

PALMIERI-TNO

INTRODUZIONE ALLA MODULAZIONE
NUMERICA

LEZIONI DAL CORSO DI
TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE
NUMERICA DEI SEGNALI /
COMUNICAZIONI ELETTRICHE
(SUN)
AA. 2015-16

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

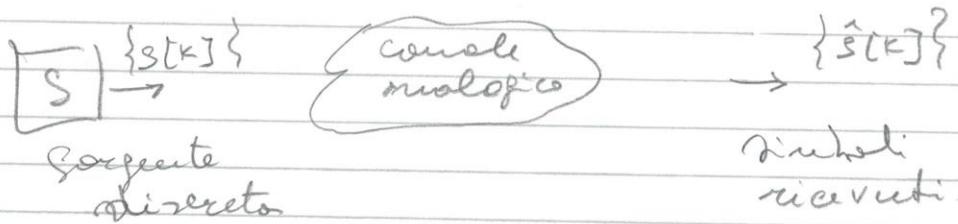
INTRODUZIONE ALLA MODULAZIONE NUMERICA

In un sistema numerico l'informazione che deve essere trasportata dal canale è di tipo "binarios" e "keep-discrete".

In particolare, in un collegamento punto-punto una sorgente discreta S emette simboli

$$\boxed{S} \xrightarrow{\{s[k]\}} \quad s[k] \in \mathcal{R} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$$

appartenenti ad un alfabeto finito \mathcal{R} che deve essere trasportati da un canale (tipicamente eletromagnetico) analogico e ricostruiti in ricezione.



I simboli sono tipicamente espressi in maniera codificata o intervalli di T_s secondi (CBR - Constant Bit-rate), su definizione

$$\frac{1}{T_s} \text{ FREQUENZA DI SIMBOLO} \quad \frac{[simboli]}{[sec]} = [baud]$$

T_s INTERVALLO DI SIMBOLO (SYMBOL TIME)

$$B_s = \frac{\log M}{T_s} \quad \text{BIT-RATE (FREQUENZA DI CIFRA)}$$

Potenza-TN 2

Esempio 1 $\mathcal{R} = \{0, 1\}$ $T_s = 1 \mu\text{sec}$.

Un segmento di rete realizzabile

0	1	1	0	0	1	1	1	1
...								

$$\xleftarrow{T_s} \frac{1}{T_s} = 10^6 \text{ band} = 1 \text{ Mband}$$

$$B_x = \frac{1}{T_s} = \dots = 1 \text{ Mbit/sec}$$

Esempio 2

$\mathcal{R} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Un segmento di rete realizzabile

α_1	α_1	α_2	α_2	α_3	α_2	...
...						

$$\frac{1}{T_s} = 10^3 \text{ band} = 1 \text{ Kband}$$

$$B_x = \frac{\log_2 3}{T_s} = 1.58 \frac{\text{Kbit}}{\text{sec}}$$

Esempio 3

$\mathcal{R} = \{00, 01, 10, 11\}$ $M=4$

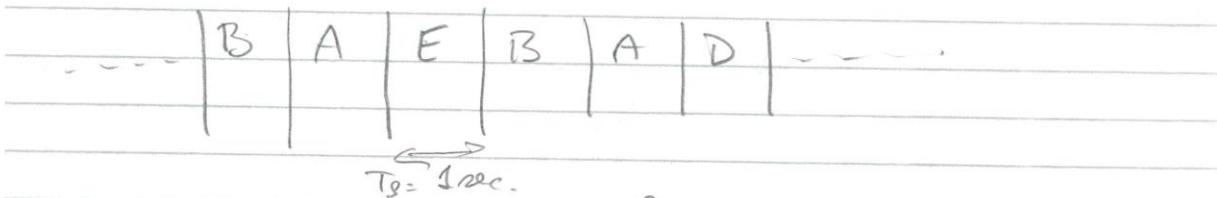
$T_s = 0.5 \text{ msec}$ (Symbol composti da stringhe binarie di lunghezza 2)

01	11	00	00	10	10	...
...						

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{0.005} = 200 \text{ band}$$

$$B_x = \frac{\log_2 4}{T_s} = \frac{2}{0.005} = 400 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}$$

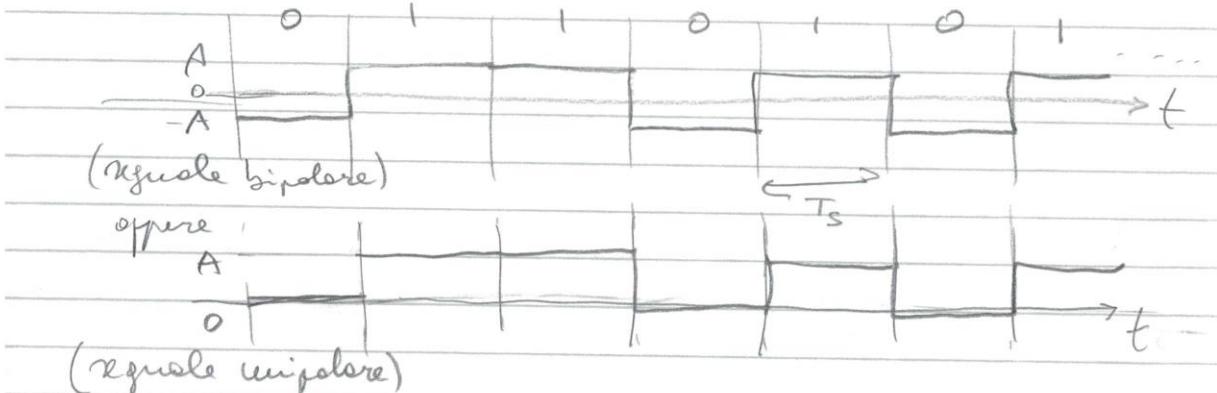
Esempio 4 $\mathcal{R} = \{A, B, C, D, E\}$ $M=5$ $T_s = 1 \text{ sec.}$



