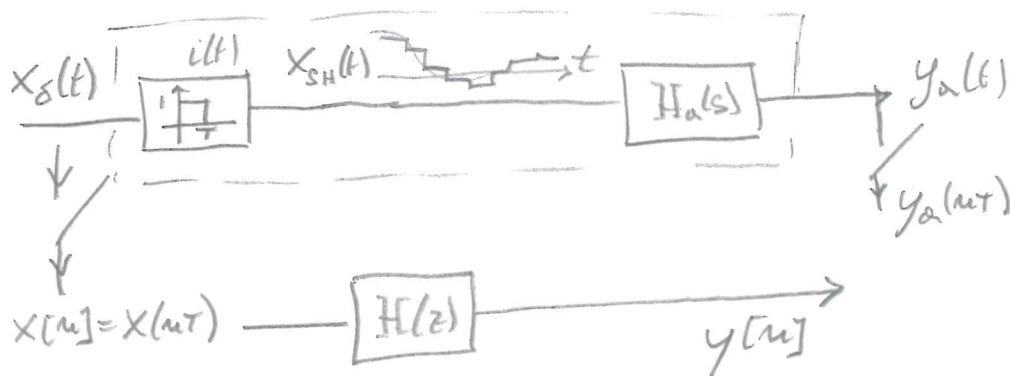
È evidente che la situazione analizzata è certamente irrealistica in quanto un segnale analogico non sarà mai un treno di impulsi di Dirac. Comunque l'analisi ideologica ci consente di analizzare le capacità di simulazione del filtro numerico per altri tipi di ingressi.

Se restringiamo la classe dei segnali analogici posti all'ingresso del sistema $H_a(s)$ ai segnali interpolati "sample-and-hold" come in figura



potremo cercare anche qui una equivalenza.

Notare che $x_{SH}(t)$ può essere ottenuto come convoluzione di $x(t)$ con $i(t)$ e quindi lo schema diventa



Pertanto l'equivalenza può essere ricavata come invarianza all'impulso per il sistema che compunge la cascata di $i(t)$ e $h_a(t)$, ovvero

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{Y}^{-1} \left[I(s) H_a(s) \right] \right]_{t=nT}$$

dove $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$.

Poiché $i(t) = u(t) - u(t-T)$; $I(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{Y}^{-1} \left[(1 - e^{-sT}) \frac{H_a(s)}{s} \right] \right]_{t=nT} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{Y}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s} \right] \right]_{t=nT}$$

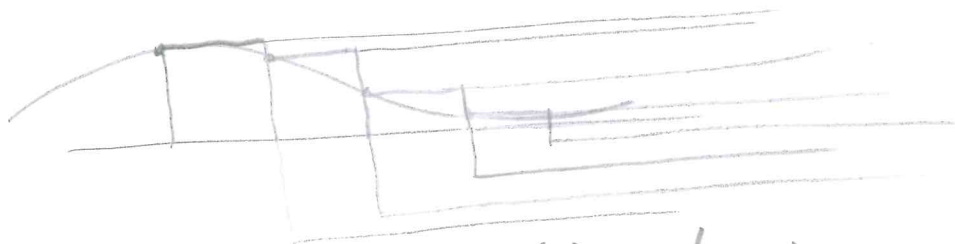
$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{Y}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s} \right] \right]_{t=nT}$$

FORMULA DELL'INVARIANZA
AL GRADINO
(2)

La formula trovata muove l'equivalenza del sistema tempo discreto a quello analogo all'ingresso è una concatenazione di impulsi rettangolari di durata T . È noto che la rappresentazione

$x_{SH}(t)$ può essere descritta come sovrapposizione di gradini poiché $i(t) = u(t) - u(t-T)$

$$x_{SH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) i(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) u(t - nT) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) u(t - nT - T)$$



Da qui la nomenclatura (2). La stessa relazione (2) quindi può essere ottenuta applicando un ^{gradino} all'ingresso: $x(t) = u(t)$ e imponendo l'uguaglianza di $y_a(nT)$ e $y[n]$ (come ai testi di Controllo Automatico)

Infatti se $x(t) = u(t)$, $y(t) = (h * u)(t)$

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} ; x[n] = u(nT) ; X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

7

$$y[n] = (h * x)[n] ; Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y_a(nT) = y[n]$$

$$\Uparrow z$$

$$\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]\right]_{t=nT} = Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]\right]_{t=nT} \quad \square$$

Esempio Ripetiamo l'esempio precedente per questa

funzione $H(s) = \frac{A}{s+\alpha} \quad \alpha > 0$

$$H(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s(s+\alpha)}\right]\right]_{t=nT}$$

$$\frac{1}{s(s+\alpha)} = \frac{B}{s} + \frac{C}{s+\alpha} ; B = \frac{1}{s+\alpha}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{\alpha} ; C = \frac{1}{s}\bigg|_{s=-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

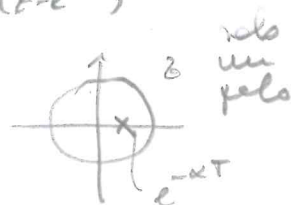
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+\alpha)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{s+\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha}(u(t) - e^{-\alpha t}u(t))$$

$$\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+\alpha)}\right]\right]_{t=nT} = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{\alpha}(u(nT) - e^{-\alpha nT}u(nT))\right] = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}\right] = \frac{z}{\alpha} \frac{z - e^{-\alpha T}z + 1}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})} = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} \frac{z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$$

