

PROGETTO DI FILTRI FIR  
A FASE LINEARE

Corsi di Telecomunicazione

Prof Francesco A. N. Palmeri

Corsi di TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE  
NUMERICA DEI SGNALI - SVN

AA. 2014-15

# PROBLEMA DI FILTRI FIR A

## FASE LINEARE

In numerosi applicazioni della elaborazione numerica di segnali può essere utile ricorrere dei filtri che tengono conto anche delle distorsioni in fase. Ricordiamo che lo considerare di una distorsione per un sistema lineare è che lo rispetto di lunghezza non costante e lo rispetto di fase non lineare, nella banda di interesse.

Essamineremo qui di seguito una classe di filtri FIR dove dei vincoli nella struttura dello rispetto impulso garantisce la risposta in fase lineare nella banda passante.

Consideriamo un FIR causale di lunghezza  $N$

$$\{h[n], n=0, \dots, N-1\} \quad \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 1 \ 1 \\ \hline 0 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} n \\ \nearrow \end{array}$$

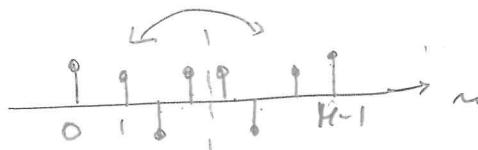
e le sue risposte ormai conosciute

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-j2\pi n}$$

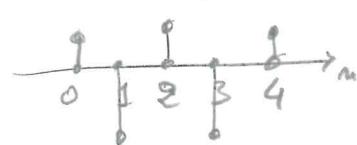
### FIR SIMMETRICI

Trascurando che lo rispetto impulso del FIR sia simmetrico rispetto al centro, ovvero che

$$h[n] = h[N-1-n], n=0, \dots, N-1$$



Vogliamo dimostrare che la fase è lineare nella banda passante. Facciamolo con riferimento ad un esempio per  $N=5$



$$\begin{aligned}
 H(v) &= h[0] + h[1]e^{-j2\pi v} + h[2]e^{-j2\pi v 2} + h[3]e^{-j2\pi v 3} + h[4]e^{-j2\pi v 4} \\
 &= e^{-j2\pi v 2} \left( h[0]e^{j2\pi v 2} + h[1]e^{j2\pi v} + h[2] + h[3]e^{j2\pi v 3} + h[4]e^{j2\pi v 2} \right) \\
 &= e^{-j2\pi v 2} \underbrace{\left( 2h[0]\cos 4\pi v + 2h[1]\cos 2\pi v + h[2] \right)}_{\text{Reale } H_r(v)} \quad \begin{array}{l} \text{non è parte reale} \\ \text{di } H(v)! \end{array} \\
 &\quad \begin{array}{l} \text{a fase} \\ \text{lineare.} \end{array}
 \end{aligned}$$

I contributi di  $H_r(v)$  alle fasi che non sono dirette negative, cioè che non superano nelle bande passanti, feriscono.

$$\begin{aligned}
 |H(v)| &= |H_r(v)| \\
 \Theta(v) &= \begin{cases} -4\pi v & \text{se } H_r(v) > 0 \quad (\text{nelle bande passanti}) \\ -4\pi v + \pi & \text{se } H_r(v) < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Esempio 2 per N=4

$$\begin{aligned}
 H(v) &= h[0] + h[1]e^{-j2\pi v} + h[2]e^{-j2\pi v 2} + h[3]e^{-j2\pi v 3} \\
 &= e^{-j2\pi v \frac{3}{2}} \left( h[0]e^{j2\pi v \frac{3}{2}} + h[1]e^{-j2\pi v \frac{3}{2}} + h[2]e^{-j2\pi v \frac{1}{2}} + h[3]e^{j2\pi v \frac{3}{2}} \right) \\
 &= e^{-j2\pi v \frac{3}{2}} \underbrace{\left( 2h[0]\cos 3\pi v + 2h[1]\cos \pi v \right)}_{\text{Reale } H_r(v)} \\
 &\quad \begin{array}{l} \text{a fase} \\ \text{lineare.} \end{array} \\
 &\quad \begin{array}{l} -3\pi v & \text{se } H_r(v) > 0 \quad (\text{nelle bande}) \\ -3\pi v + \pi & \text{se } H_r(v) < 0 \quad (\text{passante}) \end{array}
 \end{aligned}$$

Possono verificarsi salti di fase. Questi sono causati se localizzati nella banda ricevuta.