$$\frac{1}{T_s} = 1 \text{ band}$$

$$B_2 = \frac{\log_2 5}{1} = 2.32 \text{ bit/sec.}$$

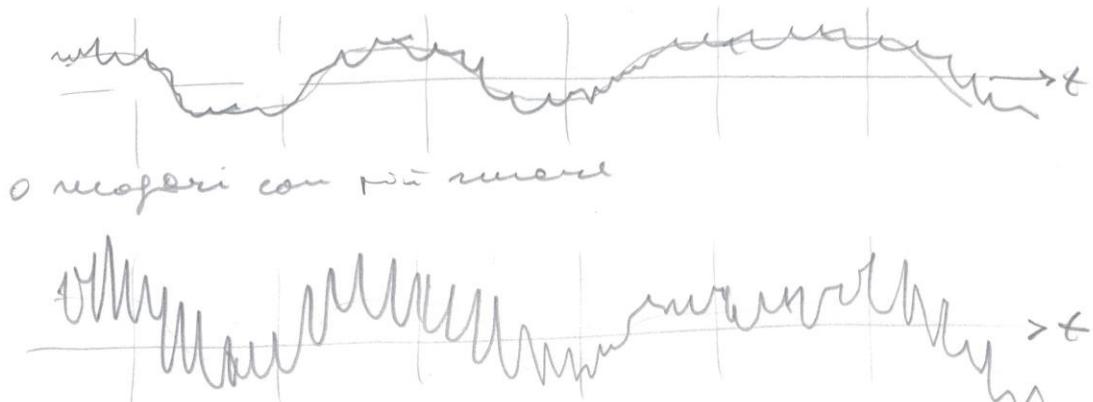
Ora il problema è: come adattare la natura tempo-discreta e simbolica del flusso dati al canale analogico? Ricordiamoci che un canale analogico è formato nella transmisiione di un segnale tempo-continuo a valori costanti. Dunque il flusso di simboli va trasformato in un segnale analogico! Prendiamo ad esempio il caso dell'alfabeto binario $\mathcal{R} = \{0, 1\}$. Un'opzione intuitiva già essere ottenere il segnale analogico a due livelli mostrato in figura



Avviamente questi devono essere trasmissibili nel canale che in questo caso deve essere pass-banda (l'analisi esatta delle caratteristiche spettrali dei segnali della modulazione numerica sarà presentata in seguito)

MACROL-TN 4

Il canale radiotecnico distorsioni e rumore. Per questo in ricezione il segnale potrebbe avere una forma del tipo



Da questa forma d'onda il ricevitore dovrà recuperare al meglio le sequenze dei simboli binomiali modulatore. Ci sono dei problemi?

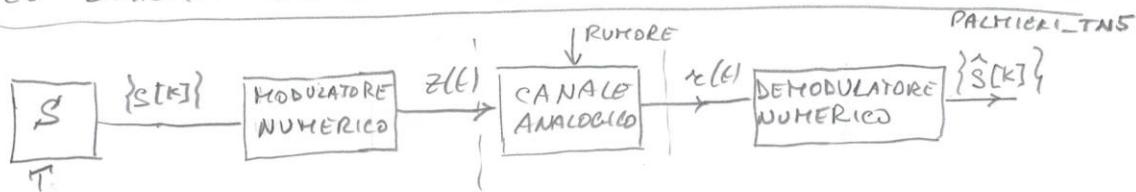
Come estrarre il ricevitore? Quale formato è più appropriato usare in dipendenza delle caratteristiche del canale analogico?

Come valutare le prestazioni della comunicazione?

Ci sono limiti in termini di prestazioni e di velocità di trasmissione?

A complicare ulteriormente il problema c'è il fatto che al ricevitore non sono noti gli istanti di suddivisione fra i simboli (indicati in figura con delle barre verticali). L'obiettivo del problema delle seguonizzazioni di simboli; il ricevitore deve essere in grado di allinearsi temporalmente alle sequenze in maniera autonoma (il ricevitore vede solo il segnale distorto e contaminato).