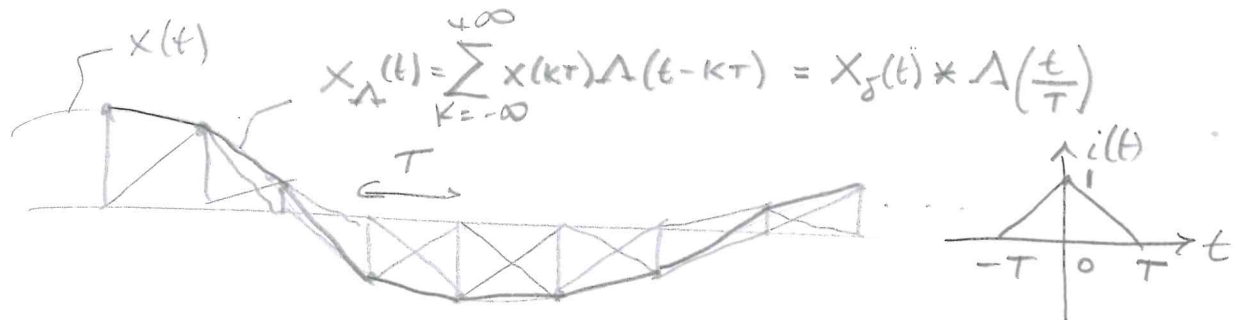
$$H(z) = \frac{A(1-e^{-\alpha T})}{\alpha} (1-z^{-1}) \frac{z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})} = \frac{A(1-e^{-\alpha T})}{\alpha} \frac{z}{z(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$$

$$= \frac{A(1-e^{-\alpha T})}{\alpha} \frac{1}{z-e^{-\alpha T}} = \frac{A(1-e^{-\alpha T})}{\alpha} \frac{z^{-1}}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}$$



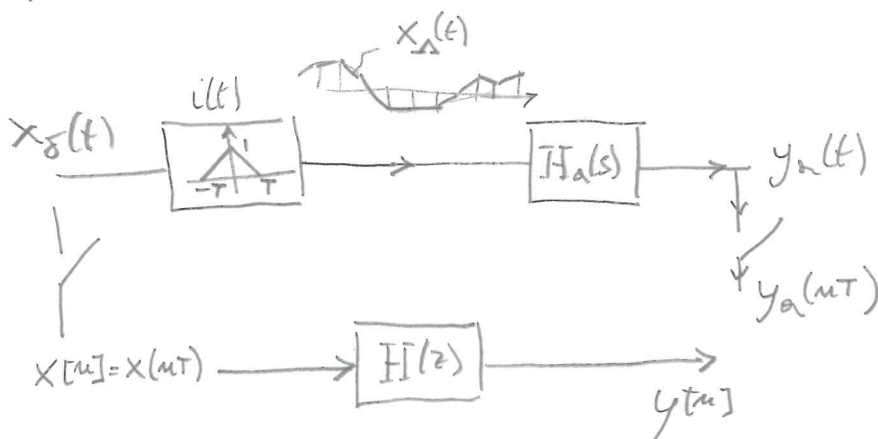
$$y[n] = e^{-\alpha T} y[n-1] + \frac{A(1-e^{-\alpha T})}{\alpha} x[n-1]$$

L'idea appena esposta può essere applicata allo scenario in cui il segnale all'ingresso del sistema analogico sia ottenuto mediante una interpolazione migliore del ZOH, come nel caso delle interpolazioni lineari.



La figura mostra come l'interpolazione lineare possa essere vista come la sovrapposizione di tanti triangoli centrati a nT , $\forall n$, ovvero come la convoluzione del segnale campionato idealmente con le delta di Dirac e la funzione triangolare $\Delta(t/T)$.

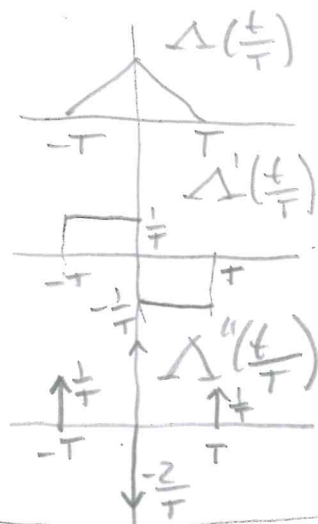
L'equivalenza quindi si può applicare allo schema seguente.



$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{Y}^{-1} \left[I(s) H_a(s) \right] \right]_{t=nT} \quad \text{dove } I(s) = \mathcal{Y}^{-1} \left[\Delta\left(\frac{t}{T}\right) \right]$$

Il calcolo di $I(s)$ è abbastanza semplice usando il teorema delle derivate (ripetuto di seguito per completezza) ed è

$$I(s) = \left(\frac{1}{T} e^{sT} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-sT} \right) \frac{1}{s^2}$$



$$\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{T} e^{sT} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-sT} \right)$$

$$\uparrow \frac{1}{s^2}$$

$$\Delta''\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{2}{T} \delta(t) + \frac{1}{T} \delta(t-T) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{sT}}{T} - \frac{2}{T} + \frac{e^{-sT}}{T}$$

Inserendo $\Delta(s)$ nella formula generale otteniamo

$$H(z) = \frac{1}{T} (z - 2 + z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s^2} \right] \right]_{t=nT}$$

$$= \frac{z^{-1}}{T} (z^2 - 2z + z) \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s^2} \right] \right]_{t=nT}$$

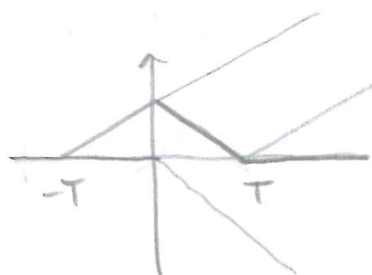
$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s^2} \right] \right]_{t=nT}$$

FORMULA DELL'INVARIANZA ALLA RAMPA.

(3)

La non idealità deriva dal fatto che $x_\Delta(t)$ può essere visto come la sovrapposizione di rampa scalate e traslate.

