

LO SPAZIO DEI SEGNALI

LEZIONI DAL CORSO DI
TRASMISSIONE ED ELABORAZIONE
NUMERICA DEI SEGNALI /
COMUNICAZIONI ELETTRICHE (SUN)

AA. 2015-16

Prof. FRANCESCO A.N. PALMIERI

La manipolazione dei segnali, per ricavare il segnale ottenuto, o più in generale per estrarre informazione, può beneficiare da una rappresentazione geometrica.

In particolare, in ogni segnale, appartenente ad una certa classe, si associa un vettore in uno spazio vettoriale è possibile discutere di proprietà e combinazioni di segnali in maniera piuttosto semplice e generale.

Un segnale descritto da una funzione nel dominio del tempo può essere molto complesso, e magari difficile anche da disegnare! Trattare come un vettore in uno spazio astratto ne può facilitare la manipolazione e la associazione ad uno schema di risoluzione di un problema.

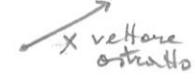
Nell'analisi che segue ci limiteremo a considerare segnali di energia visto che i segnali per la manipolazione numerica sono ottenuti dalle equazioni di segnali tempo-limitato (energia di energia).

Ricordiamo che un segnale $x(t)$ (reale o complesso) è un segnale di energia se $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$.

Costruiamo pertanto uno spazio di Hilbert per i segnali di energia mettendo in corrispondenza i segnali nel dominio del tempo e i vettori astratti dello spazio con le loro proprietà elementari.



$x(t)$
 segnale nel dominio
 del tempo (reale o complesso)

$x \in \mathcal{H}$ 
 elemento dello
 spazio vettoriale

Nello spazio di Hilbert devono essere definite alcune operazioni fondamentali in corrispondenza biunivoca con quelle definite sui segnali nel dominio del tempo.

(P1) Prodotto per uno scalare
 $a \in \mathbb{R}$ o $(a \in \mathbb{C})$



$y(t) = a x(t)$ \longleftrightarrow $y = a x = y \in \mathcal{H}$
 deve essere definito l'elemento y e questo deve appartenere a \mathcal{H} (chiusura rispetto alle operazioni)

(P2) Somma di due segnali
 $z(t) = x(t) + y(t)$

\longleftrightarrow $z = x + y \quad z \in \mathcal{H}$
 deve essere definita una operazione somma e il risultato deve appartenere a \mathcal{H}

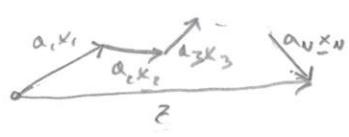


Conseguenza di P1 e P2 è che qualunque combinazione lineare è definita ed è chiusa

$$z(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_N x_N(t)$$

$$\longrightarrow z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N$$

$z \in \mathcal{H}$



Uno spazio di Hilbert richiede che sia definita l'operazione di prodotto scalare. Partendo avendo ristretto la nostra attenzione

ai spazi di energia $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ $x(t) \in L_2$

P3) Prodotto Scalare

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt \quad \longleftrightarrow \quad \langle x, y \rangle$$

(energia mutua)

$$\left(\begin{array}{l} \text{nel D.F.} \\ E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) df \end{array} \right)$$

Questa definizione ovviamente soddisfa le proprietà commutativa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x^*(t) dt \right)^* \quad \longleftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$$

così come la definizione di una norma quadratiche (prodotto scalare con se stesso)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \|x\| = \langle x, x \rangle \geq 0$$

(ENERGIA) (nel D.F. $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$)

dove = 0 se

$$x(t) = 0 \quad \forall t \text{ (q.o.)} \quad \longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{elemento nullo} \\ \text{che deve appartenere} \\ \text{a } \mathcal{Y} \end{array} \right)$$

La definizione di distanze quadratiche o distanze euclidea come norma quadratiche della differenza

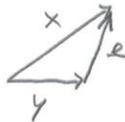
$$d^2(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt \quad \longleftrightarrow \quad d^2(x, y) = \|x - y\|$$

$$e(t) \triangleq x(t) - y(t)$$

$$e \triangleq x - y$$

$$d^2(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt$$

$$d^2(x, y) = \|e\|$$



Esprimendo altrimenti anche

$$d^2(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - y(t))(x(t) - y(t))^* dt$$

$$= E_x + E_y - E_{xy} - E_{yx}$$

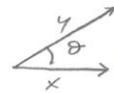
$$d^2(x, y) = \|x\| + \|y\| - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle$$



Si può definire un angolo tra due vettori mediante la relazione

$$\cos \theta = \frac{E_{xy}}{\sqrt{E_x} \sqrt{E_y}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt}} \iff \cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Però il prodotto scalare si può scrivere come



$$E_{xy} = \sqrt{E_x} \sqrt{E_y} \cos \theta$$

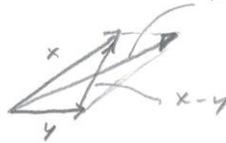
$$\iff \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

Vale la disuguaglianza triangolare (o di Cauchy-Schwarz)

$$|E_{xy}|^2 < E_x E_y \iff |\langle x, y \rangle|^2 < \|x\| \|y\|^2$$

Vale la identità del parallelogramma

$$E_{x+y} + E_{x-y} = 2E_x + 2E_y \iff \|x+y\| + \|x-y\| = 2\|x\| + 2\|y\|$$



PROVA: (derivata dalle definizioni)

$$\|x+y\| + \|x-y\| = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Segnali ortogonali sono tali che

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = 0$$

$$x(t) \perp y(t)$$



$$\langle x, y \rangle = 0$$

$$x \perp y$$



I segnali $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$
sono linearmente indipendenti
quando

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) = 0$$

$$\text{se } c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N = 0$$

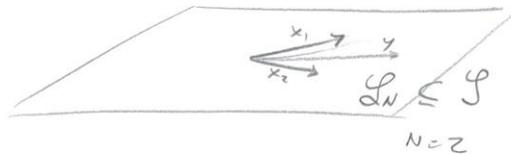
se

$$c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$$

Perciò $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ ^(linearmente indipendenti) definiscono uno
spazio lineare $L_N \subseteq \mathcal{S}$ costituito da tutti i segnali
che sono combinazioni lineari di essi

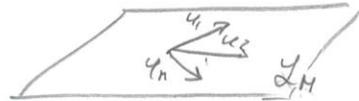
$$y(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_N x_N(t)$$

$$\leftrightarrow y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$$



Un insieme di segnali $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\} \leftrightarrow \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ definisce una BASE LINEARE, ovvero una base per

l'insieme di tutti i segnali che possono essere (esattamente) rappresentati mediante una combinazione lineare di essi. Se i segnali sono linearmente indipendenti la dimensione dello spazio è N . Altrimenti si parla del RANGO $M \leq N$, che è il numero massimo di segnali linearmente indipendenti.

