PROPRIETA' DECORRELANTI DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

lezioni dal corso di
TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
AA. 2014-15

Prof. FRANCESCO A. N. PALMIERI

UNA PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Per comprendere l'obiettivo di questa lezione, partiamo dalla ben nota trasformata di Fourier (tempo-continuo)

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t)$$

dominio del tempo — dominio della frequenza — dominio del tempo

La trasformazione è invertibile e costituisce una rappresentazione alternativa della informazione contenuta nel segnale nel dominio del tempo. L'integrale di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

chiaramente mostra come $x(t)$ sia "scomponibile" in una "sovrapposizione di infinite sinusoidi" complesse $e^{j2\pi f t}$ ai vari valori di frequenza f.

L'importanza di questo tipo di rappresentazione, oltre alle ben note proprietà della convoluzione, risiede in una proprietà che andremo a dimostrare. In particolare si può far vedere come la Trasformata di Fourier sia una trasformazione "disaccoppiante", ovvero una rappresentazione del segnale in somma di "oggetti indipendenti".

In generale in qualunque sistema di analisi si cerca di ridurre il problema alla scomposizione di parti elementari. La Trasformata di Fourier realizza questo obiettivo per tutti i segnali stazionari (almeno in senso lato). Essa quindi appare come lo spazio naturale in cui studiare la struttura dei segnali.

Non è certamente un caso che il sistema uditivo realizzi una scomposizione in frequenza dei suoni.

Sia $X(t)$ un processo aleatorio stazionario almeno in senso lato, a media nulla e avente funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ e spettro di potenza $P_x(f)$.
Vogliamo dimostrare che i valori della trasformata di Fourier $X(f) = \mathcal{F}[X(t)]$ a frequenze diverse sono scorrelati. Vediamo:
Poiché $X(t)$ è un processo aleatorio, anche
$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt$ è una funzione aleatoria
avente media $E[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)] e^{-j2\pi f t} dt = 0 \;\; \forall f.$
Vogliamo studiare il grado di correlazione tra $X(f_1)$ e $X(f_2)$ quando $f_1 \neq f_2$. Si tratta di una misura di dipendenza del II ordine e si ricordi che in questo caso la correlazione coincide con la covarianza poiché la media è nulla a tutte le frequenze. Pertanto valutiamo

$$E[X(f)\overset{*}{X}(f-\Delta)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{X}(t_2) e^{+j2\pi(f-\Delta)t_2} dt_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t_1)\overset{*}{X}(t_2)]\, e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\, e^{-j2\pi\Delta t_2}\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t_1-t_2)\, e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}\, e^{-j2\pi\Delta t_2}\, dt_1\, dt_2 =$$

Cambiando variabili: $\tau = t_1 - t_2$; $t_2 = t$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau}_{P_x(f)}\, e^{-j2\pi\Delta t} dt$$

$$= P_x(f) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\Delta t} dt = P_x(f)\,\delta(\Delta)$$

Il risultato mostra come per $\Delta \neq 0$ i valori di $X(f)$ e $X(f-\Delta)$ sono scorrelati!!

(Se fossero gaussiani sarebbero addirittura indipendenti)

Si noti come l'unica ipotesi è quella di stazionarietà. Pertanto la proprietà vale per qualunque segnale stazionario.

La proprietà contribuisce a comprendere perché il dominio della frequenza rappresenta il naturale contesto nel quale analizziamo (e manipoliamo) i segnali.

NOTA: Lo studente non sia fuorviato dalla presenza della delta di Dirac $\delta(\Delta)$ che fornisce $E[|X(f)|^2] = \infty$. Questo è perfettamente coerente in quanto si tratta di un segnale stazionario, e quindi di potenza, e quindi ad energia infinita.