Infatti perché $\Delta\left(\frac{t}{T}\right) = x(t+T) - x(t) + x(t-T)$, otteniamo



$$x_\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Delta(t - nT + T) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Delta(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Delta(t - nT - T)$$

Analogamente al caso dell'invarianza al gradiente formula (3) viene anche ricavata applicando una serie di traslate

all'ingresso di $H_a(s)$ e imponendo l'ingombro di $y[n]$ e $y_a(nT)$. 10

$$x(n) = x(t), \quad y_a(t) = (h_a * x)(t); \quad Y_a(s) = \frac{H_a(s)}{s^2}$$

$$x[n] = x(nT); \quad X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (\text{dalle tavole})$$

$$y[n] = (h * x)[n]; \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y_a(nT) = y[n]$$

$\downarrow z$

$$z \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s^2} \right] \right]_{t=nT} = H(z) \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} z \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_a(s)}{s^2} \right] \right]_{t=nT} \quad \square$$

Esempio $H_a(s) = \frac{A}{s+\alpha}$; dalle tavole (linea 56)

$$z \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+\alpha)} \right] \right]_{t=nT} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-\alpha T})z}{\alpha(z-1)(z-e^{-\alpha T})} \right]$$

$$H(z) = \frac{A}{\alpha} \frac{(z-1)^2}{Tz} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-\alpha T})z}{\alpha(z-1)(z-e^{-\alpha T})} \right]$$

$$= \frac{A}{\alpha} \left[1 - \frac{(z-1)^2}{Tz} \frac{(1-e^{-\alpha T})z}{\alpha(z-1)(z-e^{-\alpha T})} \right]$$

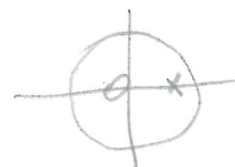
$$= \frac{A}{\alpha} \frac{T\alpha(z-e^{-\alpha T}) - z + 1}{T\alpha(z-e^{-\alpha T})} = \frac{A}{T\alpha^2} \frac{T\alpha z - T\alpha e^{-\alpha T} - z + 1}{z - e^{-\alpha T}}$$

$$= \frac{A}{T\alpha^2} \frac{\overset{\gamma}{(1 - T\alpha e^{-\alpha T})} + \overset{\beta}{(T\alpha - 1)z}}{z - e^{-\alpha T}} = K \frac{\gamma + \beta z}{z - e^{-\alpha T}}$$

$$= K \frac{\gamma z^{-1} + \beta}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

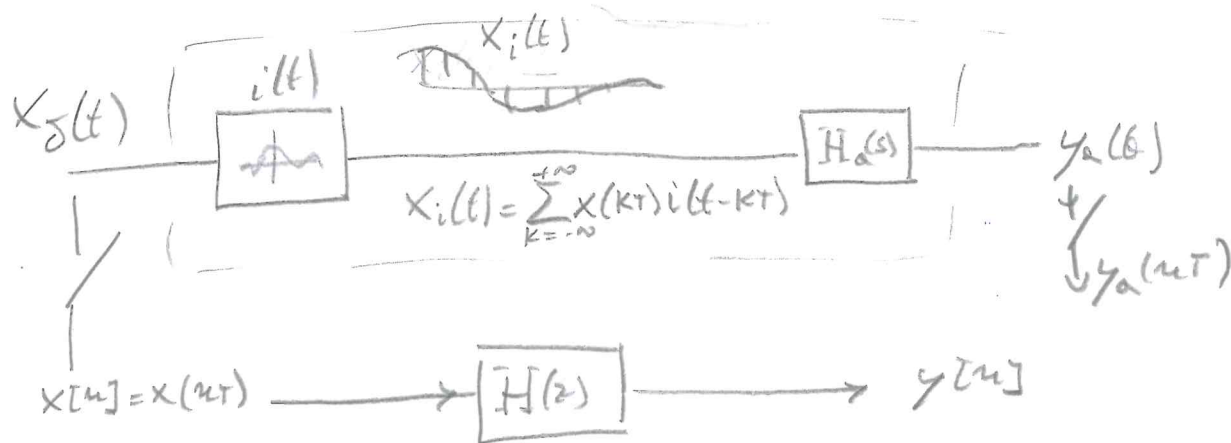
Un polo $z = e^{-\alpha T}$
un zero $z = -\frac{\gamma}{\beta}$

$$u[nT] = e^{-\alpha T} y[n-1] + K\beta x[n] + K\gamma x[n-1]$$



INVARIANZA A UN INTERPOLATORE GENERICO

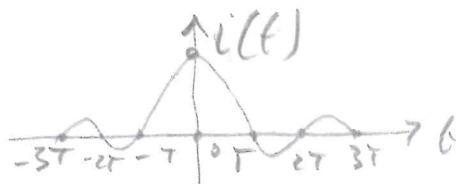
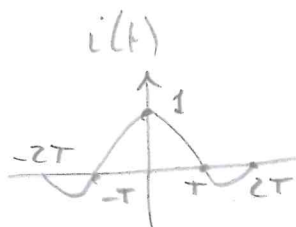
Le stesse idee rappresentate possono essere applicate ad altri 11 tipi di interpolazione.



$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[I(s) H_a(s) \right] \right]_{t=nT}$$

INVARIANZA AI SEGNALE INTERPOLATI CON $i(t)$.

Un interpolatore si sceglie tale che

$$\begin{cases} i(0) = 1 \\ i(nT) = 0 \quad n \neq 0 \end{cases}$$


Altri interpolatori possono essere polinomiali (polinomi a tratti) che soddisfanno le condizioni di continuità delle derivate o che rappresentano un rettangolo più piatto di $x(t)$. Ovviamente l'applicazione della formula di progetto può diventare progressivamente più complessa. Da tenere presente che quando l'interpolatore non è causale, come nel caso di SGH e A, il risultato non è garantito essere stabile. Pertanto la $H(z)$ ottenuta va sempre analizzata nelle sue discontinuità.