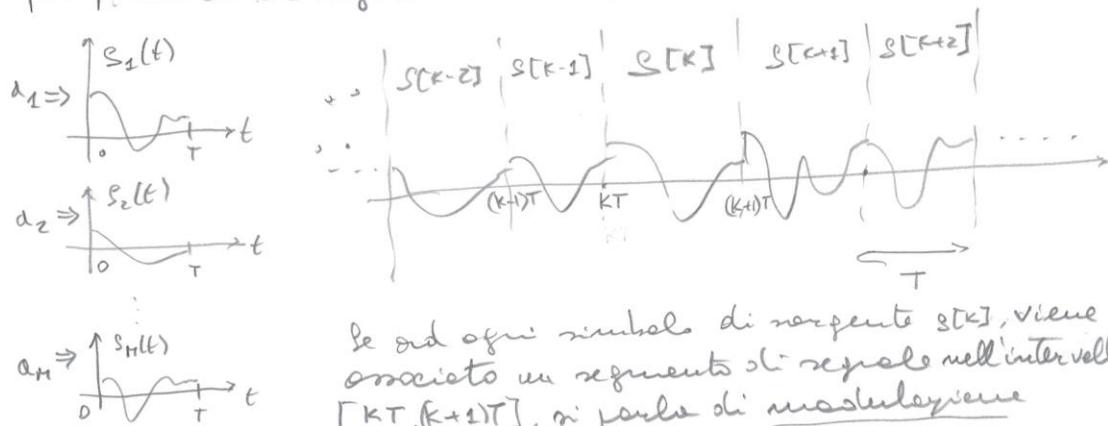
LO SCHEMA GENERALE DI UN COLLEGAMENTO NUMERICO



$$\{s[k]\} = \dots s[k-1] s[k] s[k+1] s[k+2] \dots$$

La sorgente emette ogni T secondi un simbolo $s[k] \in \mathcal{S}$, appartenente ad un alfabeto discreto $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$.

Il modulatore dispone di una collezione di M segnali di sfondo $\mathcal{T} = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$ che vengono concatenati per fornire il segnale modulato



Se ad ogni simbolo di sorgente $s[k]$, viene associato un segmento di segnale nell'intervalle $[kT, (k+1)T]$, si parla di modulazione segno numerico in quanto le operazioni

ad ogni intervallo di simboli avvengono in maniera indipendente.

Formalmente il segnale modulato $z(t)$ (analogo) può essere scritto come

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-kT; s[k])$$

dove

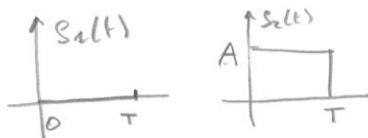
$$s(t; s[i]) = \begin{cases} s_i(t) \text{ se } s[i] = a_1 \\ s_2(t) \text{ se } s[i] = a_2 \\ \vdots \\ s_M(t) \text{ se } s[i] = a_M \end{cases}$$

SEGNALAZIONE M-aria
SENZA MEMORIA.

- $\left\{ \begin{array}{l} T \text{ symbol time (intervalli di simboli)} \\ \frac{1}{T} \text{ Band-rate o frequenza di simboli} \\ \frac{\log M}{T} \text{ Bit-rate o frequenza di cifre} \end{array} \right.$

ESEMPI DI ALCUNI FORMATI DI MODULAZIONE PALMIERI-TNG

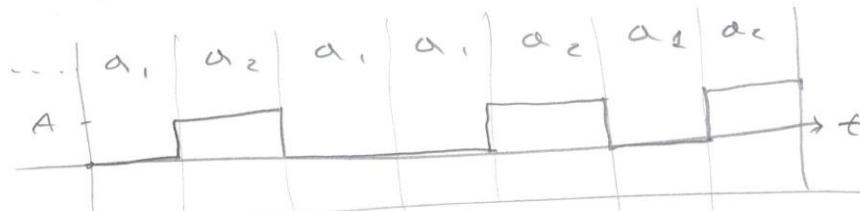
Ese 1
 $M=2$



$$\mathcal{R} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

(PAM UNIPOLARE)

Un esempio di una realizzazione a monte è:

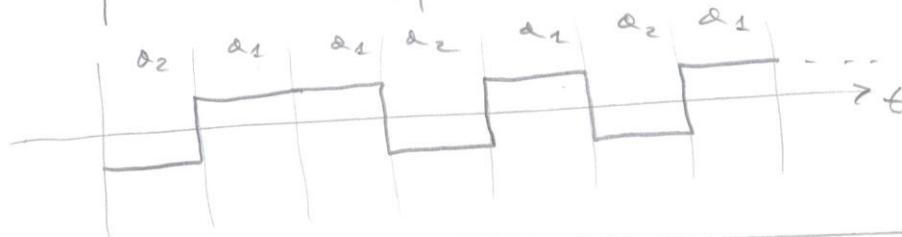


Ese. 2
 $M=2$



$$\mathcal{R} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

(PAM POLARE)

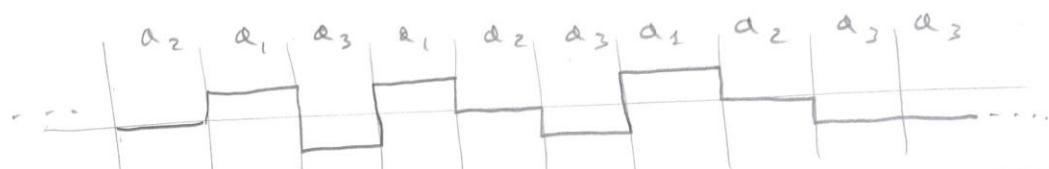


Ese 3
 $M=3$

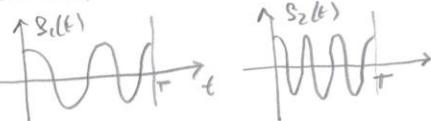


$$\mathcal{R} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

(PAM TERNARIO)