Ancidi in generale per

$$\text{FILTRI SIMMETRICI} : H(v) = H_r(v) e^{-j2\pi v \left(\frac{M-1}{2}\right)}$$

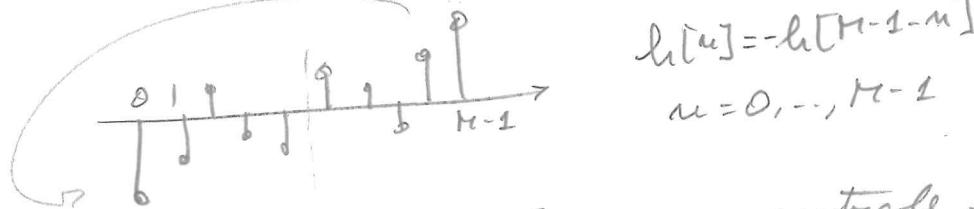
FIRFL3

$$(1) H_r(v) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cos 2\pi v \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad M \text{ dispari.}$$

$$(2) H_r(v) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \cos 2\pi v \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad M \text{ pari.}$$

### FIR ANTISIMMETRICI

E' possibile ottenere filtri lineari nella banda passante quale imponendo una condizione di antisimmetria



(Significhe quando  $M$  è dispari il componente centrale è nullo)

Immediato verificare che ottiene

$$H(v) = H_r(v) e^{j[-2\pi v \left(\frac{M-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}]}$$

$$(3) H_r(v) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \sin 2\pi v \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad M \text{ Dispari.}$$

$$(4) H_r(v) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \sin 2\pi v \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad M \text{ pari.}$$

$$\theta(v) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(\frac{M-1}{2}\right)v & \text{se } H_r(v) > 0 \\ \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(\frac{M-1}{2}\right)v \pm \pi & \text{se } H_r(v) < 0 \end{cases}$$

$$\theta(v) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(\frac{M-1}{2}\right)v & \text{se } H_r(v) > 0 \\ \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(\frac{M-1}{2}\right)v \pm \pi & \text{se } H_r(v) < 0 \end{cases}$$

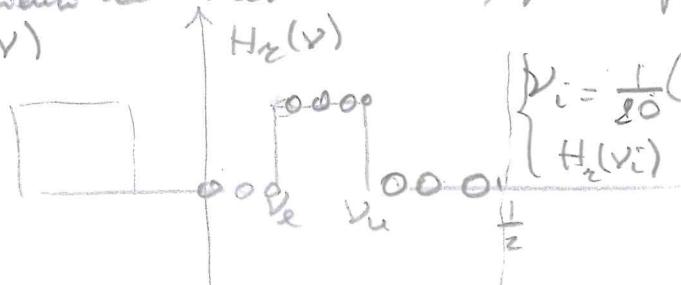
Anche qui possono esserci dei soli soli per che non  
risultano adattati nella banda passante.

Il seguente quadro sintetico evidenzia il # di coefficienti  
da determinare nei vari casi. # coeff. da determinare

|     |                |           |  |
|-----|----------------|-----------|--|
| FIR | SIMMETRICO     | M PARI    | $\frac{M}{2}$  |
|     |                | M DISPARI | $\frac{M+1}{2}$                                      |
|     | ANTISIMMETRICO | M PARI    | $\frac{M}{2}$  |
|     |                | M DISPARI | $\frac{M-1}{2}$ (per chi quello al<br>centro è zero) |

FIRFLY

I coefficienti possono essere ottenuti componendo le risposte omogenee. Prendendo per esempio un filtro FIR simetrico con  $M = 20$  e un filtro deridicato nelle bande tra  $\nu_L$  e  $\nu_H$ , ottengo 10 coefficienti da determinare, quali pendono 10 esponenti di  $H_2(\nu)$