PROGETTO FILTRI NUMERICI MEDIANTE APPROSSIMAZIONE DELLE DERIVATE

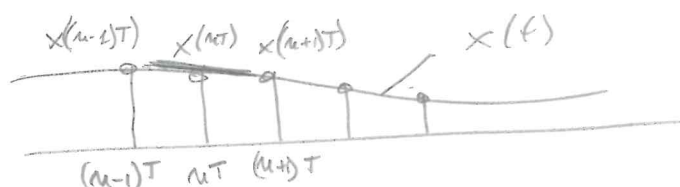
Un filtro analogico è tipicamente rappresentato da una funzione rapporto di polinomi in s

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

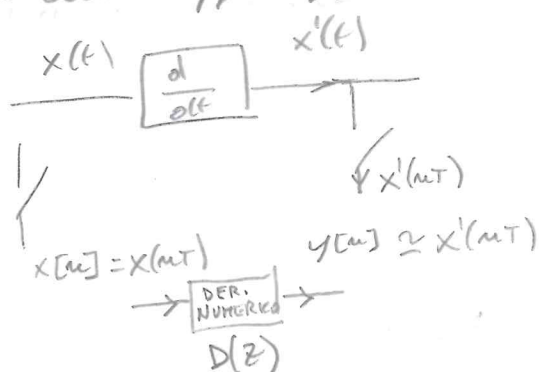
che descrive nel dominio di Laplace l'equazione differenziale

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Quindi la variabile s assume il valore di operatore di differenziazione e una approssimazione discreta della derivata può essere utilizzata per rimpiazzare s nelle $H_a(s)$ e ottenere direttamente $H(z)$.



La figura mostra un segnale tempo-continuo lentamente variabile. Se il segnale è ~~non~~ campionato, per trovare la derivata di $x(t)$ in ogni $t=nT$ possiamo solo usare gli altri campioni (adiacenti). Quindi dobbiamo elaborare un differenziatore numerico $D(z)$ che fornisca



una stima di $x'(nT)$ dai campioni $x(nT)$. Ottenuto il derivatore che vuole s possiamo ottenere il filtro numerico semplicemente per sostituzione

$$s \leftarrow D(z)$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=D(z)}$$

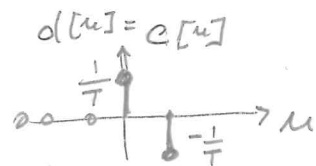
ERENZA FINITA CAUSALE

derivatore numerico più semplice e certamente
 quello che realizza la differenza finita causale

$$y[n] = \frac{x[nT] - x[(n-1)T]}{T}$$

o
 vero

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{T}$$



quindi il derivatore numerico è il FIR causale

$$C(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

il filtro che realizza $H_a(s)$ può essere ottenuto come

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

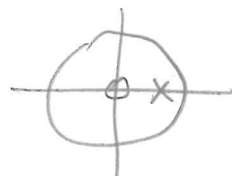
esempio $H_a(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad \alpha > 0$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T} + \alpha} = \frac{T}{1 - z^{-1} + \alpha T} = \frac{T}{(1 + \alpha T) - z^{-1}} = \frac{T}{1 + \alpha T} \frac{z}{z - \frac{1}{1 + \alpha T}}$$

$$H(z) = \frac{T}{1 + \alpha T} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \alpha T} z^{-1}}$$

1 polo stabile
 $\alpha = \frac{1}{1 + \alpha T}$
 Una zero nell'origine

$$y[n] = \frac{1}{1 + \alpha T} y[n-1] + \frac{T}{1 + \alpha T} x[n]$$



La bancia è semplicissima, ma conviene svolgerla poco alla volta nel dettaglio la natura della trasformazione tra s e z :

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

Invertendo otteniamo $z = \frac{1}{1-sT}$, quindi vogliamo vedere in che modo il piano $s = \sigma + j\omega$ si trasforma nel piano z .

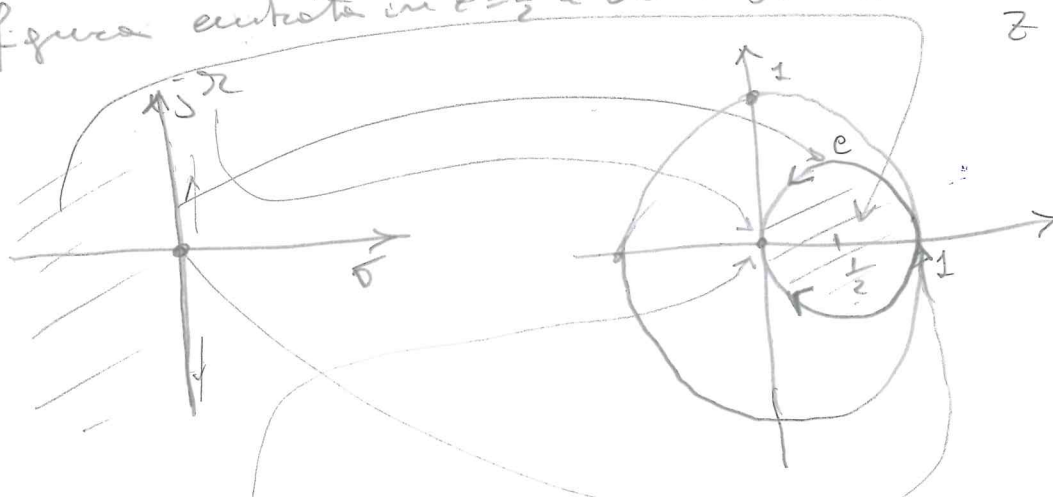
$$z = \frac{1}{1-sT-j\omega T}$$

Notiamo subito che per $s=0 \Rightarrow z=1$ e che per $s \rightarrow \infty \Rightarrow z=0$.
Vogliamo la relazione che c'è tra il denominatore della funzione analogica $s=j\omega$ e il piano z .