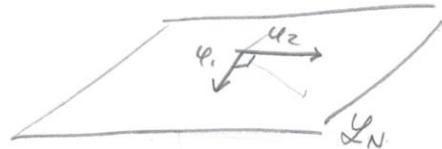


Se i segnali $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ sono ORTOGONALI

$$E_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = E_i \delta_{ij} \quad \leftrightarrow \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

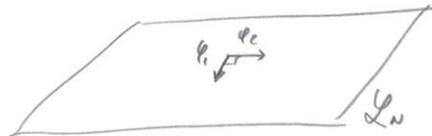
$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \|\varphi_i\| \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N$$

il segnale definisce una BASE ORTOGONALE di dimensione N



La base è ORTONORMALE se i segnali sono ortogonali e hanno anche energia unitaria

$$E_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta_{ij} \quad \leftrightarrow \quad \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$



SPAZI A DIMENSIONE FINITA E RAPPRESENTAZIONE

EUCLIDEA

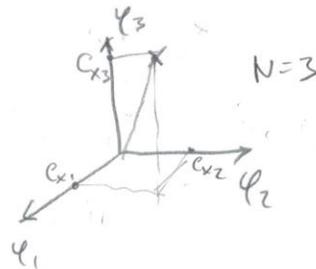
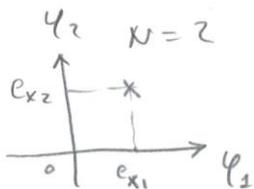
Fra linea teorica uno spazio lineare può avere infinite dimensioni ($N = \infty$). Considera uno spazio dimensionale infinito più ^{utile} quando la rappresentazione di un segnale non è esattamente ottenibile da un numero finito di basi. Torneremo su questo argomento in seguito rafforzandoci per ora su spazi lineari di dimensione finita ($N < \infty$) L_N .

Se un segnale $x(t)$ appartiene a L_N e disponiamo di N segnali $\{ \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t) \}$ linearmente indipendenti appartenenti a L_N , è sempre possibile esprimere

$$x(t) = \sum_{i=1}^N c_{xi} \varphi_i(t).$$

Pertanto considerando fissa le funzioni $\{ \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t) \}$, il segnale può essere descritto dall'insieme dei coefficienti $\{ c_{x1}, c_{x2}, \dots, c_{xN} \}$. In forma vettoriale abbiamo $\underline{c}_x = \begin{bmatrix} c_{x1} \\ c_{x2} \\ \vdots \\ c_{xN} \end{bmatrix}$, se le basi sono ortogonali,

o meglio ortonormali, il vettore \underline{c}_x può essere disegnato come un punto in un sistema di riferimento cartesiano



$$\underline{c}_x = \begin{bmatrix} c_{x1} \\ c_{x2} \\ \vdots \\ c_{xN} \end{bmatrix} \text{ è la RAPPRESENTAZIONE EUCLIDEA DI } x(t)$$

Dalle ortogonalità delle basi deriva immediatamente che

1. L'energia di $x(t)$ è esprimibile anche come

$$E_x = \sum_{i=1}^N |c_{xi}|^2 \quad (\text{risultato anche come conseguenza di Plancherel o di Parseval})$$

Prova immediata dalla definizione.

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^N c_{xi} \varphi_i(t) \sum_{j=1}^N c_{xj}^* \varphi_j^*(t) dt = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{xi} c_{xj}^* \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^N |c_{xi}|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Quindi l'energia è anche la norma quadratica algebrica di \underline{c}_x : $E_x = \|\underline{c}_x\|^2$

2. Il prodotto scalare tra $x(t)$ e $y(t)$ è esprimibile come

$$E_{xy} = \sum_{i=1}^N c_{xi} c_{yi}^*$$

ovvero come prodotto scalare algebrico dei due vettori

$$\underline{c}_x \cdot \underline{c}_y$$

Prova: Immediata dalla definizione.

$$\begin{aligned} E_{xy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^N c_{xi} \varphi_i(t) \sum_{j=1}^N c_{yj}^* \varphi_j^*(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{xi} c_{yj}^* \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^N c_{xi} c_{yi}^* \quad \square \end{aligned}$$

3. La distanza quadratica tra due segnali è esprimibile come distanza quadratica algebrica tra i due vettori

$$d^2(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^N |c_{xi} - c_{yi}|^2 = \|\underline{c}_x - \underline{c}_y\|^2$$

4. Le basi hanno la rappresentazione euclidea

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \dots \quad \underline{\varphi}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Una $x(t)$ appartenente alla base ortogonale $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ è esprimibile come

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\langle x, \varphi_i \rangle}{\|\varphi_i\|} \varphi_i(t)$$

c_{xi}

Prova la dimostrazione è immediata dalle definizioni. Infatti se $x(t)$ appartiene allo spazio lineare di $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ è esprimibile come combinazione lineare

$$x(t) = \sum_{i=1}^N c_{xi} \varphi_i(t)$$

Moltiplicando a destra per $\varphi_j^*(t)$ e integrando otteniamo

$$\int x(t) \varphi_j^*(t) dt = \sum_{i=1}^N c_{xi} \underbrace{\int \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt}_{\varepsilon_i \delta_{ij}}$$

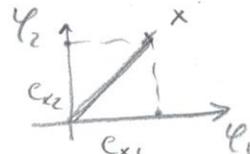
$$\int x(t) \varphi_j^*(t) dt = c_{xj} \varepsilon_j$$

$$c_{xj} = \frac{\int x(t) \varphi_j^*(t) dt}{\varepsilon_j} \quad \forall j = 1, \dots, N$$



Se la base è orthonormale, ovvero $\varepsilon_i = 1, i=1, \dots, N$

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\langle x, \varphi_i \rangle}_{c_{xi}} \varphi_i(t)$$



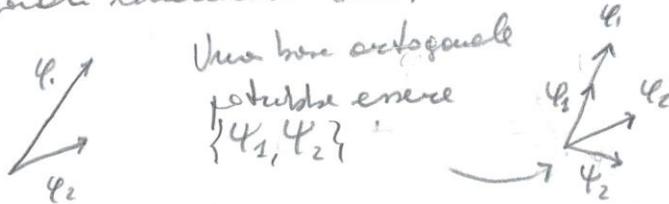
$$c_{xi} = \langle x, \varphi_i \rangle = \int x(t) \varphi_i^*(t) dt$$

Si noti la analogia formale ^{della rappresentazione euclidea PACHIERI-SS10} con la rappresentazione ortogonale nello spazio di Hilbert. Nel seguito le due rappresentazioni, quella nel dominio del tempo, nello spazio ortogonale e nello spazio euclideo saranno utilizzate in maniera interscambiabile laddove si preferisca una forma all'altra per maggiore semplicità di trattazione.

TRASFORMAZIONE DI UNA BASE IN BASE ORTOGONALE

Considera basi ortogonali per la rappresentazione dei segnali non è limitante, in quanto una base di segnali $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ linearmente indipendenti può facilmente essere trasformata in una base ortogonale ovvero opportunamente allo stesso spazio lineare.