La naturale curiosità che emerge è se la proprietà dimostrata per i segnali tempo-continuo vale per i segnali tempo-discreti. La risposta è affermativa e deriva dal ragionamento che segue.

$$\underset{\substack{\text{segnale}\\ \text{tempo-discreto}}}{x[n]} \xrightarrow{DTFT} X(\nu) \xrightarrow{DTFT^{-1}} x[n]$$

La trasformata di Fourier tempo discreto (DTFT) e la sua inversa sono:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n} \; ; \quad x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu n} d\nu$$

Data una sequenza $\{x[n]\}$ aleatoria stazionaria almeno in senso lato, vogliamo studiare la correlazione esistente tra $X(\nu_1)$ e $X(\nu_2)$ a due frequenze $\nu_1 \neq \nu_2$.

Si ricordi che, a differenza del caso tempo-continuo, $X(\nu)$ è periodica con periodo 1. Pertanto c'è da aspettarsi che la correlazione tra $X(\nu)$ e $X(\nu-1)$, o $X(\nu-k)$ sia massima. L'interesse è ovviamente concentrato a $X(\nu)$ e $X(\nu-\Delta)$ con Δ non intero.

Quindi sia $x[n]$ un processo aleatorio stazionario almeno in senso lato, a media nulla e con autocorrelazione $R_x[n]$ e spettro di potenza $P_x(\nu) = DTFT(R_x[n])$.

Valutiamo la correlazione ($E[X(\nu)]=0 \;\; \forall\nu$):

$$E[X(\nu)X^*(\nu-\Delta)] = E\left[\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} x[n_1] e^{-j2\pi\nu n_1} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x^*[n_2] e^{j2\pi(\nu-\Delta)n_2}\right]$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \underbrace{E[x[n_1]x[n_2]]}_{R_x[n_1-n_2]} e^{-j2\pi\nu(n_1-n_2)}\, e^{-j2\pi\Delta n_2}$$

$$n = n_1 - n_2 \qquad n_2 = n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x[n] e^{-j2\pi\nu n}}_{P_x(\nu)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\Delta n} = P_x(\nu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\Delta n}$$

Usando la formula di Poisson: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\Delta n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Delta-k)$, PDS

otteniamo

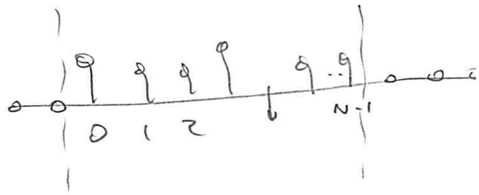
$$E[X(\nu)X^*(\nu-\Delta)] = P_x(\nu)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Delta-k)$$

L'espressione conferma la esistenza di decorrelazione per $\Delta \neq 0$ e diverso da qualunque intero. Quindi anche il dominio della frequenza normalizzata ν costituisce il naturale spazio in cui concentrare le nostre analisi per i segnali tempo-discreto.

Per esaminare vari aspetti del problema anche con riferimento a sequenze limitate consideriamo ora <u>la DTFT di una sequenza di durata finita</u>.

Nella notazione $\{x[n]\}$ è una sequenza su tutti gli interi (di durata infinita) e $x_N[n]$ è la sequenza troncata agli interi da 0 a $N-1$, ovvero

$$x_N[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ x[n] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n > N-1 \end{cases}$$



La DTFT di $x_N[n]$ è pertanto

$$X_N(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N[n]e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\nu n}$$

$X_N(\nu)$ è ovviamente (come sempre) periodica con periodo 1.

Valutiamo la autocorrelazione

$$E[X_N(\nu)X_N^*(\nu-\Delta)] = E\left[\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1]e^{-j2\pi\nu n_1}\sum_{n_2=0}^{N-1} x^*[n_2]e^{+j2\pi(\nu-\Delta)n_2}\right]$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} E[x[n_1]x^*[n_2]]\, e^{-j2\pi\nu(n_1-n_2)}\, e^{-j2\pi\Delta n_2}$$

Cambiando variabili $m = n_1 - n_2$, $n = n_2$

$$E[X_N(\nu)X_N^*(\nu-\Delta)] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-n}^{N-1-n} E[x[m+n]x^*[n]]\, e^{-j2\pi\nu m}\, e^{-j2\pi\Delta n}$$ PD6