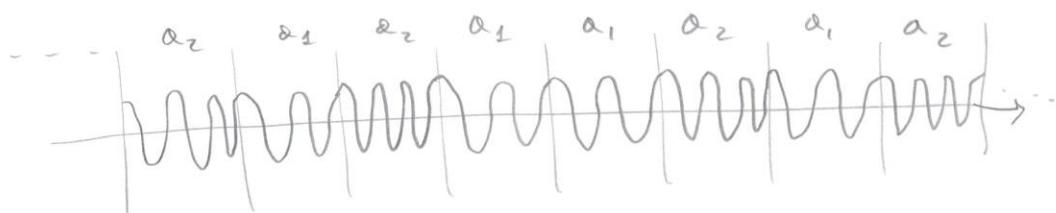


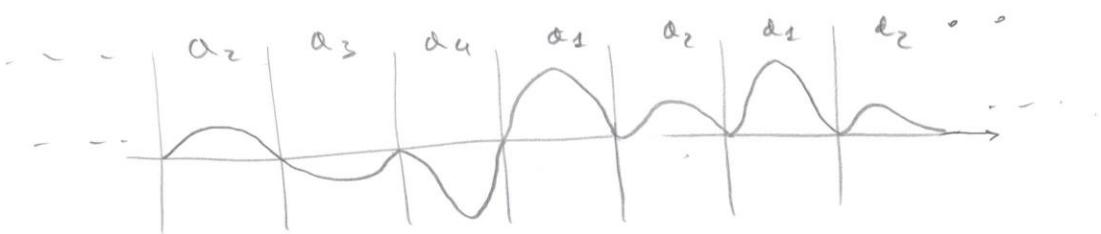
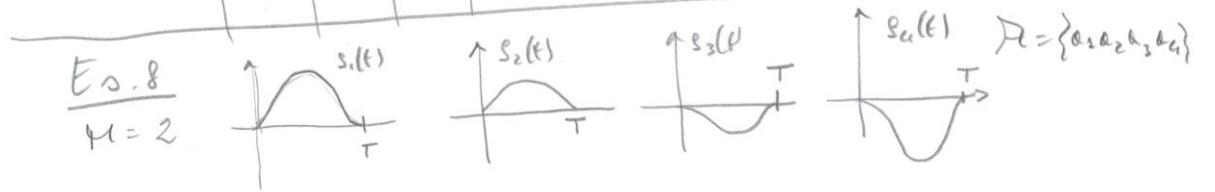
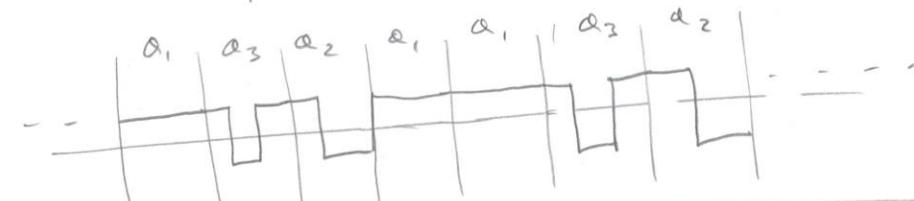
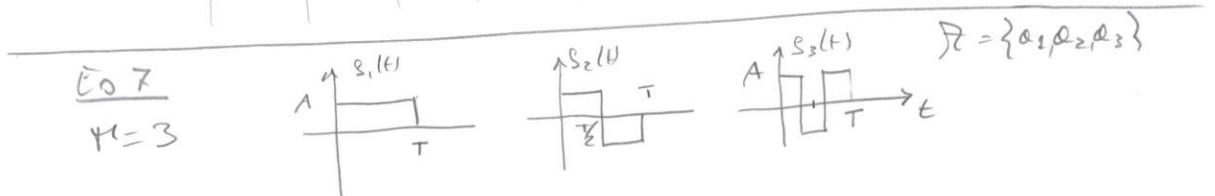
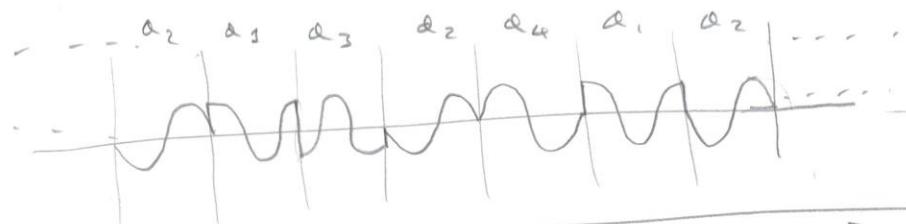
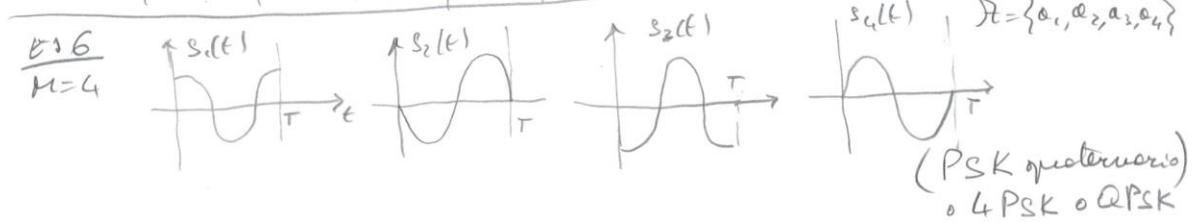
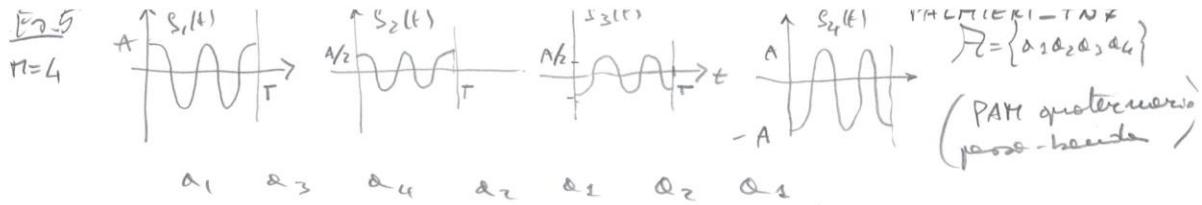
Ese 4
 $M=2$