La figura seguente mostra due segnali non ortogonali linearmente indipendenti in due dimensioni.



dove ψ_1 è collineare a φ_1 e ψ_2 è ortogonale a φ_1 .

Oppure ^{si potrebbe} prendere ψ_1 collineare a φ_2 e ψ_2 ortogonale



a ψ_1 . Inoltre, qualunque rotazione

del sistema $\{\psi_1, \psi_2\}$ sarebbe una base legittima.

Da questo esempio si vede come la determinazione di una base ortogonale da un insieme di segnali non sia unica. Tutte le basi ortogonali che appartengono allo stesso spazio lineare sono ottenibili come

rotazioni rapide di una con l'altra. Questo vale ovviamente per qualunque N .

LA PROCEDURA DI GRAM-SCHMIDT

Esistono vari metodi per ottenere una base ortonormale da un insieme di funzioni (vettori). La più semplice è la cosiddetta procedura di Gram-Schmidt. Essa consiste in una progressiva indeclinazione e ortogonalizzazione delle funzioni di partenza. Vediamo come.

Supponiamo di disporre di un insieme di funzioni $\{\psi_1(t), \dots, \psi_N(t)\}$ e vogliamo ottenere una base ortonormale $\{\psi_1(t), \dots, \psi_M(t)\}$ con $M \leq N$.

Se le funzioni di partenza non sono linearmente indipendenti, $M = N$ (nesso pieno), altrimenti la base sarà costituita da $M < N$ componenti linearmente indipendenti ($M = \text{rank}$ del sistema). Ma questo sarà scoperto nella applicazione della procedura.

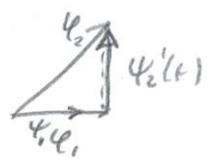
Passo 1

Considerare come prima base non normalizzata $\psi_1(t)$,

$\psi'_1(t) = \psi_1(t)$; Normalizza per ottenere la prima funzione di base a norma unitaria $\psi_1(t) = \frac{\psi'_1(t)}{\|\psi'_1\|}$

Passo 2

Considera come seconda base non normalizzata la differenza



$$\psi'_2(t) = \psi_2(t) - \langle \psi_2, \psi_1 \rangle \psi_1(t)$$

Questa sarà chiaramente ortogonale a $\psi_1(t)$ e appartiene allo spazio $\{\psi_1, \psi_2\}$. $\langle \psi_2, \psi_1' \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle - \langle \psi_2, \psi_1 \rangle \langle \psi_1, \psi_1' \rangle$

perché $\psi_1 = \alpha \psi_1' \Rightarrow \langle \psi_2, \psi_1' \rangle = \langle \psi_2, \psi_1 \rangle \cdot \frac{1}{\alpha}$

Normalizzando si ottiene la seconda funzione $\psi_2(t)$,

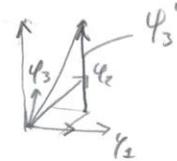
$$\psi_2(t) = \frac{\psi_2'(t)}{\sqrt{\|\psi_2'\|}}$$

PASSO 3

Considero come terza funzione di base non normalizzata

$$\psi_3'(t) = \psi_3(t) - \langle \psi_3, \psi_1 \rangle \psi_1 - \langle \psi_3, \psi_2 \rangle \psi_2$$

Ora $\psi_3'(t)$ sarà ortogonale allo spazio $\{\psi_1, \psi_2\}$ e appartiene allo $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$.



Normalizzando si ottiene la terza funzione $\psi_3(t)$

$$\psi_3(t) = \frac{\psi_3'(t)}{\sqrt{\|\psi_3'\|}}$$

Tornando al PASSO n-esimo

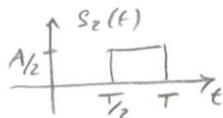
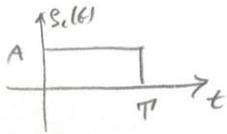
$$\psi_n'(t) = \psi_n(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \psi_n, \psi_i \rangle \psi_i(t)$$

$$\psi_n(t) = \frac{\psi_n'(t)}{\sqrt{\|\psi_n'(t)\|}}$$

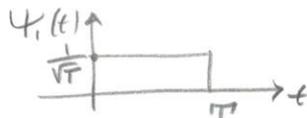
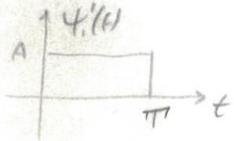
La procedura termina quando tutte le N funzioni sono state calcolate. Se il rango del sistema di funzioni originali è $M < N$, solo M funzioni risulteranno diverse da zero. L'algoritmo scopre automaticamente il rango del sistema.

Si noti che la soluzione non è unica in quanto essa dipende dall'ordine con il quale le N funzioni sono incluse nella procedura. Ovviamente tutte le soluzioni ottenibili rappresentano lo stesso spazio e sono tutte rotazioni rigide di una con l'altra.

ESEMPIO 1

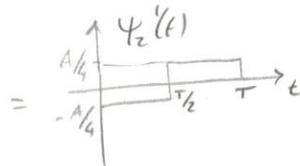
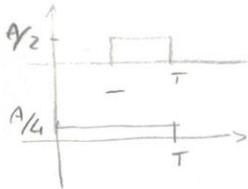


$$\psi_1'(t) = s_1(t) ; \quad \mathcal{E}_1 = \int_0^T |\psi_1'(t)|^2 dt = A^2 T ; \quad \psi_1(t) = \frac{\psi_1'(t)}{\left(\int_0^T |\psi_1'(t)|^2 dt\right)^{1/2}} = \frac{\psi_1'(t)}{A\sqrt{T}}$$



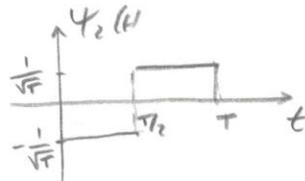
$$\psi_2'(t) = s_2(t) - \langle s_2, \psi_1 \rangle \psi_1(t)$$

$$\langle s_2, \psi_1 \rangle = \int_0^T s_2(t) \psi_1(t) dt = \int_{T/2}^T \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{A}{2\sqrt{T}} \frac{T}{2} = \frac{A}{4}\sqrt{T}$$



$$\int_0^T |\psi_2'(t)|^2 dt = \frac{A^2 T}{16}$$

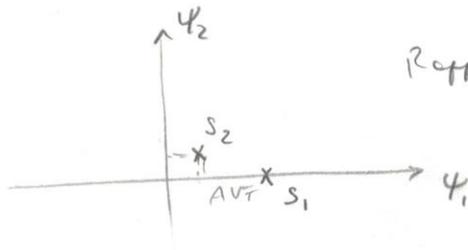
$$\psi_2(t) = \frac{\psi_2'(t)}{\left(\int_0^T |\psi_2'(t)|^2 dt\right)^{1/2}} = \frac{4}{A\sqrt{T}} \psi_2'(t)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \langle s_1, \psi_1 \rangle = \int_0^T A \frac{1}{\sqrt{T}} dt = A\sqrt{T} \\ \langle s_1, \psi_2 \rangle = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle s_2, \psi_1 \rangle = \int_{T/2}^T \frac{A}{2\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{A\sqrt{T}}{4} \\ \langle s_2, \psi_2 \rangle = \int_{T/2}^T \frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{A}{2\sqrt{T}} \frac{T}{2} = \frac{A\sqrt{T}}{4} \end{array} \right.$$