Dall'equazione (2) organizziamo il calcolo in un sistema lineare

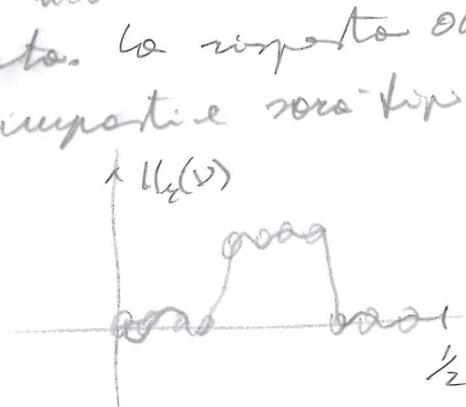
$$\begin{matrix} 1) & \begin{bmatrix} 2 \cos 2\pi\nu_1(4.5-0) & \dots & 2 \cos 2\pi\nu_1(4.5-9) \\ 2 \cos 2\pi\nu_2(4.5-0) & \dots & 2 \cos 2\pi\nu_2(4.5-9) \\ \vdots & & \vdots \\ 2 \cos 2\pi\nu_{10}(4.5-0) & \dots & 2 \cos 2\pi\nu_{10}(4.5-9) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[9] \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} H(\nu_1) \\ H(\nu_2) \\ \vdots \\ H(\nu_{10}) \end{bmatrix} \\ 2) & \frac{M}{2}-1 = 9 \\ & \frac{M-1}{2} = 4.5 \end{matrix}$$

Risolvendo si ottengono i valori  $\{h[0], \dots, h[9]\}$ .

La risposta omogenea ottenuta può essere verificata usando di nuove formule (2) compilate più flessibilmente o le formule generali

$$H(\nu) = \sum_{n=0}^{19} h[n] e^{-j2\pi n \nu}$$

rimane composta. La risposta ottenuta dovrebbe sempre comporsi. La risposta ottenuta dovrebbe sempre per i punti imposti non-tropo spesso oscillante.



Per ridurre le oscillazioni o migliorare le bande di transizione si può infilare il compenso aumentando l'ordine  $M$  del filtro. Si ricorda che il compenso potrebbe anche non essere uniforme infilandone le pert. di maggiorre entrosose.

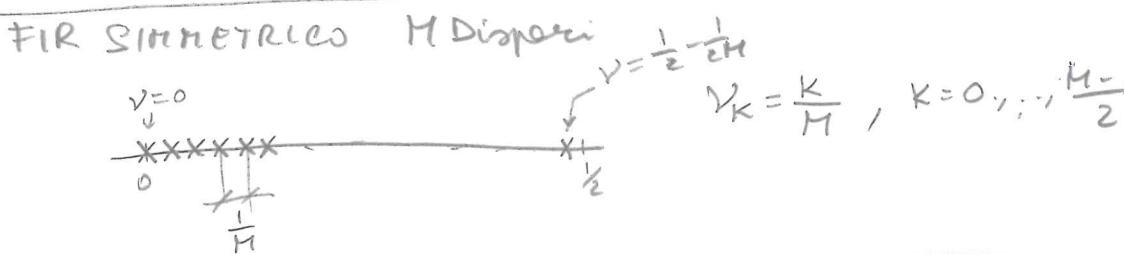
FIRFL5

Il comportamento nel dominio delle frequenze e le rechte del tipo di filtro da utilizzare possono risultare qualche insidie. Infatti per alcune valori dei valori di  $\nu$  di cui comprensore potrebbero verificarsi delle inconvenienze, ovvero un valore di  $\nu$  che non è visibile.

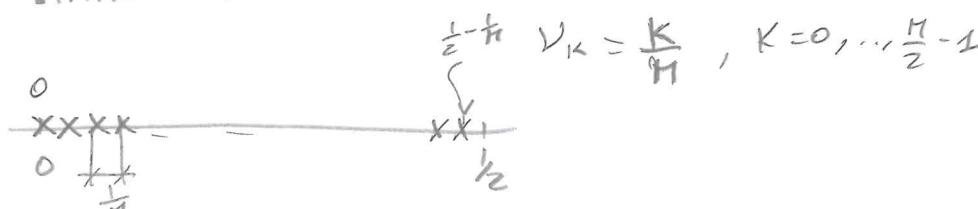
Ad esempio notiamo che se il filtro è antisimmetrico ed è disperi  $H_2(0) = 0$  e  $H_2(\frac{1}{2}) = 0$ , quindi il filtro non è simetria ed essere un pass-basso o un pass-alto. Un filtro antisimmetrico per i valori di  $\nu$  ha certamente  $H_2(0) = 0$ , ma a  $\frac{1}{2}$  non sarà l'argomento del suo non è un altro riflettore di  $\pi$ . Ad esempio un filtro simetrico da generalmente una risposta nulla a  $\nu = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_2(0) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \quad H \text{ disperi.} \\ H_2(0) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \quad H \text{ pari.} \end{array} \right.$$