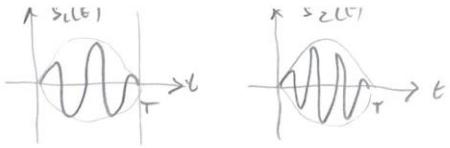
$$\mathcal{R} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

(FSK BINARIO)



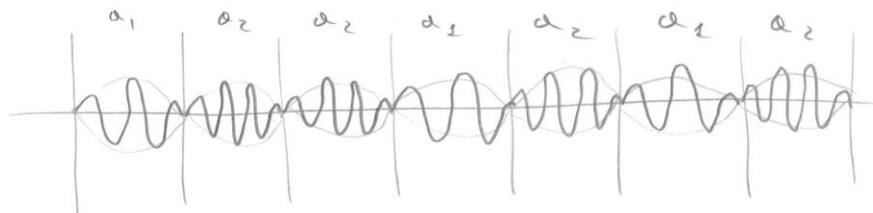


Esercizio 3
 $M=2$

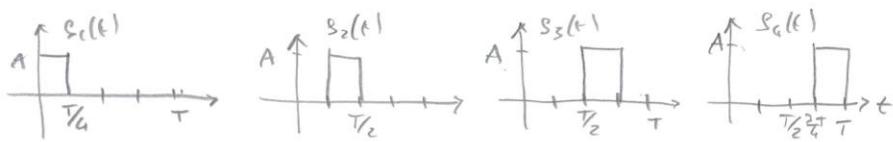


$$\mathcal{F} = \{s_1, s_2\}$$

PALIERI INUS
FSK binario

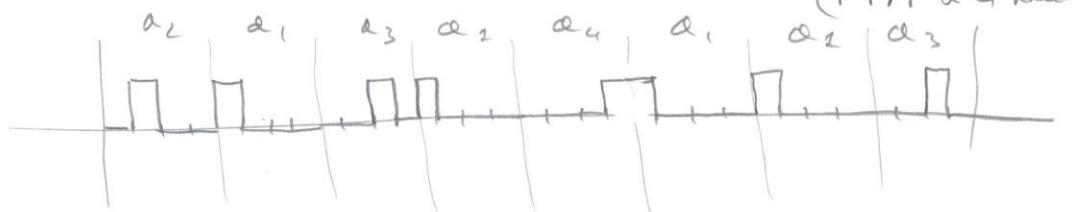


Esercizio 10
 $M=4$

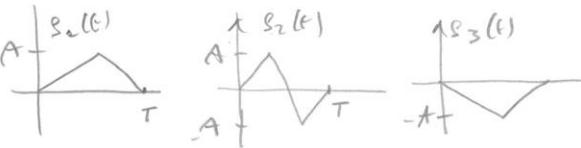


$$\mathcal{F} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

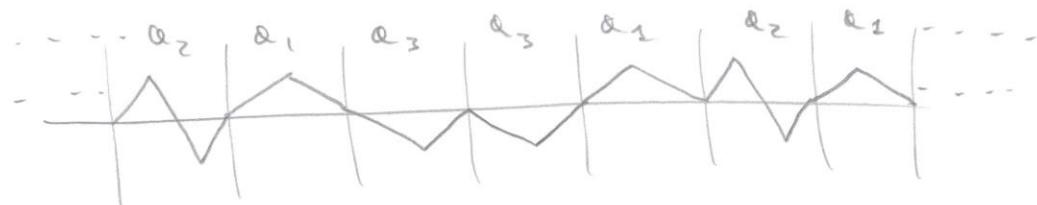
(PPM a 4 simboli)



Esercizio 11
 $M=3$

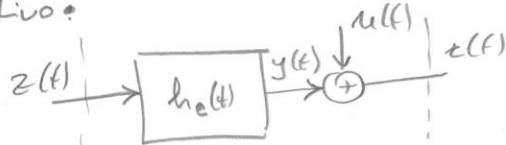


$$\mathcal{F} = \{s_1, s_2, s_3\}$$



IL CANALE

Il blocco relativo al canale analogico modella genericamente il meccanismo teorizzativo che può anche essere molto complesso: comprendente più fonte, oltremare, decodificatori, interferenze, distorsioni ecc. Nella modellistica più tipica si assume che il canale sia modellato complessivamente con un blocco lineare tempo-invariante e un rumore additivo.

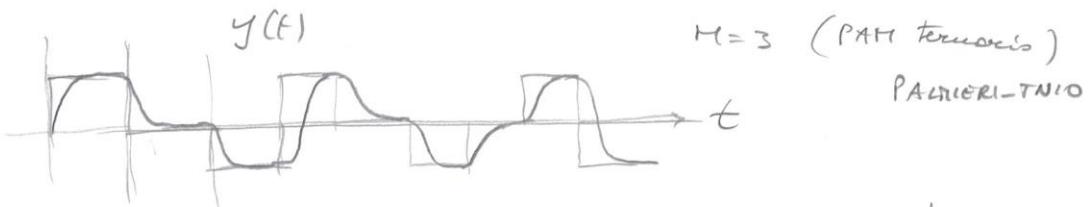


Il blocco lineare $h_c(t)$ modella le caratteristiche di dispersione nel tempo e di riflettività in frequenza del mezzo teorizzato (un ovo, una linea di trasmissore, un fenomeno propagativo elettromagnetico, ecc.)