Poiché la autocorrelazione tempo-ritardo è definita come

$$R_x[n,m] = E[x[n]\,x^*[n-m]]$$

$$E[X_N(\nu)X_N^*(\nu-\Delta)] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-n}^{N-1-n} \underbrace{R_x^*[n;-m]\, e^{-j2\pi\nu m}}\, e^{-j2\pi\Delta n}$$

se questa quantità non dipendesse da n

(*) potrei assumere in questa espressione $n=0$

e avrei $R_x^*[0;-m] = R_x[m]$

ottenendo

$$E[X_N(\nu)X_N^*(\nu-\Delta)] = \sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} R_x[m]\, e^{-j2\pi\nu m}}_{P_x(\nu)}\, e^{-j2\pi\Delta n}$$

$$= P_x(\nu)\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\Delta n} = P_x(\nu)\,\frac{1-e^{-j2\pi\Delta N}}{1-e^{-j2\pi\Delta}}$$

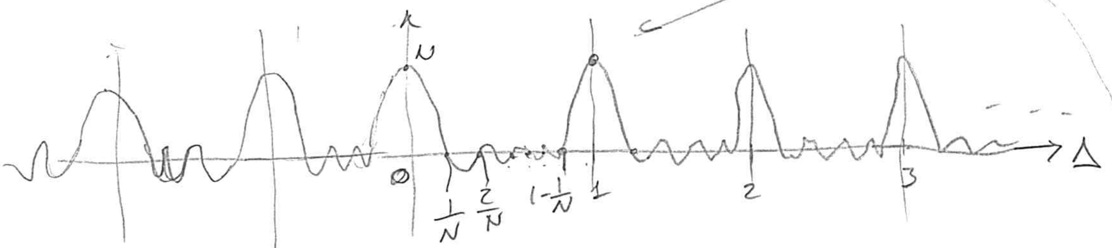
$$= P_x(\nu)\,\frac{e^{-j\pi\Delta N}}{e^{-j\pi\Delta}}\,\frac{e^{j\pi\Delta N}-e^{-j\pi\Delta N}}{e^{j\pi\Delta}-e^{-j\pi\Delta}}\,\frac{2j}{2j} = P_x(\nu)\, e^{-j\pi\Delta(N-1)}\underbrace{\frac{\sin\pi N\Delta}{\sin\pi\Delta}}_{\text{funzione di Dirichlet in }\Delta}$$

si annulla quando $\pi N\Delta = k\pi$, $\Delta = \frac{k}{N}$

Quando $\Delta = k$ vale N poiché applico l'Hopital

$$\frac{\pi N\cos\pi N\Delta}{\pi\cos\pi\Delta}$$

$$\frac{N\cos\pi N k}{\cos\pi k} = N\frac{(-1)^{Nk}}{(-1)^k}$$



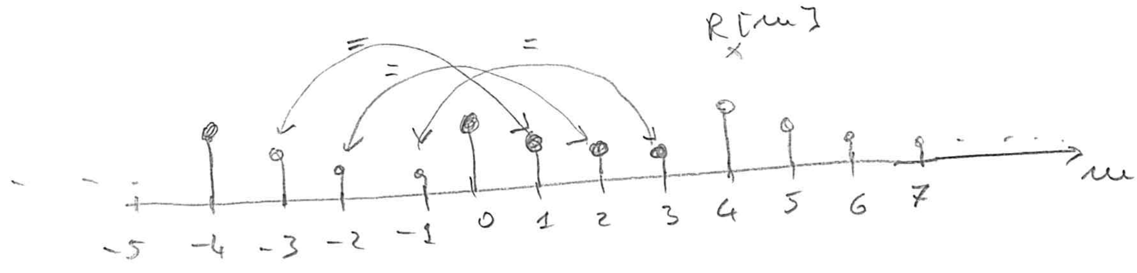
La correlazione è nulla solo a $\Delta = \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$

Questo sarà utile quando considereremo la DFT che fornisce la versione campionata di $X_N(\nu)$.

