

Il rumore nei sistemi di comunicazione

a cura di Davide Mattera

Lo studio degli effetti provocati in ricezione da segnali indesiderati, detti rumore, risulta importante ai fini del progetto di un apparato di ricetrasmissione. Infatti

- è proprio la presenza del rumore che pone notevoli limitazioni alla possibilità di realizzare collegamenti analogici e numerici di qualità desiderata, in presenza di un ammontare limitato di risorse disponibili, come la banda del canale, la potenza trasmessa, il guadagno delle antenne in trasmissione e in ricezione, la distanza tra trasmettitore e ricevitore, la qualità dei dispositivi di sincronizzazione;
- la quantificazione degli effetti dovuti al rumore risulta, pertanto, cruciale al fine di dimensionare opportunamente le risorse necessarie per conseguire i parametri di qualità desiderata sul collegamento;
- siccome gli effetti del rumore non sono indipendenti dalla struttura del ricevitore, l'analisi dei suoi effetti consente di trarre conclusioni generali - cioè validi per ogni ricevitore - riguardanti alcuni aspetti della sua struttura.

1 Definizione di rumore

Segnali elettrici indesiderati si originano da una grande varietà di *sorgenti*, generalmente distinte in *artificiali* e *naturali*. Il rumore artificiale ha origine da interruttori, sistemi di accensione dei motori a scoppio, ecc.. Rumore di origine naturale è quello connesso con fenomeni atmosferici e col meccanismo fisico di funzionamento dei dispositivi elettronici. Esso è logicamente distinto da un segnale *interferente* perchè quest'ultimo, pur essendo di disturbo per il collegamento considerato, risulta essere segnale utile per altri collegamenti in atto attraverso il mezzo fisico. Il rumore, invece, risulta di disturbo per tutti i collegamenti in atto.

2 Rumore termico

Il rumore termico (studiato per la prima volta nel 1928 da Johnson e Nyquist, separatamente) è la tensione di rumore dovuta al moto di agitazione termica delle particelle cariche nei mezzi conduttori. Quando un resistore R è a temperatura assoluta T , si ha una tensione $v(t)$ prodotta

ai morsetti aperti dal moto casuale degli elettroni. Consistentemente col teorema centrale del limite, $v(t)$ ha una distribuzione gaussiana con

$$\overline{v(t)} = 0 \qquad \overline{v^2(t)} = \frac{2(\pi KT)^2}{3h} R \text{ (Volt)}^2$$

ove la sbarra posta sopra a $v(t)$ ed a $v^2(t)$ denota l'operazione di media statistica, $K = 1.37 \times 10^{-23}$ Joule/ gradi Kelvin è la costante di Boltzmann, $h = 6.62 \times 10^{-34}$ Joule/sec è la costante di Planck e T è misurata in gradi Kelvin. Si dimostra, poi, nell'ambito della meccanica quantistica, che la densità spettrale del rumore termico, che risulta stazionario ed ergodico, è

$$S_v(f) = \frac{2Rh|f|}{\exp(\frac{hf}{kT}) - 1} \quad \text{(Volt)}^2/Hz$$

che si può riscrivere come

$$S_v(f) = 2KRT g\left(\frac{hf}{KT}\right) \quad \text{(Volt)}^2/Hz$$

dove

$$g(x) \triangleq \frac{|x|}{e^{|x|} - 1}$$

L'andamento di $g(x)$ è riportato in Fig. 1; si noti che $g(0) = 1$ e che

$$|x| \leq \frac{1}{10} \rightarrow g(x) \in (0.95, 1)$$

Ciò giustifica l'approssimazione

$$|x| \leq \frac{1}{10} \rightarrow g(x) \simeq 1$$

Pertanto, se $\frac{hf}{KT} \leq \frac{1}{10}$, risulta

$$S_v(f) \simeq 2KRT \quad \text{(Volt)}^2/Hz$$

cioè la densità spettrale risulta praticamente costante fino a frequenze minori di $\frac{1}{10} \frac{KT}{h}$ e poi tende a zero, in accordo col vincolo di potenza finita.

Un segnale che in una certa banda presenta una densità spettrale di potenza costante si dice *bianco*, per analogia al caso della luce che l'occhio umano avverte come bianca quando tutte le sue componenti spettrali nella banda ottica si presentano a densità di potenza costante. Un segnale con densità spettrale di potenza costante in tutta la banda delle frequenze si dice bianco ideale o semplicemente bianco.