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} A\sqrt{T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} \frac{A\sqrt{T}}{4} \\ \frac{A\sqrt{T}}{4} \end{bmatrix}$$



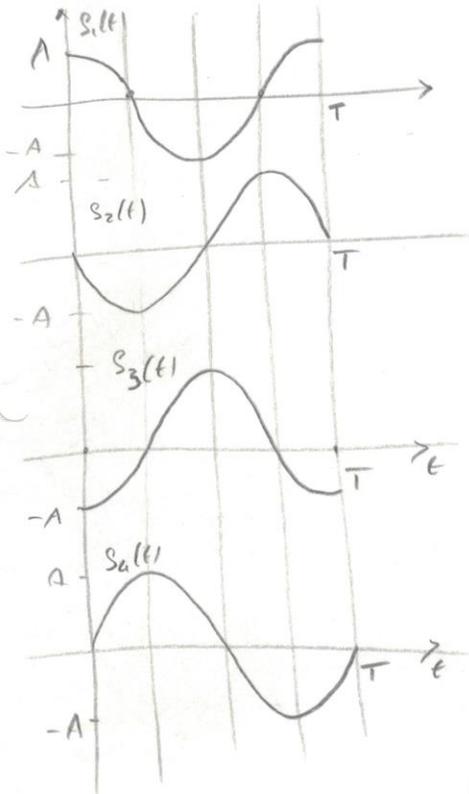
Rappresentazione euclidea nel piano (ψ_1, ψ_2) .

$$s_1(t) = A\sqrt{T} \psi_2(t) ; \quad s_2(t) = \frac{A\sqrt{T}}{4} \psi_1(t) + \frac{A\sqrt{T}}{4} \psi_2(t)$$

ESEMPLO 2

4 segnali $\{s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)\}$

$$s_i(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + (i-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad t \in [0, T)$$



$$\psi_1'(t) = A \cos \frac{2\pi}{T}t$$

$$\|\psi_1'\| = \int_0^T A^2 \cos^2 \frac{2\pi}{T}t dt = \frac{A^2}{2} \int_0^T dt + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos \frac{4\pi}{T}t dt$$

$$= \frac{A^2 T}{2}$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T}t$$

$$\psi_2'(t) = s_2(t) - \langle s_2, \psi_1 \rangle \psi_1(t)$$

$$\langle s_2, \psi_1 \rangle = \int_0^T A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T}t dt$$

$$= \frac{A\sqrt{2}}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) dt + \frac{A\sqrt{2}}{2T} \int_0^T \cos \frac{\pi}{2} dt = 0$$

$$\psi_2'(t) = s_2(t)$$

$$\int_0^T |\psi_2'(t)|^2 dt = \int_0^T A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{A^2}{2} \int_0^T dt +$$

$$+ \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \pi\right) dt = \frac{A^2 T}{2} \quad ; \quad \psi_2(t) = \frac{\sqrt{2} s_2(t)}{A\sqrt{T}} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T}t \quad . \quad \text{Se continua, trova } \psi_3'(t) = 0 \text{ e } \psi_4'(t) = 0.$$

Questo vuol dire che la base (ψ_1, ψ_2) è già completa per tutti e quattro i segnali (il rango del sistema di segnali è pari a 2). La rappresentazione generata si ottiene calcolando tutte le proiezioni dei quattro segnali su ψ_1 e ψ_2 .

PALMIERI-SS15

$$\langle S_1, \psi_1 \rangle = \int_0^T S_1(t) \psi_1(t) dt = \int_0^T A \cos \frac{2\pi}{T} t \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T} t dt = A \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi}{T} t dt$$

$$= A \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \int_0^T dt + \frac{A \sqrt{\frac{2}{T}}}{2} \int_0^T \cos \frac{4\pi}{T} t dt = A \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\langle S_1, \psi_2 \rangle = \int_0^T S_1(t) \psi_2(t) dt = - \int_0^T A \cos \frac{2\pi}{T} t \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} t dt = 0$$

$$\langle S_2, \psi_3 \rangle = \int_0^T A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T} t dt = 0$$

$$\langle S_2, \psi_2 \rangle = - \int_0^T A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} t dt = -A \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) dt$$

$$- A \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left(\frac{4\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) dt = A \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\langle S_3, \psi_1 \rangle = -A \sqrt{\frac{T}{2}}$$

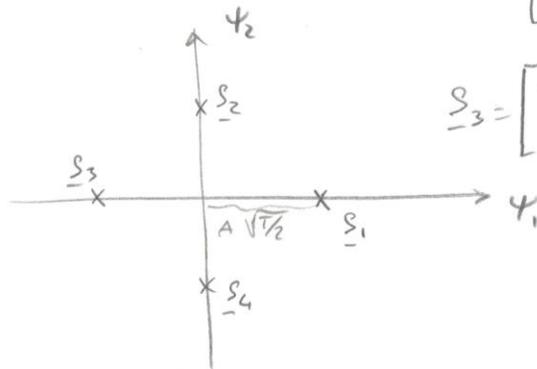
$$\langle S_3, \psi_2 \rangle = 0$$

$$\langle S_4, \psi_1 \rangle = 0$$

$$\langle S_4, \psi_2 \rangle = -A \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \sqrt{\frac{T}{2}} \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} A \sqrt{\frac{T}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = \begin{bmatrix} -A \sqrt{\frac{T}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \sqrt{\frac{T}{2}} \end{bmatrix}$$



APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

Abbiamo già visto come se un segnale $s(t)$ appartiene allo spazio lineare definito da un insieme di segnali $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ (non necessariamente ortogonali), esso può essere espresso come combinazione lineare:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(t)$$

La domanda che emerge è: se ho un segnale qualunque (di energia) e dispongo di un insieme di funzioni $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ per rappresentarlo, qual'è la migliore combinazione lineare

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(t) \quad \hat{s} \in \mathcal{L}_N$$

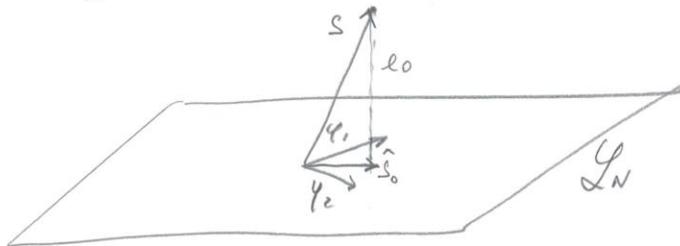
tale che $\hat{s}(t)$ sia più simile possibile a $s(t)$?