Per comprendere la condizione (*) esaminiamo la doppia sommatoria per $N=3$

$n \backslash m$	-3	-2	-1	0	1	2	3
0				$E[\lvert X[0]\rvert^2]$ $R(0)$	$E[X[1]X^*[0]]$ $R(1)$	$E[X[2]X^*[0]]$ $R[2]$	$E[X[3]X^*[0]]$ $R[3]$
1			$E[X[0]X^*[1]]$ $R[-1]$	$E[\lvert X[1]\rvert^2]$ $R[0]$	$E[X[2]X^*[1]]$ $R[1]$	$E[X[3]X^*[1]]$ $R[2]$	$R[-1]$
2		$E[X[0]X^*[2]]$ $R[-2]$	$E[X[1]X^*[2]]$ $R[-1]$	$E[\lvert X[2]\rvert^2]$ $R[0]$	$E[X[3]X^*[2]]$ $R[1]$	$R[-2]$	$R[-1]$
3	$E[X[0]X^*[3]]$ $R[-3]$	$E[X[1]X^*[3]]$ $R[-2]$	$E[X[2]X^*[3]]$ $R[-1]$	$E[\lvert X[3]\rvert^2]$ $R[0]$	$R[-3]$	$R[-2]$	$R[-1]$

Nel passaggio (*) per ignoranza si vengono inclusi i termini $R[0]$ $R[1]$ $R[2]$ $R[3]$ piuttosto che $R_x^*[n,-m]$. Questo produce la stessa sommatoria se $R[3] = R[-1]$; $R[2] = R[-2]$; $R[1] = R[-3]$, ovvero $R[m]$ è periodica con periodo 3.



Le autocorrelazioni vengono rimappate "circolarmente"

Pertanto affinché valga la proprietà di decorrelazione di $X_N(\nu)$ e $X_N(\nu-\Delta)$ quando $\Delta = \dots \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, \dots$ $R_x[m]$ deve essere periodica con periodo N.

Commenteremo nel significato fisico di questa proprietà in seguito.

Per completare il quadro esaminiamo circa le proprietà della DFT di una sequenza di durata finita. Dalla discussione precedente dovrebbe essere evidente che una proprietà analoga debba esistere.

La DFT di una sequenza $x[0], x[1], \ldots, x[N-1]$ è

$$\boxed{X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn} \qquad K=0,\ldots,N-1}$$

(Ricordiamo che $X[K]$ è periodica con periodo N
Ecco perché computazionalmente la valutiamo solo per $K=0,\ldots,N-1$)

Studiamo le proprietà statistiche di $X[K]$.

Sia $x[n]$ una sequenza aleatoria a media nulla: $E[x[n]]=0 \ \forall n$. Pertanto anche $X[K]$ è a media nulla: $E[X[K]]=0 \ \forall K$. Valutiamo la autocorrelazione

$$E[X[K]X^*[K-\ell]] = E\left[\sum_{n_1=0}^{N-1} x[n_1] e^{-j\frac{2\pi}{N}Kn_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x^*[n_2] e^{+j\frac{2\pi}{N}(K-\ell)n_2}\right]$$

$$= \sum_{n_2=0}^{N-1}\sum_{n_1=0}^{N-1} E[x[n_1]x^*[n_2]] e^{-j\frac{2\pi}{N}(n_1-n_2)K} e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell n_2}$$

$m = n_1 - n_2 \ ; \ n = n_2$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^{N-1-n} \underbrace{E[x[n+m]x^*[n]]}_{R_x^*[n;-m]} e^{-j\frac{2\pi}{N}mK} e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell n}$$

(*) Usando le stesse considerazioni fatte per la DTFT, assumiamo $R_x^*[n;-m]=R_x[m] \ \forall n$.