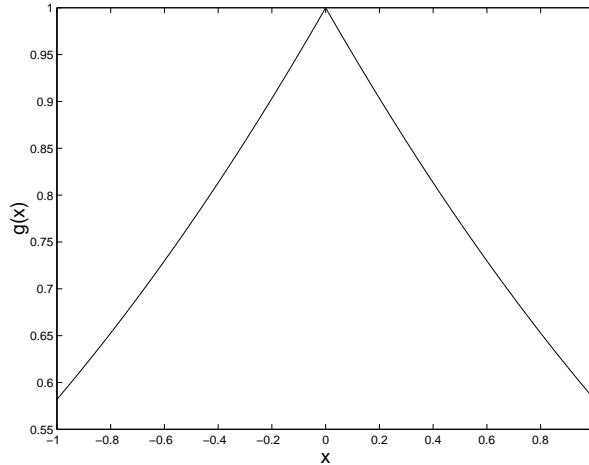


Figura 1: Il grafico di $g(x)$.

Risulta pertanto, che il rumore termico è ben approssimabile mediante un rumore bianco nella banda di frequenze dallo zero fino a $\frac{1}{10} \frac{KT}{h}$; tale frequenza, che per $T = T_0 \triangleq 290$ K vale 600 GHz e che anche a temperature criogeniche ($T = 29$ K) vale 60 GHz, risulta molto al di sopra della frequenza a cui gran parte dei componenti tradizionali hanno smesso di funzionare. Risulta, pertanto, possibile l'adozione per il rumore termico del modello di rumore bianco ideale con densità spettrale di potenza pari a $2KRT$ (Volt²/Hz). Infatti, ai fini del calcolo della potenza di rumore in uscita dai dispositivi, risulta irrilevante il comportamento della densità spettrale di potenza oltre la frequenza $\frac{1}{10} \frac{KT}{h}$ poichè in tale banda i dispositivi interessati filtrano il rumore eventualmente presente in ingresso. L'assunzione di un andamento costante della densità spettrale di potenza risulta preferibile per motivi di semplicità analitica.

Un resistore reale R può essere schematizzato con un circuito equivalente secondo Thévenin (Fig. 2a) o secondo Norton (Fig. 2b) in cui il resistore è sostituito da una resistenza ideale (cioè non rumorosa) di egual valore ed il rumore è rappresentato per il tramite di un generatore di tensione (Thévenin) o di corrente (Norton) di valore quadratico medio appropriato:

$$\begin{aligned}
 S_v(f) &= 2KRT \quad (\text{Volt})^2/\text{Hz} \\
 S_i(f) &= \frac{S_v(f)}{R^2} = \frac{2KT}{R} \quad (\text{Ampere})^2/\text{Hz}
 \end{aligned}$$

Invece di fare riferimento ai valori quadratici medi, è opportuno fare riferimento alla *potenza disponibile*, che è il massimo valore della potenza che può essere fornita ad un carico da una sorgente. Tale potenza è fornita effettivamente al carico in condizioni di adattamento. La *densità*

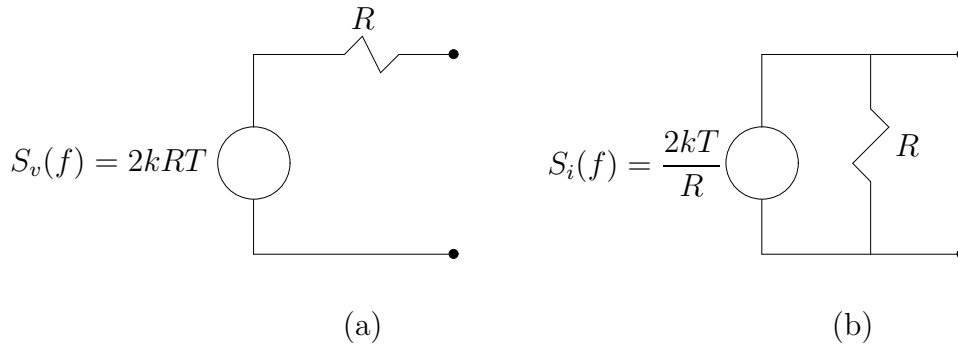


Figura 2: Rumore termico di una resistenza. (a) circuito equivalente di Thévenin; (b) circuito equivalente di Norton.