Il problema può essere formulato nel dominio del tempo, nello spazio vettoriale e nello spazio spettrale in maniera equivalente.

Il problema è trovare i coefficienti ottimali $\{c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0N}\}$ tali che $d^2(s(t), \hat{s}(t))$ sia minimizzata.

$$(c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0N}) = \underset{(c_1, c_2, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} d^2(s(t), \hat{s}(t)) \iff (c_{01}, \dots, c_{0N}) = \underset{(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} \|s - \hat{s}\|$$

La figura mostra schematicamente lo spazio vettoriale \mathcal{L}_N dei vettori $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ e un generico segnale (vettore) s , che non appartiene a \mathcal{L}_N .



SOLUZIONE NELLO SPAZIO VETTORIALE

PALTIERI_SS17

Dalle figure si vede ^(minimo di tangente) completamente che la migliore approssimazione \hat{s}_0 è quella corrispondente al minore errore quadratico $\|e_0\| = \|s - \hat{s}_0\|$ in cui e_0 è ortogonale allo spazio lineare \mathcal{L}_N (PRINCIPIO DI ORTOGONALITA')

$$e_0 \perp \hat{s}_0 \quad \text{ovvero} \quad \langle e_0, \hat{s}_0 \rangle = 0$$

$$\langle e_0, \sum_{i=1}^N c_{0i} \varphi_i \rangle = 0$$

$$\langle s - \sum_{j=1}^N c_{0j} \varphi_j, \sum_{i=1}^N c_{0i} \varphi_i \rangle = 0$$

Usando la proprietà distributiva del prodotto scalare

$$\sum_{i=1}^N \langle s, c_{0i} \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \langle c_{0j} \varphi_j, c_{0i} \varphi_i \rangle = 0$$

$$\sum_{i=1}^N c_{0i}^* \langle s, \varphi_i \rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_{0j} c_{0i}^* \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle$$

$$\sum_{i=1}^N c_{0i}^* \langle s, \varphi_i \rangle = \sum_{j=1}^N c_{0j}^* \sum_{i=1}^N c_{0j} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle$$

$$\langle s, \varphi_i \rangle = \sum_{j=1}^N c_{0j} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \quad \forall i=1, \dots, N$$

equazione normale

Per $N=3$ abbiamo

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle \\ \langle \varphi_3, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_3, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_3, \varphi_3 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ c_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle s, \varphi_1 \rangle \\ \langle s, \varphi_2 \rangle \\ \langle s, \varphi_3 \rangle \end{bmatrix}$$

L'errore quadratico (norma di e_0) in certissime di ottimalità può essere calcolato osservando che

$$\langle s - \hat{s}_0, \hat{s}_0 \rangle = 0$$

$$\|e_0\| = \|s - \hat{s}_0\| = \langle s - \hat{s}_0, s - \hat{s}_0 \rangle = \|s\| - \langle s, \hat{s}_0 \rangle = \langle \hat{s}_0, s - \hat{s}_0 \rangle$$

$$= \|s\| - \langle s, \hat{s}_0 \rangle = \|s\| - \langle s, \sum_{i=1}^N c_{0i} \varphi_i \rangle = \|s\| - \sum_{i=1}^N c_{0i}^* \langle s, \varphi_i \rangle$$

Nel DOMINIO' DEL TEMPO si poteva ricavare lo
 stesso risultato differenziando rispetto a
 (c_1, c_2, \dots, c_N) e prendo il prodotto a zero. Oppure
 ricavando l'errore quadratico medio in forma
 canonica. Preferisco questo approccio visto che quello
 geometrico è molto più esplicito.

Comincio esplicitando l'espressione usuale ottenendo:

$$\begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(t)|^2 dt & \dots & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \varphi_N^*(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(t) \varphi_1^*(t) dt & \dots & \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_N(t)|^2 dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \vdots \\ c_{0N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_1^*(t) dt \\ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_2^*(t) dt \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_N^*(t) dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_{12} & \dots & E_{1N} \\ E_{21} & E_2 & \dots & E_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{N1} & \dots & \dots & E_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \vdots \\ c_{0N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{s1} \\ E_{s2} \\ \vdots \\ E_{sN} \end{bmatrix}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e_d(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^N c_{0i}^* \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_i^*(t) dt$$

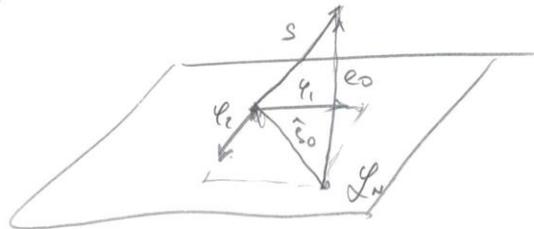
$$E_0 = E_s - \sum_{i=1}^N c_{0i}^* E_{si}$$

La soluzione si semplifica se i segnali della base sono ortogonali.
PARTE 1/3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N \iff \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \|\varphi_i\| \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$c_{oi} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_i^*(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_i(t)|^2 dt} \quad i = 1, \dots, N \iff c_{oi} = \frac{\langle s, \varphi_i \rangle}{\|\varphi_i\|} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} \|e_o\| &= \|s\| - \sum_{i=1}^N |c_{oi}| \|\varphi_i\| \\ &= \|s\| - \sum_{i=1}^N \frac{\langle s, \varphi_i \rangle \langle \varphi_i, s \rangle^*}{\|\varphi_i\|^2} \|\varphi_i\| \\ &= \|s\| - \sum_{i=1}^N \frac{|\langle s, \varphi_i \rangle|^2}{\|\varphi_i\|} \end{aligned}$$



ovviamente per l'ubacchi i casi $s \in L_N$, $\hat{s}_0 = s$, ovvero

$$e_o(t) = 0$$

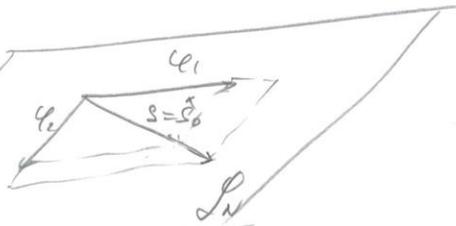
$$e_o = 0$$

$$\|e_o\| = 0$$

$$\|e_o\| = \|s\| - \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |e_o(t)|^2 dt}{\|\varphi_i\|} = 0$$

$$\|s\| = \sum_{i=1}^N \frac{|\langle s, \varphi_i \rangle|^2}{\|\varphi_i\|}$$

verifica della completezza



Rappresentazione perfetta (spazio completo per il segnale)

La relazione si semplifica ulteriormente se
le basi sono normali, ovvero hanno norma
unitaria.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \delta_{ij} \quad i=1, \dots, N \iff \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$$

$i, j = 1, \dots, N$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_i(t)|^2 dt = 1 \right)$$

$$c_{0i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_i^*(t) dt$$

$i = 1, \dots, N$

$$c_{0i} = \langle s, \varphi_i \rangle$$

$i = 1, \dots, N$

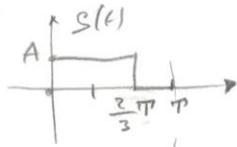
$$E_0 = E_s - \sum_{i=1}^N \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_i^*(t) dt \right|^2$$

$$\|e_0\|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=1}^N |\langle s, \varphi_i \rangle|^2$$

si può usare per verificare
la completezza della
rappresentazione

... aut... ..