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} R_x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}mK}} e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell n} = P_N[K]\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}\ell n} \longrightarrow$$

$P_N[K]$ SPETTRO DI POTENZA DELLA SEQUENZA $\triangleq \mathrm{DFT}[R_x[m], m=0,\ldots,N-1]$

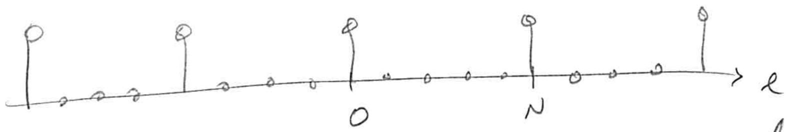
$$= P_N[k] \, \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N} l N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = P_N[k] \, \frac{e^{-j\pi l}}{e^{-j\frac{\pi}{N} l}} \, \frac{e^{j\pi l} - e^{-j\pi l}}{e^{j\frac{\pi}{N}l} - e^{-j\frac{\pi}{N} l}} \cdot \frac{2j}{2j}$$

$$= P_N[k] \, e^{-j\pi l (1 - \frac{1}{N})} \underbrace{\frac{\sin \pi l}{\sin \frac{\pi}{N} l}}_{\substack{= 0, \; l \text{ interi} \\ \text{eccetto che per } l = qN}}$$

Applicando la regola dell'Hopital.

$$\left. \frac{\pi \cos \pi l}{\frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi}{N} l} \right|_{l = qN} = N \, \frac{\cos \pi q N}{\cos \pi N} = N \, \frac{(-1)^{qN}}{(-1)^N}$$

$$E[X[k] X^*[k-l]] = P_N[k] \, N \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (-1)^{q+N} \delta[l - qN]$$



I campioni della DFT sono scorrelati per $l \neq qN$ se la condizione (*) è soddisfatta.

Quindi di nuovo è richiesto che $R_x[m]$ sia periodica con periodo N.

Commenteremo su questa caratteristica in seguito.

FORMULAZIONE MATRICIALE DELLA DFT

La coppia DFT, DFT^{-1} è convenientemente rappresentata in forma matriciale

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{W_N} \longrightarrow \underline{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0, \dots, N-1 \qquad \text{DFT}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n = 0, \dots, N-1 \qquad \text{DFT}^{-1}$$

$$\underline{X} = W_N\, \underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{array}{c|l} & \;\; 0 \;\; n \;\; 1 \;\; 2 \;\; \longrightarrow \;\; N-1 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ k \\ \downarrow \\ N-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Es. $N = 4$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}} & e^{-j\frac{2\pi}{4}2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}3} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}4} & e^{-j\frac{2\pi}{4}6} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}3} & e^{-j\frac{2\pi}{4}6} & e^{-j\frac{2\pi}{4}9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Notiamo come W_N sia simmetrica $W_N = W_N^T$

Perciò la DFT^{-1} si può scrivere come.

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

Es $N=4$

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{+j\frac{2\pi}{4}2} & e^{j\frac{2\pi}{4}3} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}2} & e^{j\frac{2\pi}{4}4} & e^{+j\frac{2\pi}{4}6} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}3} & e^{j\frac{2\pi}{4}6} & e^{j\frac{2\pi}{4}9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}$$

abbiamo che

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$$

Poiché W_N^* è anch'essa simmetrica

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^H$$

Quindi la matrice W_N è <u>ortogonale</u>.

Si vede subito come le righe e le colonne di W_N sono ortogonali. La matrice non è unitaria perché i prodotti scalari non nulli sono pari a N.

Es $N=4$

$$\underline{W}_4 \underline{W}_4^H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}} & e^{-j\frac{2\pi}{4}2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}3} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}4} & e^{-j\frac{2\pi}{4}6} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}3} & e^{-j\frac{2\pi}{4}6} & e^{-j\frac{2\pi}{4}9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{j\frac{2\pi}{4}2} & e^{j\frac{2\pi}{4}3} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}2} & e^{j\frac{2\pi}{4}4} & e^{j\frac{2\pi}{4}6} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}3} & e^{j\frac{2\pi}{4}6} & e^{j\frac{2\pi}{4}9} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

Verifica

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k_1 n}\, e^{j\frac{2\pi}{N}k_2 n} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k_1-k_2)} & k_1 \neq k_2 \\ N & k_1 = k_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}N(k_1-k_2)} = 0 & k_1 \neq k_2 \\ N & k_1 = k_2 \end{cases}$$

Per rendere W_N unitaria a volte si definisce una DFT simmetrizzata con

DFT: $$X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k=0,\dots,N-1$$

DFT^{-1}: $$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n=0,\dots,N-1$$

In questo caso $$W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right]_{\substack{k=0..N-1 \\ n=0..N-1}}$$

e $W_N W_N^* = \underline{I}_N$, oppure $W_N W_N^H = I_N$.