$$1) z = \frac{1}{1-j\omega T} = \frac{1}{1-j\omega T} \cdot \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T} = \frac{1+j\omega T}{1+\omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\omega^2 T^2} + j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

Al variare di ω , z descrive la circonferenza mostrata in figura centrata in $z=\frac{1}{2}$ e di raggio $\frac{1}{2}$



Le verifiche immediate perché decomponendo con x e y la parte reale e la parte immaginaria di z abbiamo

$$x+jy = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} + j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} ; \text{ Sottraiamo ad ambo i membri } \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} + jy = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - \frac{1}{2} + j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} ; x - \frac{1}{2} + jy = \frac{2-1-\omega^2 T^2}{2(1+\omega^2 T^2)} + j \frac{\omega T}{2(1+\omega^2 T^2)}$$

Prendendo al modulo al quadrato per entrambi i membri

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4(1+\omega^2 T^2)^2} \left[\frac{(1-\omega^2 T^2)^2 + \omega^2 T^2}{(1+\omega^2 T^2)^2} \right] ; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \left(\text{eq. della circonferenza } C \right)$$

Una funzione analitica razionale può facilmente mostrare 15
 che quando s appartiene al semipiano sinistro ($\sigma < 0$),
 ci troviamo all'interno della circonferenza trovata.
 Pertanto tutti i poli stabili di $H(s)$ resteranno stabili
 in $H(z)$ poiché cadono all'interno del cerchio unitario
 anche se solo nella zona limitata dal cerchio unitario
 in $z = \frac{1}{2}$.

La tangente tra il cerchio unitario e il cerchio C
 mostra come la caratteristica
 in funzione di $H(s)$, ovvero $H(\sigma)$ per σ attorno allo
 zero, sia riprodotta (anche se deformata) per vicinanza
 alle frequenze meridianhe basse. ^{Per vedere meglio ciò,} si ricorrendo che
 percorrendo l'asse $s = j\omega$ nel senso delle ω
 crescenti positive, si percorre il cerchio C in
 senso antiorario fino a finire in $z = 0$ per $\omega = \infty$.
 Analogamente per $\omega \rightarrow -\infty$ si percorre in senso antiorario
 C fino a $z = 0$ per $\omega = \infty$.

Quindi poiché la risposta armonica di $H(z)$ ha la
 legge sul cerchio unitario $H(\nu) = H(z)|_{z=e^{j2\pi\nu}}$, per
 piccoli valori di ν i due percorsi sono
 vicini e quindi corrispondono a valori simili.

Ovviamente questa tecnica non consente di ottenere una
 $H(z)$ con poli che si trovano in altre regioni del
 cerchio unitario, da una $H(s)$ stabile. Essi dovranno
 necessariamente trovarsi in C , come nell'esempio.

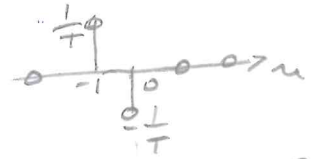
Usando il campione successivo $x((n+1)T)$ per valutare la derivata in $x(nT)$, la differenza finita si scrive

$$\frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T}$$

$$d[n] = a[n]$$

ovvero

$$y[n] = \frac{x[n+1] - x[n]}{T}$$



Pertanto il derivatore numerico è il FIR antieccessore

$$D(z) = A(z) = \frac{z-1}{T} \quad \text{Il filtro che realizza } H_d(s)$$

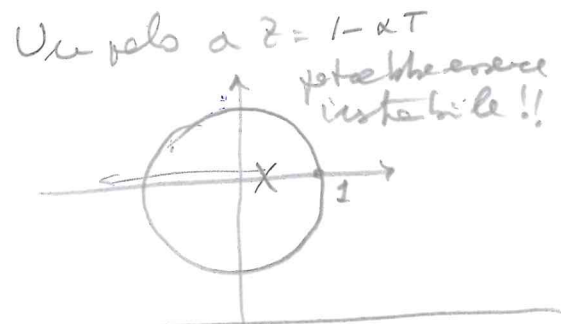
può essere ottenuto come

$$H(z) = H_d(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Prima $H_d(s) = \frac{1}{s+\alpha} \quad \alpha > 0$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + \alpha} = \frac{T}{z-1+\alpha T} = T \frac{z^{-1}}{1-(1-\alpha T)z^{-1}}$$

$$y[n] = (1-\alpha T)y[n-1] + Tx[n-1]$$



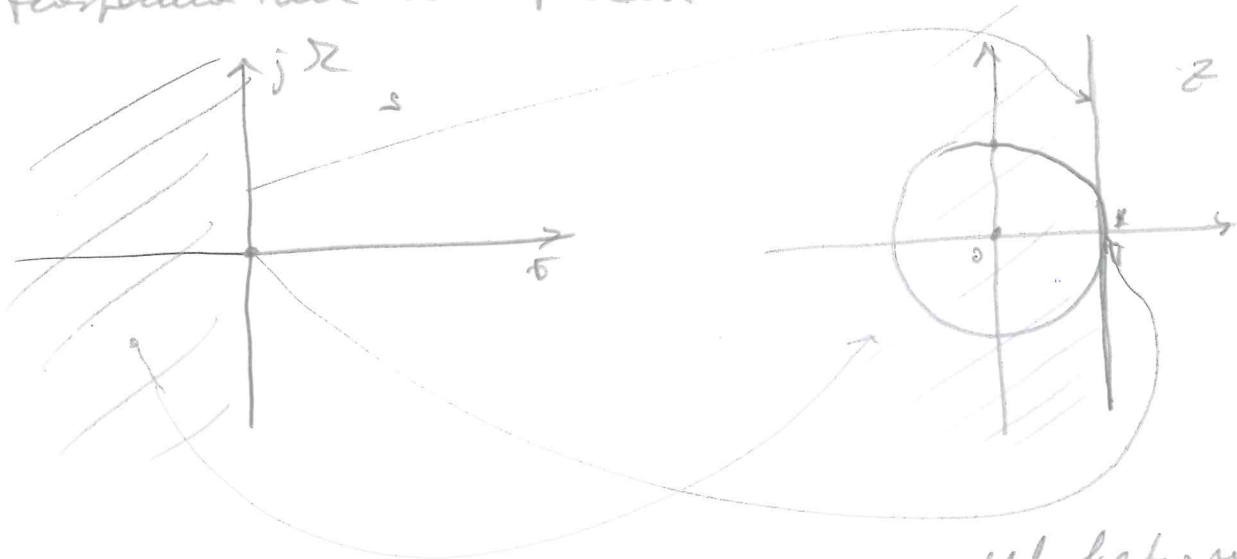
Anche qui la tecnica di progetto è molto semplice e conviene analizzare meglio la natura della trasformazione