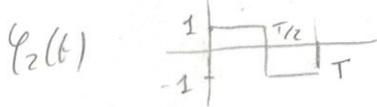
Example 1



regole di energia nesso-limitato
a $(0, T)$.



$$\int_0^T \phi_1(t) \phi_2^*(t) dt = 0 \quad \phi_1 \perp \phi_2$$



ϕ_1 e ϕ_2 costituiscono una base ortogonale non completa per $s(t)$
(si vede ad occhio) Compu

$$\hat{s}_0(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{\langle s, \phi_i \rangle}{\|\phi_i\|^2} \phi_i(t) +$$

$$\langle s, \phi_1 \rangle = \int_0^T s(t) \phi_1(t) dt = \int_0^{2T/3} A dt = \frac{A \cdot 2T}{3}$$

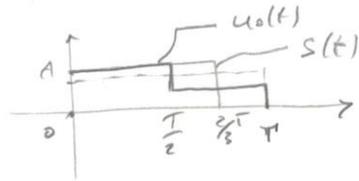
$$\langle s, \phi_2 \rangle = \int_0^T s(t) \phi_2(t) dt = \int_0^{T/2} A dt - \int_{T/2}^{2T/3} A dt = \frac{AT}{2} - \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) A$$

$$= AT \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{AT}{3}$$

$$\|\varphi_1\| = \int_0^T (\varphi_1(t))^2 dt = \pi$$

$$\|\varphi_2\| = \int_0^T (\varphi_2(t))^2 dt = \pi$$

$$\hat{s}_0(t) = \frac{2}{3} A \varphi_1(t) + \frac{1}{3} A \varphi_2(t)$$



$$d(s, u_0) = \int_0^T (s(t) - u_0(t))^2 dt = \|s\|^2 - \langle s, \hat{s}_0 \rangle$$

$$\|s\|^2 = \int_0^T s(t)^2 dt = \int_0^{T/2} A^2 dt + \int_{T/2}^T \left(\frac{2}{3}A\right)^2 dt = \frac{A^2 \pi}{3}$$

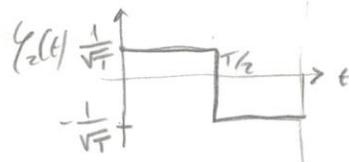
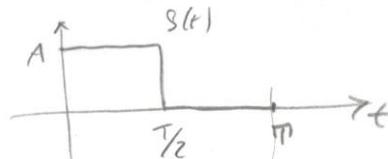
$$\langle s, \hat{s}_0 \rangle = \frac{2}{3} A \int_0^T s(t) \varphi_1(t) dt + \frac{1}{3} A \int_0^T s(t) \varphi_2(t) dt$$

$$= \frac{2}{3} A \frac{A}{3} 2T + \frac{A}{3} \frac{A}{3} T = A^2 \pi \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{A^2 \pi}{3}$$

$$d(s, \hat{s}_0) = A^2 \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) = A^2 \pi \frac{6-5}{9} = \frac{A^2 \pi}{9}$$

Rappresentazione
non completa

Disegno



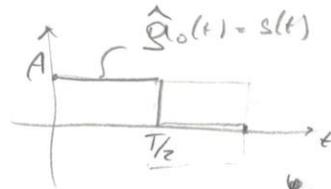
$$\varphi_1 \perp \varphi_2 = 0 \quad \|\varphi_1\| = 1 \quad \|\varphi_2\| = 1.$$

$$\hat{s}_0(t) = \langle s, \varphi_1 \rangle \varphi_1(t) + \langle s, \varphi_2 \rangle \varphi_2(t)$$

$$\langle s, \varphi_1 \rangle = \int_0^T s(t) \varphi_1(t) dt = \int_0^{T/2} A \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{AT}{2\sqrt{T}} = \frac{A\sqrt{T}}{2}$$

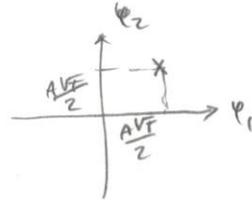
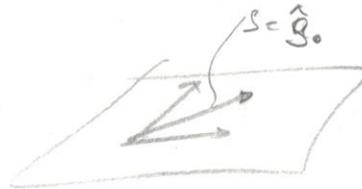
$$\langle s, \varphi_2 \rangle = \int_0^T s(t) \varphi_2(t) dt = \int_0^{T/2} A \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{A\sqrt{T}}{2}$$

$$\hat{s}_0(t) = \frac{A\sqrt{T}}{2} (\varphi_1(t) + \varphi_2(t))$$



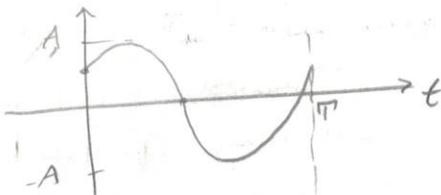
Projezione completa.

$$\langle s, \hat{s}_0 \rangle = 0$$



Esempio

$$s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right) \quad t \in [0, T)$$