Il rumore additivo $u(t)$ racchiude tutti i disturbi indesiderati quali rumore ambientale, interferenze, rumore dei dispositivi, ecc. Tipicamente si assume che il rumore sia indipendente dal segnale $z(t)$. (incoerente), ovvero che non ci sia alcuna relazione fra il segnale teorico e il rumore contaminante.

Esistono modelli più complessi in cui il rumore dipende dai livelli del segnale teorico, ma la scrittura introduttiva di questa discussione ci ne impedisce di ignorarli, almeno per ora.

Il modello a lineare del canale va ovviamente considerato come il comportamento equivalente alle frequenze di interesse per $z(t)$. Tipicamente $z(t)$ è un segnale pass-basso o un segnale pass-banda.



La figura mostra un segnale PAM-Terminis distorto da un sistema pass-banda del tipo $h_c(t) = K e^{-\alpha t} u(t)$ (perdita RC)

$$H_c(f) = \frac{K}{\alpha + j 2\pi f}; |H_c(f)| = \frac{K}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}; \angle H_c(f) = -\arctan \frac{2\pi f}{\alpha}$$

Si noti lo spillover temporale causale che produce una "spillover" da ogni intervallo di simbolo all'intervallo successivo (e oltre).

Il fenomeno è un po' più difficile da disegnare per un segnale $z(t)$ pass-banda, come per esempio per un FSK che passa in un filtro pass-banda distorcendo ovante ad esempio $h_c(t) = K e^{-\alpha t} \sin(2\pi f_c t + \theta)$.

In generale lo "spillover" che si verifica crea una



dipendenza fra i simboli che va sotto il nome di ISI (INTER-SYMBOL INTERFERENCE) (Interferenza intersimbolica).

Questo effetto sarà trattato in seguito nella nostra discussione. Vi basteremo per ora a considerare un canale non dispersivo ideale totalmente



trasparente alle frequenze di interesse per $z(t)$.

Al modello di canale ideale si potrebbe aggiungere un ritardo e/o una attenuazione: $h_x(t) = K \delta(t-\Delta)$.

Il ritardo Δ crea una "latenza" nella comunicazione.
 Possono decidere di ignorare questo effetto per:
 considerare $\Delta=0$ o la applicazione che utilizza questo esiguo ritardo come accettabile.
 (In sistemi di comunicazione intersatellitari, cui c'è anche un canale di ritorno, la latenza può diventare una caratteristica importante)

La attenuazione introduce sul canale per essere assorbita nell'ampiezza del segnale $s(t)$ o nell'ampiezza relativa del rumore. A questo proposito è noto che la potenza di $s(t)$ è l'energia mediamente presa in un intervallo di risalto. Diversamente, definendo l'energia dei segnali $E_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} s_i^2(t) dt$, $i=1, \dots, M$, l'energia media è $\bar{E} = \sum_{i=1}^M E_i p_i$ e quindi la potenza è

$$P_s = \frac{\bar{E}}{T}$$

Per un segnale di tensione misurata in mV , $[\bar{E}] = mV^2 \cdot \text{sec}$

$$[P_s] = (mV)^2$$

Qui si assume che i simboli di segnale sono indipendenti e che la modulazione è senza memoria.

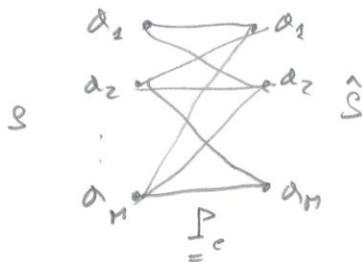
IL CANALE EQUIVALENTE

PALMIERI-TN12

Se consideriamo il comportamento end-to-end della catena trasmissiva $s[k] \rightarrow \hat{s}[k]$



Assumendo che il canale venga impiegato indipendentemente in ogni intervalli di simboli (si parla di "singolaruso" del canale), il modello equivalente è quello di tante realizzazioni indipendenti delle variabili aleatorie $s \in A = \{a_1, \dots, a_M\}$ che viene "trasformato" dal meccanismo aleatorio \hat{s} in \hat{s} . Assumendo che \hat{s} appartenga allo stesso alfabeto di s , $\hat{s} \in \hat{A} = \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M\}$, possiamo modellare il canale con una matrice P_c di probabilità condizionate:



$$P_c = \begin{bmatrix} P_{11}\{\hat{s} = \hat{a}_1 | s = a_1\} & \dots & P_{1M}\{\hat{s} = \hat{a}_M | s = a_1\} \\ P_{21}\{\hat{s} = \hat{a}_1 | s = a_2\} & \dots & P_{2M}\{\hat{s} = \hat{a}_M | s = a_2\} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{M1}\{\hat{s} = \hat{a}_1 | s = a_M\} & \dots & P_{MM}\{\hat{s} = \hat{a}_M | s = a_M\} \end{bmatrix}$$

Matrice row-stocastica:
elementi in $[0, 1]$
e somma degli
elementi di
ogni riga pari
a 1

MATRICE DI CANALE

(*) A volte l'effetto al ricevitore può essere diverso come nel caso in cui si intascava un simbolo di cancellazione. Trovateceremo questa estensione in queste brevi note.

PAULIBRI - TN13

Le probabilità coinvolte in P_e dipendono (in misura non necessariamente scalfice) dal formato di modulazione, del canale e del ricevitore.