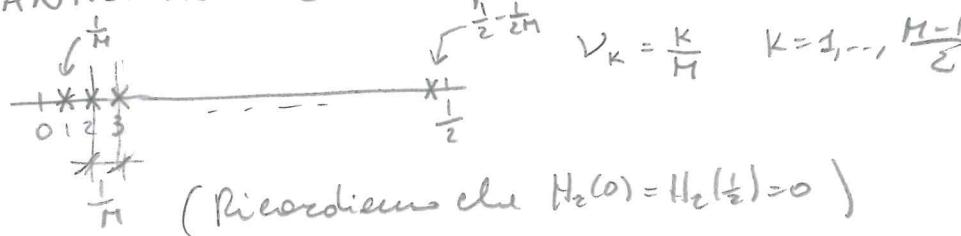
ed è più adatto per un comportamento di tipo pass-basso. La seguente lista mostra alcuni valori possibili per le varie tipologie di filtri



FIR SIMMETRICO M Pari.

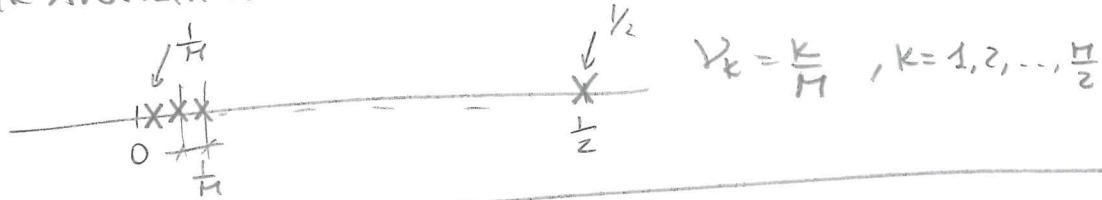


FIR ANTISIMMETRICI M Disperi



FIR ANTI-SYMMETRIES  $H$  polari.

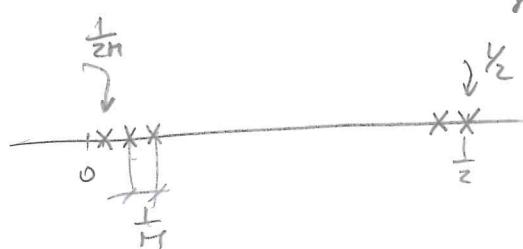
FIRFL6



$$V_k = \frac{k}{M}, k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

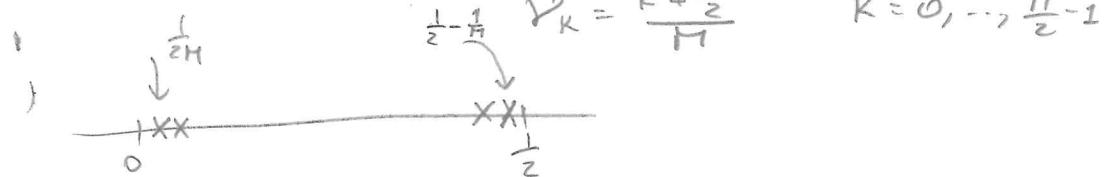
Alte seelte possibilities:

FIR SYMMETRIES  $H$  obliqui.



$$V_k = \frac{k + \frac{1}{2}}{M} \quad k = 0, \dots, \frac{M-1}{2}$$

FIR SYMMETRIES  $H$  parci



$$V_k = \frac{k + \frac{1}{2}}{M} \quad k = 0, \dots, \frac{M-1}{2}$$