Nel seguito continueremo a usare la DFT non simmetrizzata salvo specifica menzione.

È interessante vedere le proprietà statistiche della trasformata anche in forma matriciale. Supponiamo che $\underline{x}$ sia un vettore aleatorio a media nulla $E[\underline{x}]=\underline{0}$. Ovviamente $E[\underline{X}] = W_N E[\underline{x}] = \underline{0}$. Le correlazioni tra gli elementi di $\underline{x}$ sono contenute nella matrice di correlazione (che è anche la matrice di covarianza)

$$E[\underline{X}\underline{X}^H] = E[\underline{\underline{W}}_N \underline{x}\underline{x}^H \underline{\underline{W}}_N^H] = \underline{\underline{W}}_N E[\underline{x}\underline{x}^H]\underline{\underline{W}}_N^H$$

$$= \underline{\underline{W}}_N \begin{bmatrix} E[|x[0]|^2] & E[x[0]x^*[1]] & \dots & E[x[0]x^*[N-1]] \\ E[x[1]x^*[0]] & E[|x[1]|^2] & \dots & E[x[1]x^*[N-1]] \\ E[x[2]x^*[0]] & E[x[2]x^*[1]] & \dots & E[x[2]x^*[N-1]] \\ \vdots & & & \\ E[x[N-1]x^*[0]] & E[x[N-1]x^*[1]] & \dots & E[|x[N-1]|^2] \end{bmatrix} \underline{\underline{W}}_N^H =$$

$$= \underline{\underline{W}}_N \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[-1] & \dots & R_x[-N+1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \dots & R_x[-N+2] \\ R_x[2] & R_x[1] & \dots & R_x[-N+3] \\ \vdots & & & \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \underline{W}_N^H$$

Es. $N=4$

$$\underline{\underline{W}}_4 \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[-1] & R_x[-2] & R_x[-3] \\ R_x[1] & R_x[0] & R_x[-1] & R_x[-2] \\ R_x[2] & R_x[1] & R_x[0] & R_x[-1] \\ R_x[3] & R_x[2] & R_x[1] & R_x[0] \end{bmatrix} \underline{\underline{W}}_4^H$$

Abbiamo già dimostrato che se $R_x[3] = R_x[-1]$;
$R_x[2] = R_x[-2]$; $R_x[1] = R_x[-3]$,

$$E[\underline{X}\underline{X}^H] = N \underline{\underline{I}}_N$$

La condizione implica che la matrice $E[\underline{X}\underline{X}^H]$ sia
"circolante"

Es. $N=4$

$$\begin{pmatrix} R_x[0] & R_x[-1] & R_x[-2] & R_x[-3] \\ R_x[-3] & R_x[0] & R_x[-1] & R_x[-2] \\ R_x[-2] & R_x[-3] & R_x[0] & R_x[-1] \\ R_x[-3] & R_x[-2] & R_x[-1] & R_x[0] \end{pmatrix}$$ SHIFT CIRCOLARE

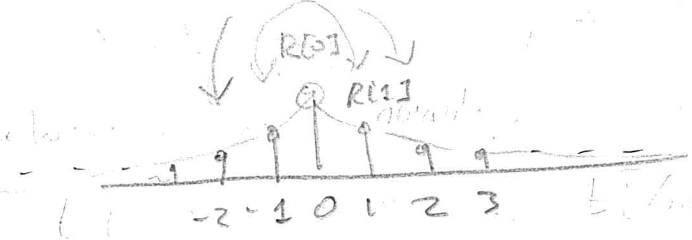
La proprietà è ben nota in algebra delle matrici: PD14
La matrice della DFT diagonalizza qualunque matrice circolante.