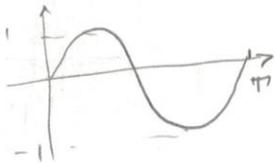


$\varphi_1(t)$



$$\cos \frac{2\pi}{T}t$$

$\varphi_2(t)$



$$\sin \frac{2\pi}{T}t$$

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \int_0^T \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt = \int_0^T \cos \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2\pi}{T} t dt \\
 &= \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{2} \sin 0 \right) dt = \left. \frac{1}{2} \frac{-\cos \frac{2\pi}{T} t}{\frac{2\pi}{T}} \right|_0^T \\
 &= -\frac{T}{4\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{T} T - \cos 0 \right) = 0 \Rightarrow \varphi_1 \perp \varphi_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_1\| &= \int_0^T |\varphi_1(t)|^2 dt = \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi}{T} t dt = \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{T} t \right) dt \\
 &= \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \frac{\sin \frac{4\pi}{T} t}{\frac{4\pi}{T}} \Big|_0^T = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\pi} (\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_2\| &= \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt = \int_0^T (1 - \cos^2 \frac{2\pi}{T} t) dt = \int_0^T dt - \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi}{T} t dt \\
 &= T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle S, \varphi_1 \rangle &= \int_0^T A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{A}{2} \int_0^T \cos \left(\frac{4\pi}{T} t + \frac{\pi}{3} \right) dt \\
 &+ \frac{A}{2} \int_0^T \cos \frac{\pi}{3} dt = \frac{A}{2} \frac{\sin \left(\frac{4\pi}{T} t + \frac{\pi}{3} \right)}{\frac{4\pi}{T}} \Big|_0^T + \frac{AT}{2} \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{AT}{8\pi} \left(\sin \left(\frac{4\pi}{T} T + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \frac{\pi}{3} \right) + \frac{AT}{2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{AT}{2} \cos \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle S, \varphi_2 \rangle &= \int_0^T A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{A}{2} \int_0^T \sin \left(\frac{4\pi}{T} t + \frac{\pi}{3} \right) dt \\
 &+ \frac{A}{2} \int_0^T \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) dt = \frac{A}{2} \frac{-\cos \left(\frac{4\pi}{T} t + \frac{\pi}{3} \right)}{\frac{4\pi}{T}} \Big|_0^T - \frac{AT}{2} \sin \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{AT}{8\pi} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(\frac{4\pi}{\pi} \pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) - \frac{AT}{2} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$u_0(t) = \frac{\langle s, \varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\|} \varphi_1(t) + \frac{\langle s, \varphi_2 \rangle}{\|\varphi_2\|} \varphi_2(t)$$

$$= \frac{AT}{2\pi} \cos \frac{\pi}{3} \varphi_1(t) - \frac{AT}{2} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \varphi_2(t)$$

$$= A \cos \frac{\pi}{3} \varphi_1(t) - A \sin \frac{\pi}{3} \varphi_2(t)$$

$$d(s, \hat{s}_0) = \|s\| - \langle s, \hat{s}_0 \rangle$$

$$\|s\|^2 = \int_0^T A^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\pi} t + \frac{\pi}{3} \right) dt = \frac{A^2}{2} \int_0^T dt + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos \left(\frac{4\pi}{\pi} t + \frac{2\pi}{3} \right) dt$$

$$= \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{2} \left[\frac{\sin \frac{4\pi}{\pi} t + \frac{2\pi}{3}}{\frac{4\pi}{\pi}} \right]_0^T = \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2 T}{8\pi} \left(\sin \left(\frac{4\pi}{\pi} T + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{A^2 T}{2}$$

$$\langle s, \hat{s}_0 \rangle = A \cos \frac{\pi}{3} \int_0^T s(t) \varphi_1(t) dt - A \sin \frac{\pi}{3} \int_0^T s(t) \varphi_2(t) dt$$

$$= A \cos \frac{\pi}{3} \frac{AT}{2} \cos \frac{\pi}{3} + A \sin \frac{\pi}{3} \frac{AT}{2} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{A^2 T}{2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) = \frac{A^2 T}{2}$$

$$d(s, \hat{s}_0) = 0 \quad \text{Rappresentazione completa}$$

Unica una base normalizzata

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\|\varphi_1\|^{1/2}}, \quad \varphi_2(t) = \frac{\varphi_2(t)}{\|\varphi_2\|^{1/2}}$$

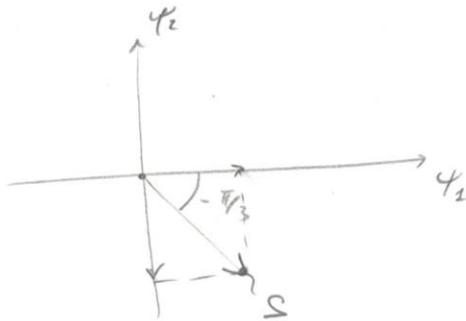
$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{2\pi}{\pi} t \quad ; \quad \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2\pi}{\pi} t$$

Per rappresentare S nel piano (φ_1, φ_2) .

PALMIERI - 8826

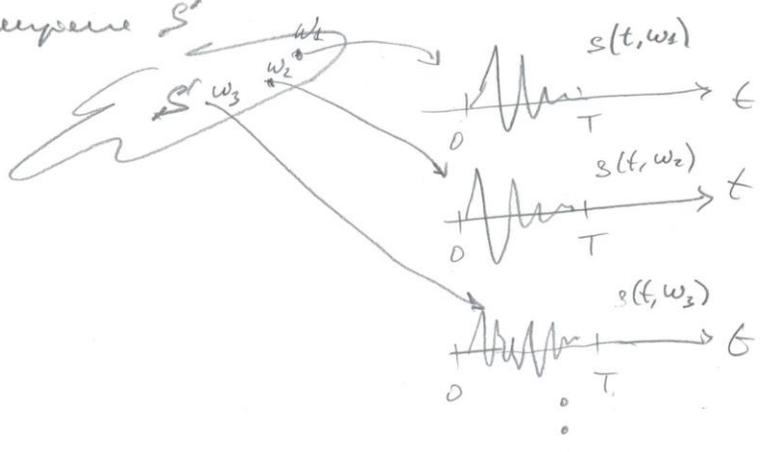
$$\langle S, \varphi_1 \rangle = \frac{\langle S, \varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\|} = A \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\langle S, \varphi_2 \rangle = \frac{\langle S, \varphi_2 \rangle}{\|\varphi_2\|} = -A \sin \frac{\pi}{3} = A \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$



RAPPRESENTAZIONE DI UN PROCESSO ALEATORIO NELLO SPAZIO DEI SEGNALI

Per continuità con la trattazione precedente, restimpres
 lo mostra ottenendo un processo aleatorio di energia,
 confusi all'intervallo $[0, T]$.
 Ricordiamo che un segnale (processo) aleatorio è
 la collezione di (in generale infinite) funzioni membro
 in corrispondenza biunivoca con un ipotetico spazio
 campione Ω



Quindi se le funzioni membro sono in numero infinite
 necessitano di uno spazio di rappresentazione di dimensioni
 infinite per una rappresentazione esatta, come per esempio un
 insieme di basi ortonormali $\{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots\}$.

Quindi la generica funzione membro corrisponde
 alla rappresentazione

$$s(t, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\omega) \psi_j(t)$$

con

$$\begin{bmatrix} c_1(\omega) \\ c_2(\omega) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T s(t, \omega) \psi_1^*(t) dt \\ \int_0^T s(t, \omega) \psi_2^*(t) dt \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Rappresentazione in
 uno spazio euclideo
 di dimensioni infinite

Quindi al segnale elettrico $S(t)$, corrisponde un vettore elettrico \underline{C} di dimensioni infinite. Studiamo ora le proprietà di \underline{C} .

MEDIA

$$E[c_i] = E\left[\int_0^T S(t) \psi_i^*(t) dt\right] = \int_0^T E[S(t)] \psi_i^*(t) dt \quad i=1,2,\dots$$

Se il segnale $S(t)$ ha la stessa media $\forall t$ $E[S(t)] = \mu_s$, $E[c_i] = \mu_s \int_0^T \psi_i^*(t) dt \quad \forall i$. Se $S(t)$ ha media nulla $E[c_i] = 0 \quad \forall i$.