Le probabilità del collegamento sono valutate in termini di probabilità di errore medio, ovvero

$$P_e = P_r \{ \hat{s} \neq s \}$$

Dalle conoscenze delle matrice di canale e ~~assumendo~~ che i simboli della sorgente (assunti in numero indipendente) sono distribuiti secondo le probabilità (PROBABILITÀ A PRIORI) $\Pi_S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,

$$P_e = P_r \{ \hat{s} \neq s \} = 1 - \underbrace{P_r \{ \hat{s} = s \}}_{P_c \text{ prob. corrette ricevute}} = 1 - \sum_{i=1}^n p(\hat{s} = s | s = a_i) p_i$$

In forme matriciali, obiettando $\Pi = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$, si ottiene che le prob di errore media si scrive

$$P_e = 1 - \left(\text{diag}(f_c) \right)^T \Pi$$

Note elencate

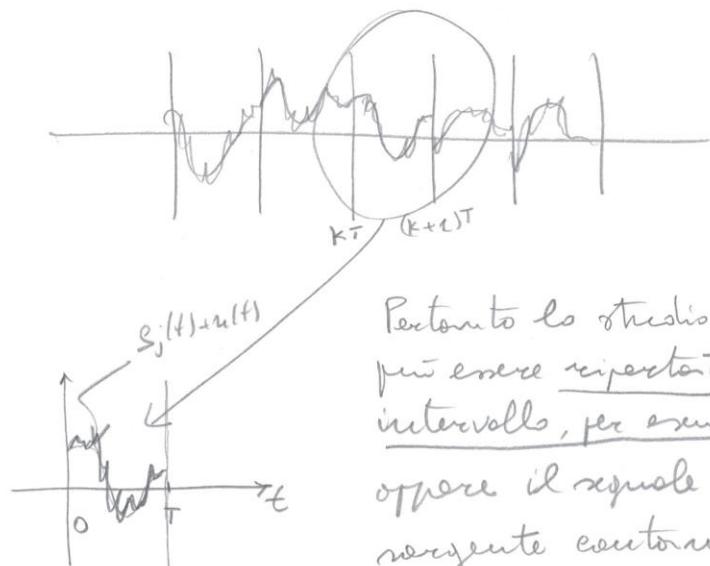
L'esperienza con le prob di corretta ricezione media coerente di ottenere il risultato uscendo solo i valori contenuti nelle diagonali principali di P_e (prob di corretta ricezione corrispondente)

Altre quantità possono essere calcolate dalla conoscenza delle matrici di canale ^{e delle rd. a priori} e la mutua informazione

$I(s; \hat{s})$, l'entropia $H(s|\hat{s})$, le capacità di canale $C = \max_{\Pi_S} I(s; \hat{s})$. Queste saranno considerate in seguito.

PALMIERI - TN14

Nello schema semplificato elencato studiando, non c'è dipendenza fra i simboli di segnale, ma c'è interferenza interimbolica (neutra dispersione temporale), il ricevitore è perfetto oltricentore, il rumore è bianco, pertanto il ricevitore opera in modo indipendente all'interno di ogni intervallo di simboli $[kT, (k+1)T]$



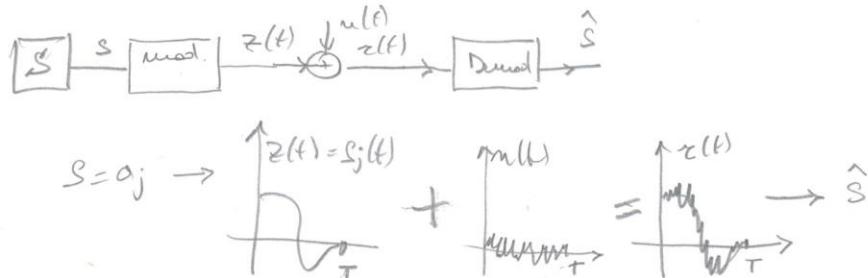
Pertanto lo studio del ricevitore può essere riportato ad un qualsiasi intervallo, per esempio $[0, T]$ dove opera il segnale reale delle variazioni continuo del rumore

additivo. L'ipotesi di bianchezza del rumore implica l'assenza di dipendenza fra i campioni del rumore, pertanto anche il rumore può essere "tagliato" all'intervalli della ricezione.

L'ipotesi di bianchezza del rumore è una estrapolazione in quanto un rumore bianco ideale ha autocorrelazione singolare, basta infatti a questo potendo interpretare.

Non potremo neanche disprezzarlo!! Diciamo di più: in futuro su questa ipotesi limitandoci per ora a dire che il rumore è bianco alle "condizioni considerate" ovvero non risulta struttura di dipendenza temporale. Questo equivale a supporre che il rumore sia bianco (piatto) nelle bande del segnale.

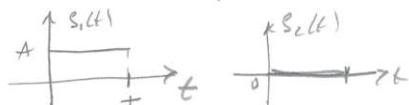
Quindi lo stesso funzionale per segnali s e s_j è costituito da un insieme di segnali $r(t)$, più semplici.



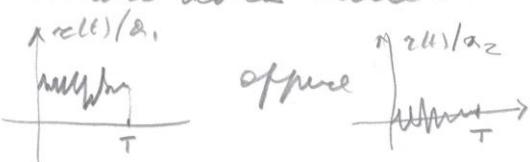
APPROCCIO INTUITIVO ALLA RICEZIONE

Prima di impostare il problema delle ricezioni ottenute in maniera più formale, cominciamo ad esaminare il problema in maniera intuitiva su qualche esempio.