$$s = \frac{z-1}{T} \Rightarrow z = 1 + sT; \quad z = 1 + \sigma T + j\omega T$$

Notiamo innanzitutto che per $\sigma=0, \omega=0$, abbiamo $z=1$ per $s \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$.

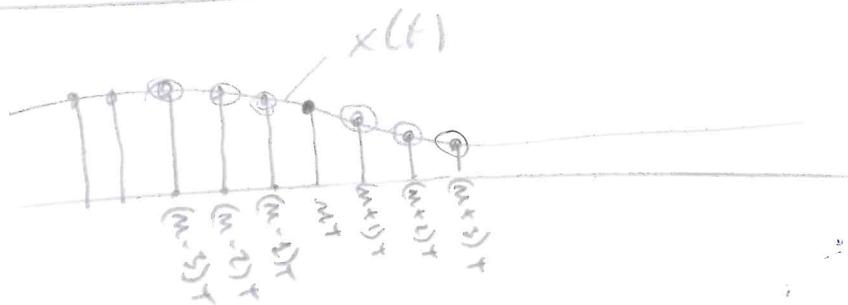
L'asse immaginario nel piano s , $s=j\omega$ diventa l'arco $z=1+j\omega T$ nel piano z .

Inoltre il semipiano a parte reale negativa di s si trasforma nel semipiano a sinistra dell'asse $z=1$.



Per tanto anche se la risposta numerica del filtro numerico $H_p(z)$ a $\omega=0$ dovrebbe "copiare" quella analogica, non c'è garanzia di ottenere un filtro numerico stabile da un filtro analogico stabile.

ALTRI DERIVATORI NUMERICI



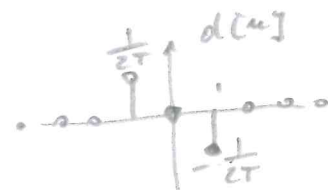
Per approssimare la derivata in $x(nT)$ possono essere usati altri filtri derivatori, magari simmetrici rispetto a $x(nT)$, come per esempio la differenza finita

$$\frac{x((n+1)T) - x((n-1)T)}{2T}$$

$$y[n] = \frac{x[n+1] - x[n-1]}{2T};$$

$$D(z) = \frac{z - z^{-1}}{2T};$$

Il filtro è simmetrico e non causale.



$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{z - z^{-1}}{2T}}$$

Esempio: $H(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ $\alpha > 0$

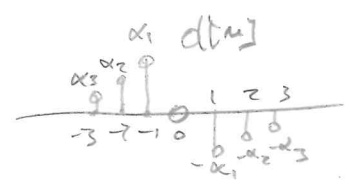
$$H(z) = \frac{1}{\frac{z-z^{-1}}{T} + \alpha} = \frac{T}{z-z^{-1} + \alpha T} = \frac{Tz}{z^2 + \alpha Tz - 1} = T \frac{z^{-1}}{1 + \alpha T z^{-1} - z^{-2}}$$

$$z_{1,2} = \frac{-\alpha T \pm \sqrt{\alpha^2 T^2 + 4}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{due poli reali (stabilit  da verificare)} \\ \text{uno zero nell'origine.} \end{array} \right.$$

$$y[n] = \alpha T y[n-1] - y[n-2] + T x[n-1]$$

In generale si pu  adottare un derivatore numerico rispetto a nT che calcola le differenze opportunamente pesate.

$$\sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{x((n+k)T) - x((n-k)T)}{T}$$



Il filtro derivatore corrispondente  

$$y[n] = \sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{x[n+k] - x[n-k]}{T}$$

$$D(z) = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{T} (z^k - z^{-k}) \quad ; \quad H(z) = H_A(s) \Big|_{s=D(z)}$$

La natura della trasformazione tra s e z ovviamente dipende dai coefficienti α_k che vengono progettati anche per realizzare il derivatore rispetto al numero.

La simmetria della trasformazione comporta che il cerchio unitario sia in relazione diretta con l'asse immaginario in s . Ovvero, per $z = e^{j\omega}$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=1}^L \alpha_k (z^k - z^{-k}) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^L \alpha_k \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} 2j = j \frac{2}{T} \sum_{k=1}^L \alpha_k \sin \omega k$$

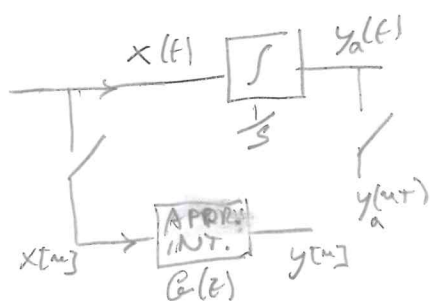
$$\Omega = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^L \alpha_k \sin \omega k$$

Per ulteriori approfondimenti vedi la letteratura di riferimento indicata nel programma del corso.