SULLA PROPRIETÀ DI PERIODICITÀ DI $R_x[m]$

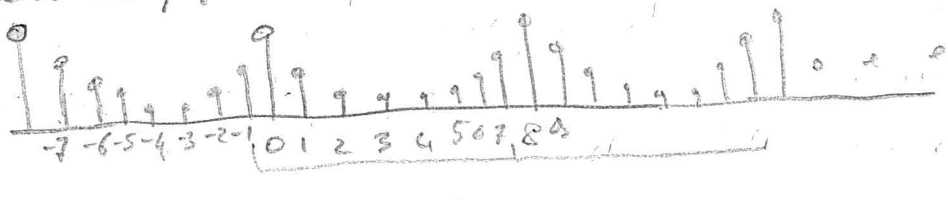
Approfondiamo qui di seguito la condizione che rende la DFT decorrelante. È verosimile che un processo discreto abbia una sequenza $R_x[m]$ periodica?
Ricordiamo che una autocorrelazione (in generale complessa) deve essere Hermitiana

$$R_x[-m] = R_x^*[m] .$$

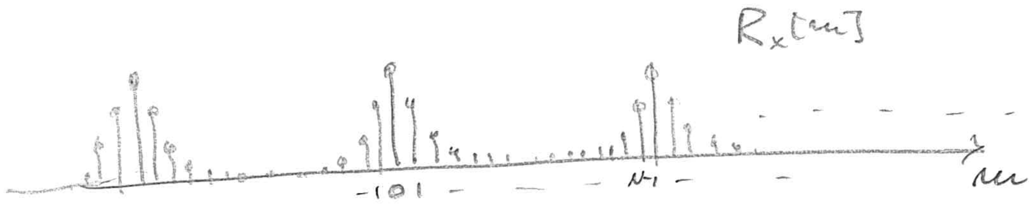
Per fissare le idee assumiamo che il segnale sia reale.
Pertanto vale la simmetria $R_x[-m] = R_x[m]$