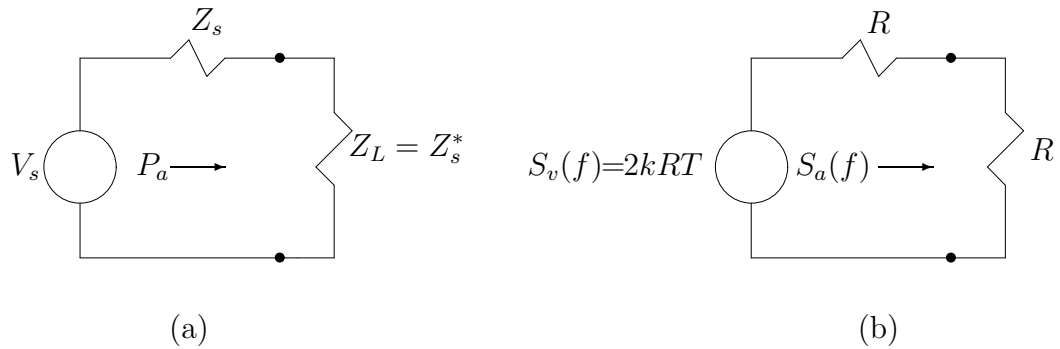


Figura 3: Potenza disponibile. (a) sorgente di segnale con carico adattato; (b) resistenza termica con carico adattato.

spettrale di potenza disponibile sul carico è data (Fig. 3) da

$$S_a(f) = \frac{S_v(f)}{4} = \frac{KRT}{2} \quad (\text{Volt})^2/\text{Hz}$$

o, equivalentemente, poichè tale potenza è fornita al carico adattato (resistenza pari ad R),

$$S_a(f) = \frac{S_v(f)}{4R} = \frac{KT}{2} \quad \text{Watt}/\text{Hz}$$

che dipende solo dalla temperatura, e non dal valore di R .

3 Rumore bianco e temperatura di rumore

Oltre al rumore termico, esistono molte altre sorgenti di rumore bianco, ossia con densità spettrale praticamente costante su tutta la parte di interesse dell'asse delle frequenze. Un esempio importante è costituito dallo shot-noise che si presenta quando un flusso di particelle cariche attraversa

una barriera di potenziale (per esempio le giunzioni p-n nei diodi e nei transistori). Sebbene il valore medio del flusso di corrente risulta pari a \bar{I} , esiste un'oscillazione, istante per istante, della corrente che effettivamente fluisce. Tale oscillazione, che rappresenta una differenza indesiderata tra il valore vero ed il valore considerato \bar{I} , si può modellare come un processo aleatorio bianco con densità spettrale di potenza pari a $q\bar{I}$ dove q è la carica dell'elettrone.

Per un generico rumore bianco è possibile indicare la densità spettrale di potenza con

$$S(f) = \frac{\eta}{2}$$

ove il valore di η è diverso a seconda del tipo di rumore. Ad esempio, per quello termico

$$\eta_v = 4KR T, \quad \eta_i = \frac{4KT}{R}, \quad \eta_a = KT$$

Indipendentemente dal tipo di rumore, si può parlare di *temperatura equivalente di rumore* T_N di ogni sorgente di rumore bianco, definita come

$$T_N \triangleq \frac{\eta_a}{K}$$

dove $\frac{\eta_a}{K}$ è il valore che assume la densità spettrale di potenza disponibile del rumore bianco. Si noti che T_N non è necessariamente una temperatura fisica: alcuni generatori di rumore hanno $T_N = 3000$ K, il che ovviamente non vuol dire che il generatore è a temperatura così elevata!. Se si tratta di rumore termico $T_N \equiv T$ ($\eta_a = KT$), cioè essa è proprio la temperatura della sorgente, altrimenti T_N è la temperatura a cui dovrebbe trovarsi una resistenza per generare la stessa potenza della sorgente di rumore considerata.

4 Rumore bianco filtrato

Detto $x(t)$ un rumore bianco con temperatura equivalente di rumore T (cioè con $S_x(f) = \frac{\eta}{2}$ ed $\eta = KT$) ed $y(t)$ l'uscita di un sistema reale, lineare ed invariante con funzione di trasferimento $H(f)$, si ha:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

$$\overline{y^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df = \frac{\eta}{2} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Il rumore all'uscita non è più bianco: la sua densità spettrale dipende da $|H(f)|^2$. Il rumore è detto *colorato*. Esso, tuttavia, se è gaussiano in ingresso, lo è anche in uscita.