MEDIA QUADRATICA

$$E[c_i^2] = E\left[\int_0^T S(t_1) \psi_i^*(t_1) dt_1 \int_0^T S^*(t_2) \psi_i(t_2) dt_2\right]$$

$$= \int_0^T \int_0^T E[S(t_1) S^*(t_2)] \psi_i^*(t_1) \psi_i(t_2) dt_1 dt_2$$

MUTUA CORRELAZIONE

$$E[c_i c_j^*] = E\left[\int_0^T S(t_1) \psi_i^*(t_1) dt_1 \int_0^T S^*(t_2) \psi_j(t_2) dt_2\right] \quad i \neq j$$

$$= \int_0^T \int_0^T E[S(t_1) S^*(t_2)] \psi_i^*(t_1) \psi_j(t_2) dt_1 dt_2$$

PDF

Se $S(t)$ è gaussiano, le componenti di \underline{C} sono gaussiane in quanto ottenute da una trasformazione lineare di $S(t)$.

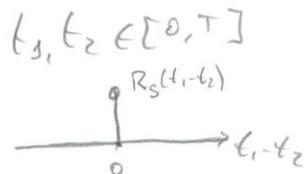
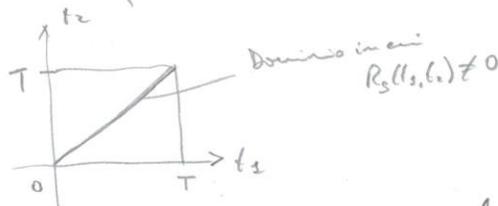
La autocorrelazione, insieme alle figure di base caratterizzano le variabili stocastiche in \underline{C} .
 Le figure di base possono essere disgiunte con
 caratteristiche in frequenza tipicamente pass-banda
 o pass-banda (almeno approssimativamente) e
 il segnale $S(t)$ è tipicamente spettrale alla
 stessa parte dello spettro.

IL CASO DEL SEGNALE BIANCO

Il caso più tipico di processo stocastico, che viene
 utilizzato come modello di rumore in equilibrio, è
 quello in cui si suppone che non ci sia struttura
 frequenziale, ovvero che i componenti di $S(t)$ siano
 correlati. Questo è il famoso segnale "bianco",
 ovvero con tutte le frequenze presenti, ma le
 ipotesi matematiche nella autocorrelazione
 vanno valutate con attenzione.

Supponiamo di avere un segnale stocastico $S(t)$ nell'intervallo
 $[0, T]$ che abbia media nulla $E[S(t)] = 0 \forall t$, e varianza
 $\sigma_s^2 = E[S(t)^2]$. Supponiamo che non ci sia struttura di
 correlazione si potrebbe allora ipotizzare

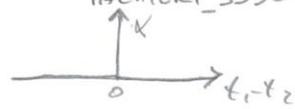
(a)
$$R_s(t_1, t_2) = E[S(t_1)S^*(t_2)] = \begin{cases} 0 & t_1 \neq t_2 \\ \sigma_s^2 & t_1 = t_2 \end{cases} \quad t_1, t_2 \in [0, T]$$



Questo implica $E[t_i t_j^*] = 0 \forall i \neq j$, ma anche $E[t_i^2] = 0$!!!
 (l'integrale i calcolatore non considerate frequenze a varianza nulla)

Le invece somiamo che.

(b) $R_s(t_1, t_2) = \alpha \delta(t_1 - t_2)$



dove $\delta(\cdot)$ è la funzione di Dirac, ovvero convoluzione nulla, una varianza infinita dominata dallo delta, otteniamo (usando la proprietà di commutamento dello delta)

$$E[c_i c_j^*] = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \alpha & i = j \end{cases}$$

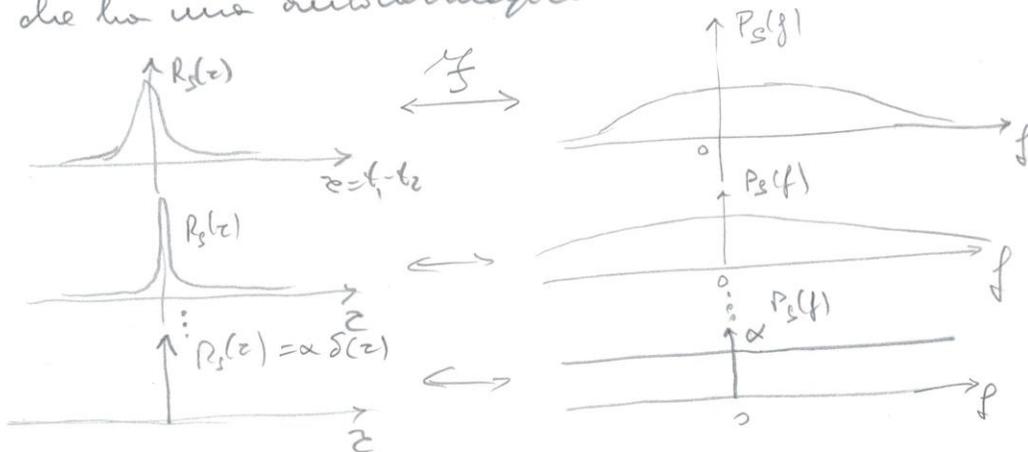
In entrambi le ipotesi (a) e (b) otteniamo componenti correlate, ma solo nella ipotesi (b) una varianza finita. Il dilemma automatico resta perché l'ipotesi (a) non porta ad una rappresentazione stabile; l'ipotesi (b) porta ad una rappresentazione migliore, ma che comunque presenta il problema di

- (1) Avere osservato che il segnale ha varianza infinita
- (2) l'energia media è anch'essa infinita.

$$E \left[\int_0^T |s(t)|^2 dt \right] = \int_0^T E[|s(t)|^2] dt = \infty$$

$$= E \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \right] = \infty$$

La realtà è che il segnale bianco è una idealizzazione di un segnale a banda larga che ha una autocorrelazione molto stretta.



PALTIERI-9531
Più stretta è la autocorrelazione, e più è lunga la banda con il caso limite di nessun picco e autocorrelazione infinita. Quindi nel caso ideale α non è la varianza del segnale, ma il valore dello spettro e la varianza delle portanti c_i .
L'ipotesi $R_s(z) = x^2(z)$ nelle applicazioni, ovvero nella modulazione numerica, può essere utilizzata per accertarsi che la banda del segnale ecceda di gran lunga quella dei segnali in fisica. La finitudine dei valori di varianza per le c_i restano, ma il segnale nel dominio del tempo va gestito con oscillazione perché lo n è rispetto a varianza infinita. Tuttavia in questo contesto quando utilizziamo l'ipotesi di rumore bianco nel canale di comunicazione numerica.

Nota che nelle ipotesi di cui sopra le componenti correlate sono anche indipendenti se $z(k)$ è gaussiano.