Supponiamo che il nostro modulatore sia binario e che vi sia una modulazione unipolare, ovvero trasmetta i due segnali



Il ricevitore vedrà nelle due ipotesi



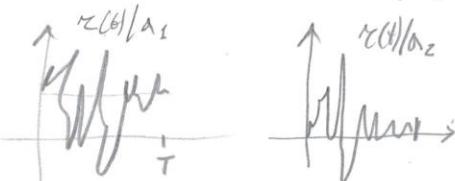
Quale spartizione potrei utilizzare per stimare s da $r(t)$? E' abbastanza intuitivo che conviene calcolare la media temporale

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt$$

e vedere se è "grande" o "piccola", ovvero definisce una soglia λ , e se ne calcola regola

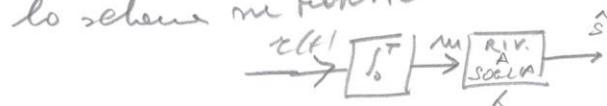
$$\begin{cases} \hat{s} = a_1 & \text{se } m > \lambda \\ \hat{s} = a_2 & \text{se } m < \lambda \end{cases}$$

Ovviamente il criterio non è infallibile, precisamente se il rumore è elevato come in figura



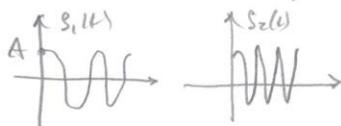
dove potrebbe necessario che venga presa la decisione sbagliata (errore). Il modello nelle elettroniche del segnale trasmettente, del rumore e lo scorrere delle regole di decisione, ci consentiranno di valutare le prestazioni di un tale sistema in termini di probabilità di errore.

Per questo esigo, verro' fuori dalla scelta che riguarda le due frequenze

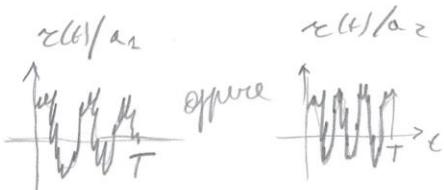


e' proprio quell' ottimo.

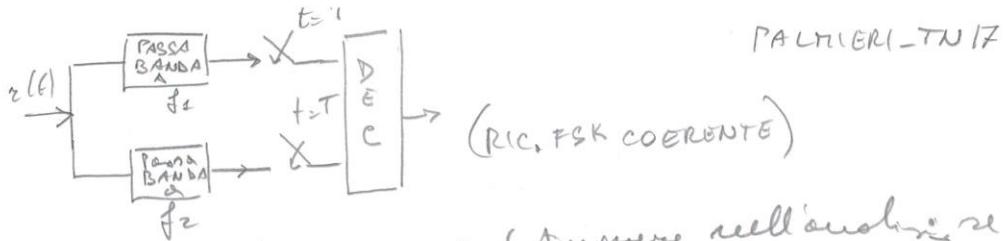
Presentiamo un ulteriore esempio su cui ho ragionato
è ancora bussola e il modulatore usa una modulazione
FSK con due frequenze f_1 e f_2 , ovvero due segnali:



Il ricevitore redrà nelle due ipotesi



Quindi come contiene un ricevitore? Un po' di intuizione ci suggerisce di mettere due filtri passa banda a banda strette e vedere quale delle due uscite è la "più grande"



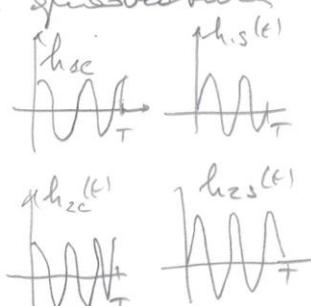
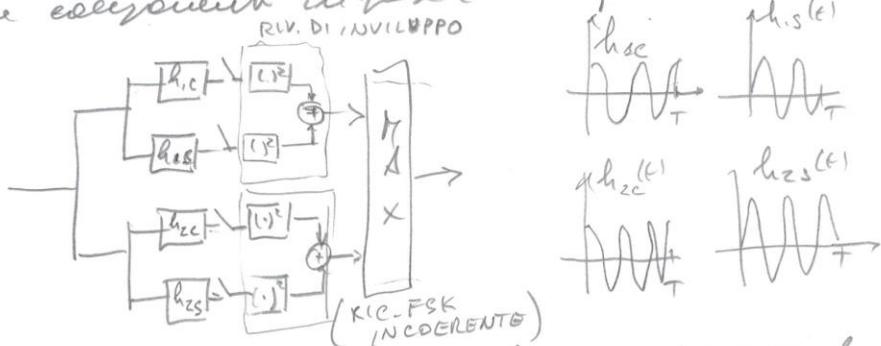
PALMIERI - TN 17

A questo punto bisognerà distinguere nell'ambiente se la fase di $S_1(t)$ e di $S_2(t)$ è preservata nello emodossare, in quel caso si parla di ricezione coerente. L'ambiente che segue permette ad una struttura di ricevitore coerente di avere filtri avendo risposte impulsive pass-bandite estremamente perci alle ferme dei due segnali



un compensoamento per $t=T$ e uno scatenamento basato sul massimo.

Nel caso incoerente, ovvero quando la fase del segnale ricevuto non è nota, bisognerà estendere gli filtri pass-bandite con le due componenti in fase e in quadratura.



e una rivelazione degli inviluppi. I dettagli verranno discuti in seguito.