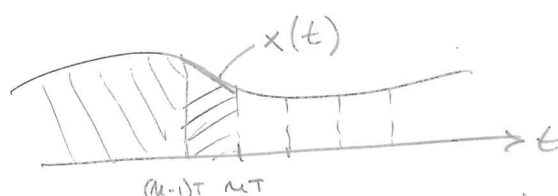
PROGETTO DI FILTRI NUMERICI DA PROTOTIPO ANALOGICO PER APPROSSIMAZIONE DELL'INTEGRALE

(METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE)

Il metodo qui presentato è molto utilizzato perché è robusto e semplice nel suo utilizzo. È basato su una approssimazione discreta dell'integrale con la formula del trapezio.



$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau + y(t_0)$$



$$y(nT) = y((n-1)T) + \frac{(x(nT) + x((n-1)T))T}{2}$$

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T}{2}(x[n] + x[n-1])$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2}X(z) + \frac{T}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La corrispondenza tempo-continuo e tempo-discreto è quindi

$$\frac{1}{s} \leftarrow \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

TRASFORMAZIONE
BILINEARE

Il prototipo del filtro numerico $H(z)$ del prototipo analogico è quindi

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Prima di mostrare un esempio è opportuno analizzare la natura della trasformazione bilineare che è piuttosto peculiare. Invertendo la funzione abbiamo

$$\frac{sT}{2} = \frac{z-1}{z+1} ; \quad z \frac{sT}{2} + \frac{sT}{2} = z-1 ; \quad z \left(\frac{sT}{2} - 1 \right) = -1 - \frac{sT}{2}$$

$$z = \frac{-1 - \frac{sT}{2}}{\frac{sT}{2} - 1} ; \quad z = \frac{-\frac{2}{T} - s}{s - \frac{2}{T}} ; \quad \boxed{z = -\frac{s + \frac{2}{T}}{s - \frac{2}{T}}}$$

Per restringere a quell'asse immaginario (dominio delle frequenze)

$$s = j\Omega, \text{ abbiamo } z = -\frac{j\Omega + \frac{2}{T}}{j\Omega - \frac{2}{T}}$$

Immediato verificare che il modulo della funzione è costante e sempre 1

$$\left(\frac{\Omega^2 + \frac{4}{T^2}}{\Omega^2 + \frac{4}{T^2}} = 1 \right)$$

(Si tratta di una cosiddetta "funzione unitaria"), pertanto possiamo scrivere

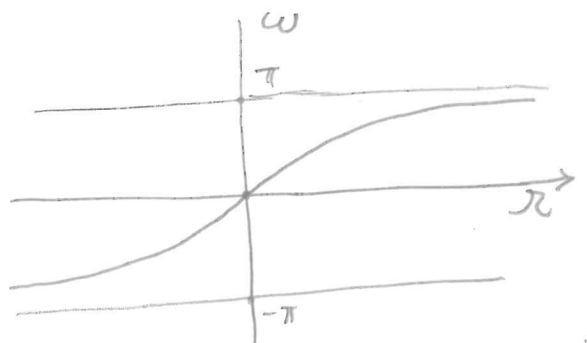
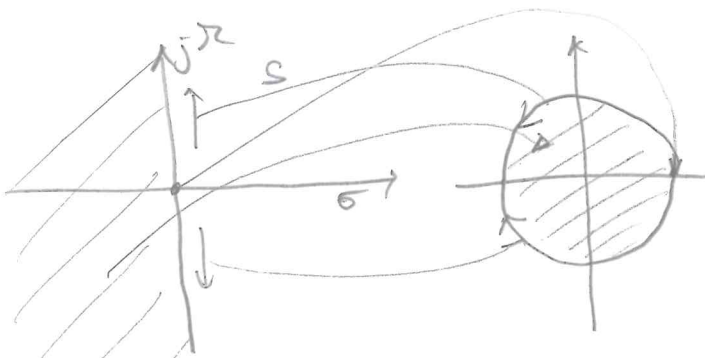
$$e^{j\omega} = -\frac{j\Omega + \frac{2}{T}}{j\Omega - \frac{2}{T}}$$

dove ω è la pulsazione numerica: l'asse immaginario del piano s si trasforma nel cerchio unitario con la caratteristica che per $\Omega \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \pi^-$ (da sinistra) e per $\Omega \rightarrow -\infty$, $\omega \rightarrow \pi^+$ (da destra). Quindi il cerchio unitario è percorso una sola volta in corrispondenza di tutto l'asse immaginario. In particolare

$$\begin{aligned} \omega &= \angle \left(-\frac{j\Omega + \frac{2}{T}}{j\Omega - \frac{2}{T}} \right) = \angle \left(-\frac{(j\Omega + \frac{2}{T})(-j\Omega - \frac{2}{T})}{\Omega^2 + \frac{4}{T^2}} \right) = \angle \left(\frac{(\frac{2}{T} + j\Omega)^2}{\Omega^2 + \frac{4}{T^2}} \right) \\ &= \angle \left(\frac{2}{T} + j\Omega \right)^2 = 2 \angle \left(\frac{2}{T} + j\Omega \right) = 2 \cdot \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2}} \quad \text{oppure}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}}$$



L'asse delle frequenze analogiche viene "schacciato" ("warped") in maniera non lineare nel segmento $[-\pi, \pi]$. La trasformazione è monotona, quindi la natura del filtro resterà la stessa (passo-basso analogico $\rightarrow$ passo-basso numerico) (passo-banda analogico $\rightarrow$ passo-banda numerico), anche se l'asse delle frequenze subisce una deformazione non lineare.