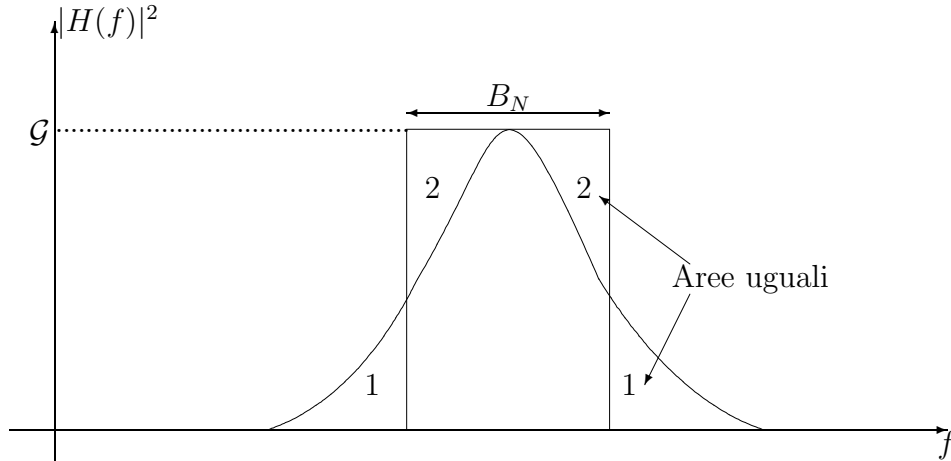


Figura 4: Banda equivalente di rumore B_N di un filtro. La somma delle due aree denotate con 1 è pari alla somma delle due aree denotate con 2.

Poichè la $\overline{y^2(t)}$ dipende solo dalla forma della funzione di trasferimento, è possibile introdurre una *banda equivalente di rumore* B_N definita da

$$B_N \triangleq \frac{1}{\mathcal{G}} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

ove $\mathcal{G} \triangleq |H(f)|_{\max}^2$ è il guadagno disponibile di potenza. Segue che

$$\overline{y^2(t)} = \mathcal{G}\eta B_N = \mathcal{G}KTB_N \quad (1)$$

cioè l'effetto del filtro è stato separato in due parti: la *selettività in frequenza*, descritta da B_N , ed il *guadagno di potenza* (o attenuazione) rappresentato da \mathcal{G} . Allora, come indicato in Fig. 4 per un sistema passabanda, B_N è la larghezza di banda monolaterale di un filtro ideale rettangolare che fa passare la stessa potenza di rumore del filtro in esame, a parità di guadagno \mathcal{G} , quando è sollecitato da un rumore bianco.

Nota Per i filtri di interesse risulta che B_N è più grande della banda a 3 dB. Dall'esempio qui di seguito riportato si vede che, per esempio, per un filtro RC passa basso $B_N = \frac{\pi B}{2}$, ove B è la banda a 3 dB.

Es. 1 Si consideri il circuito RC di Fig. 5a il cui resistore sia a temperatura assoluta T . Lo schema equivalente (ai fini del rumore) secondo Thévenin è quello di Fig. 5b, in cui una sorgente di rumore bianco con $S_x(f) = 2KRT$ è applicata ad un filtro RC passa basso privo di rumore. Per l'uscita $y(t)$ risulta:

$$S_y(f) = \frac{2KRT}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2} \quad B = \frac{1}{2\pi RC}$$

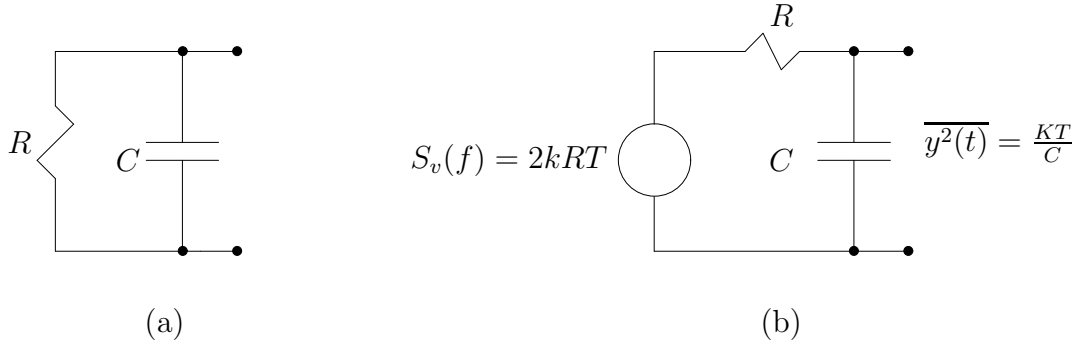


Figura 5: Un circuito RC con resistenza rumorosa. (a) circuito con resistenza rumorosa; (b) circuito equivalente con resistenza ideale e generatore di rumore.