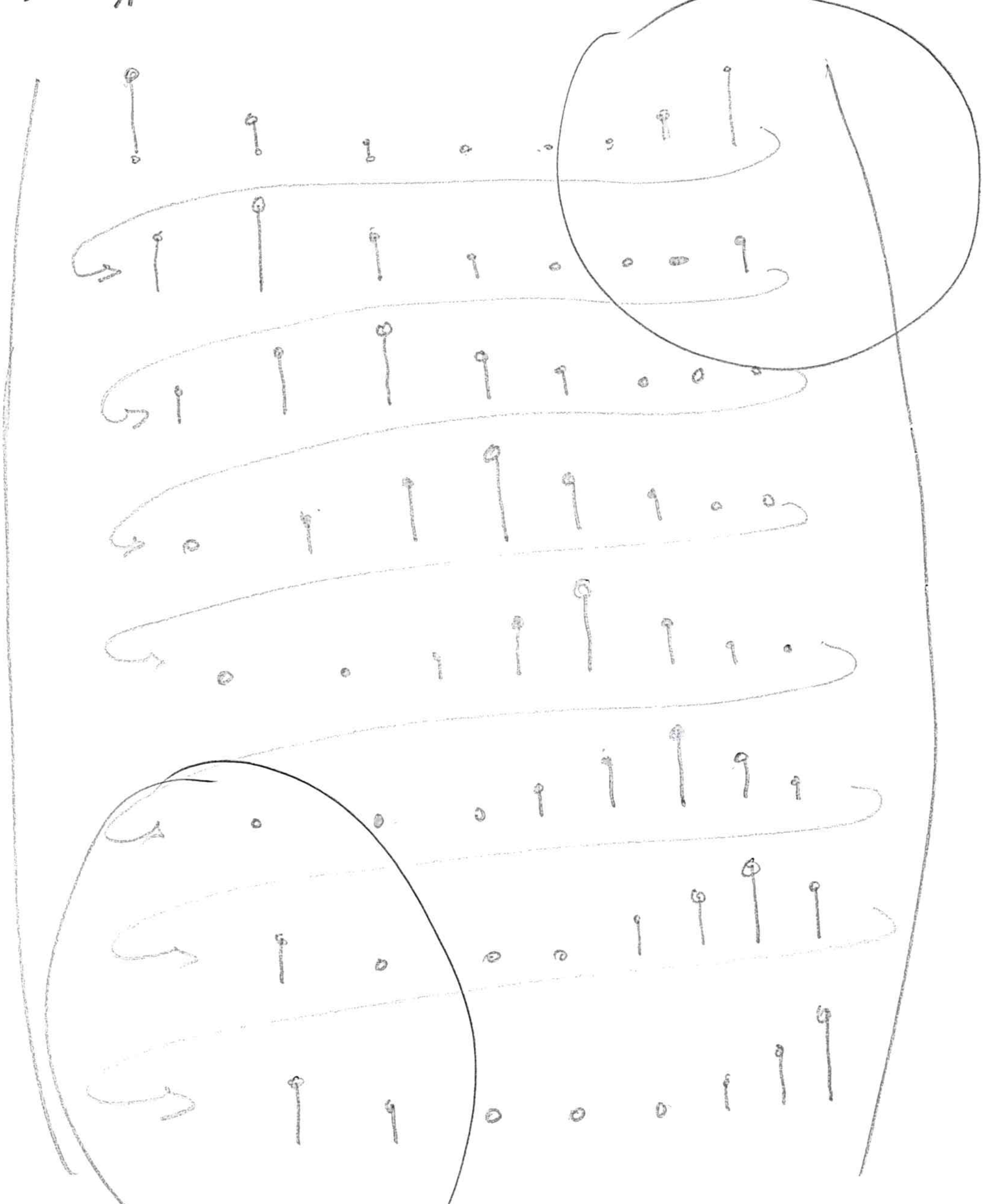
L'ulteriore vincolo di periodicità (circolarità) richiede che la autocorrelazione sia del tipo mostrato in figura.



Ma questo è realistico?
In effetti no, perché la autocorrelazione dovrebbe andare a zero per $m \to \infty$.
Però se N è grande e la autocorrelazione è composta a valori di m piccoli, come in figura



l'effetto nella matrice resta confinato ai bordi



Quindi possiamo affermare che la DFT è quasi decorrelante in molti casi pratici.

Per completare la discussione facciamo notare che una autocorrelazione periodica può derivare da un segnale periodico. In particolare, se

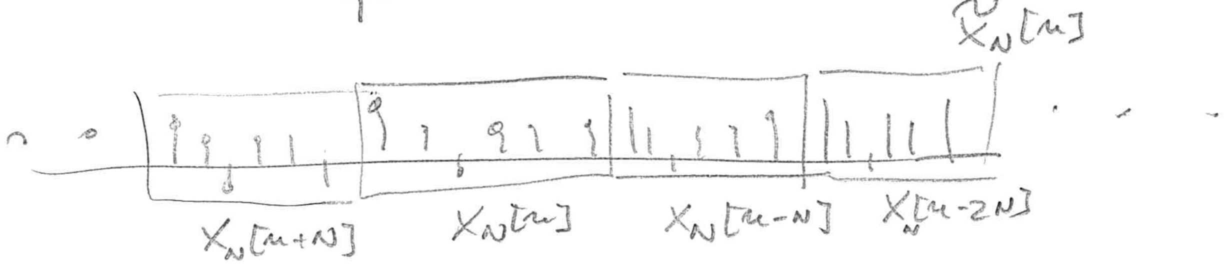
$x_N[n]$ $\quad n=-\infty,\dots,+\infty$

PD16

versione troncata a $0,\dots,N-1$ di $x[n]$

Estensione periodica

$$\tilde{x}_N[n] = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} x_N[n-qN]$$



La autocorrelazione di $\tilde{x}_N[n]$ è periodica con periodo N.