Più in dettaglio da $\int \frac{e^{j\omega}}{z} = - \frac{(\sigma + j\omega)^2 + \frac{4}{T^2}}{(\sigma + j\omega)^2 - \frac{4}{T^2}}$, otteniamo

21

$$\rho = \frac{(\sigma + \frac{2}{T})^2 + \omega^2}{(\sigma - \frac{2}{T})^2 + \omega^2} = \frac{\sigma^2 + \frac{4}{T^2} + \frac{4}{T}\sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \frac{4}{T^2} - \frac{4}{T}\sigma + \omega^2} > 1 \quad \text{se } \sigma > 0$$

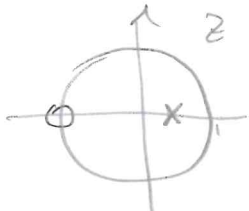
$$< 1 \quad \text{se } \sigma < 0$$

Pertanto la parte del piano s a parte reale negativa si mappa all'interno del cerchio unitario. Questo implica la utile proprietà che prototipi analogici $H_a(s)$ stabili si trasformano certamente in filtri numerici stabili.

Esempio $H_a(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad \alpha > 0$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{z}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \alpha} = \frac{1+z^{-1}}{\frac{z}{T}(1-z^{-1}) + \alpha(1+z^{-1})} = \frac{1+z^{-1}}{\frac{z}{T} - \frac{z}{T}z^{-1} + \alpha + \alpha z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{z}{T} + \alpha} \frac{1+z^{-1}}{1 - \left(\frac{\frac{z}{T} - \alpha}{\frac{z}{T} + \alpha}\right) z^{-1}} = \frac{T}{z + \alpha T} \frac{1+z^{-1}}{1 - \frac{z - \alpha T}{z + \alpha T} z^{-1}} = \frac{T}{z + \alpha T} \frac{z + 1}{z - \frac{z - \alpha T}{z + \alpha T}}$$



$\left. \begin{array}{l} \text{un polo a } z = \frac{z - \alpha T}{z + \alpha T} \text{ (certamente stabile)} \\ \text{uno zero a } z = -1 \end{array} \right\}$

$$y[n] = \frac{z - \alpha T}{z + \alpha T} y[n-1] + \frac{T}{z + \alpha T} (x[n] + x[n-1])$$

~~da sintetizzare~~
 Un aspetto importante dell'approssimazione della trasformazione bilineare: la deformazione non lineare dell'asse delle frequenze. Nel progetto di un filtro numerico che abbia una frequenza caratteristica ω_c (per esempio la frequenza di taglio di un passa-basso) bisogna tener conto della trasformazione che l'asse delle frequenze subisce per deformare la frequenza analogica originale ω_c .

Un esempio suggerisce la procedura da adottare.

Esempio

Ingeniero di avere progettare un filtro numerico per il
in dati campionati a $\frac{1}{T} = 22 \text{ KHz}$. con frequenza di taglio
o 5 KHz. Pertanto la frequenza di taglio numerica desiderata

$$\omega_c = \frac{5000}{22000} = 0.2273 \quad ; \quad \omega_c = 2\pi \nu_c = 1.4273 \text{ rad}$$

(ordinaria)

La frequenza di taglio del prototipo analogico non deve essere
5 KHz, ma bisogna tenere conto del warping, ovvero avere

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \log \frac{\omega_c}{2} = 44000 \log \frac{1.4273}{2} = 38093 \frac{\text{rad}}{\text{sc}}$$

ovvero

$$f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi} = 6064 \text{ Hz.}$$

Pertanto il progetto con la transf. bilineare richiede dei seguenti passi:
(ingegnere in pace-basso)

- 1) Definire la frequenza di campionamento $\frac{1}{T}$
- 2) Definire la freq. di taglio ω_c del filtro numerico
- 3) Ricava la freq. di taglio del prototipo analogico
mediante "pre-warping"
 $\omega_c = 2\pi \nu_c [\text{rad}]$; $\Omega_c = \frac{2}{T} \log \frac{\omega_c}{2} [\frac{\text{rad}}{\text{sc}}]$; $f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi} \text{ Hz.}$

Quindi la freq. di taglio del prototipo analogico non
deve essere $\nu_c \frac{1}{T}$

- 4) Progetta il filtro analogico
- 5) Applica la transf. bilineare

Suggestions to write our automaker code to apply the Bilinear transformation

23

$$H_n(s) = \frac{\sum_{m=0}^N \beta_m s^m}{\sum_{m=0}^M \alpha_m s^m} = \frac{\sum_{m=0}^N \beta_m \left(\frac{z-1}{T} \frac{z+1}{z+1}\right)^m}{\sum_{m=0}^M \alpha_m \left(\frac{z-1}{T} \frac{z+1}{z+1}\right)^m}$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^N \beta_m \frac{z^m}{T^m} \frac{(z-1)^m}{(z+1)^m}}{\sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{z^m}{T^m} \frac{(z-1)^m}{(z+1)^m}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(z+1)^N} \sum_{m=0}^N \beta_m \frac{z^m}{T^m} (z-1)^m (z+1)^{N-m}}{\frac{1}{(z+1)^M} \sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{z^m}{T^m} (z-1)^m (z+1)^{M-m}} = (z+1)^{M-N} \frac{\sum_{m=0}^N \beta_m \frac{z^m}{T^m} N_m}{\sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{z^m}{T^m} D_m}$$

$$(z-1)^m = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^m = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_m$$

$$(z+1)^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^m = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_m$$

$$\text{Ex: } (z-1)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(z+1)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Prepare

$$N_m = (z-1)^m (z+1)^{N-m} \quad \text{for } m=0, \dots, N$$

$$D_m = (z-1)^m (z+1)^{M-m} \quad \text{for } m=0, \dots, M$$

Compose the polynomials with the coefficients

if $N > M$, multiply the denominator by $(z+1)^{N-M}$

if $N < M$, multiply the numerator by $(z+1)^{M-N}$

if $N = M$ niente