$$\overline{y^2(t)} = \frac{KT}{C}$$

Si noti che se, ad esempio, $T = T_0 \triangleq 290\text{K}$ e $C = 0.1\mu\text{ F}$, risulta

$$\overline{y^2(t)} = 4 \times 10^{-14} \text{ (Volt)}^2$$

Tale valore è molto basso, ma non può essere trascurato perchè, in sistemi di comunicazione a lunga distanza, esso è almeno dello stesso ordine di grandezza del segnale utile.

Con le definizioni introdotte, risulta poi

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= |H(0)|^2 = 1 \\ B_N &= \int_0^{+\infty} \frac{df}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2} = \frac{\pi B}{2} = \frac{1}{4RC} \end{aligned} \quad (2)$$

È evidente, perciò, che $\overline{y^2(t)}$ deve essere indipendente da R ; infatti,

$$\overline{y^2(t)} = \eta B_N = 4KRT \frac{1}{4RC} = \frac{KT}{C}$$

Aumentando R , aumenta la densità spettrale, ma diminuisce la banda equivalente B_N . I due effetti si compensano perfettamente.

Es. 2 La Fig. 6 mostra un metodo per misurare la risposta impulsiva $h(t)$ di un sistema lineare ed invariante nel tempo. Risulta:

$$z(t) = x(t - t_d) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

Poichè $x(t)$ è ergodico nella media, la media temporale $\langle z(t) \rangle$ di $z(t)$ vale:

$$\begin{aligned} \langle z(t) \rangle &= \overline{z(t)} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \overline{x(t - t_d) x(t - \lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

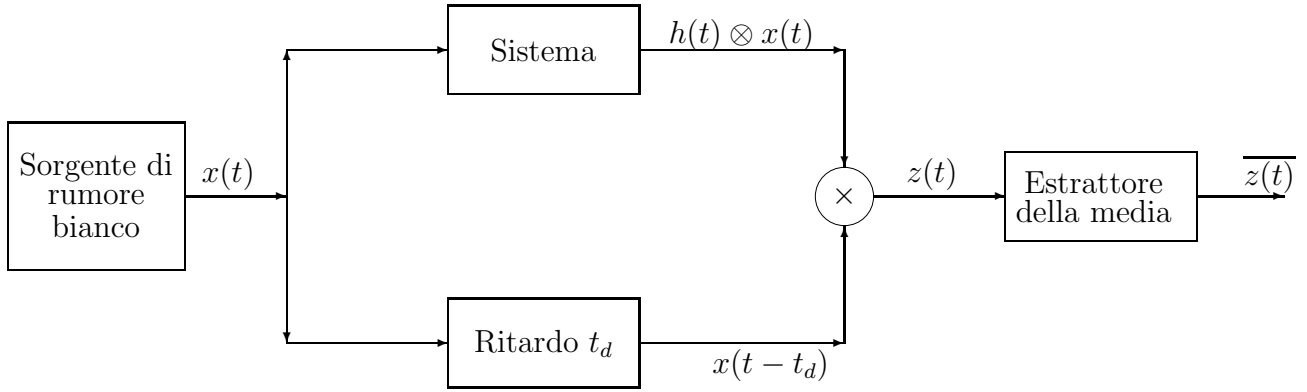


Figura 6: Misura della risposta impulsiva mediante sorgente di rumore bianco.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) R_x(\lambda - t_d) d\lambda \\
 &= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \delta(\lambda - t_d) d\lambda \\
 &= \frac{\eta}{2} h(t_d)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Pertanto, la risposta impulsiva $h(t)$ è misurata nei diversi istanti facendo variare t_d . Il metodo è utile per quei sistemi nei quali non si può immettere direttamente, senza danno, un segnale impulsivo.

5 Rapporto segnale/rumore e probabilità di errore

La presenza di rumore degrada le prestazioni dei sistemi di comunicazione analogici e numerici. Per valutare tale degradazione un parametro di qualità molto importante è costituito dal rapporto segnale/rumore nei sistemi analogici e dalla probabilità di errore nei sistemi numerici.

5.1 Rapporto segnale/rumore

Sia dato un sistema analogico di comunicazione. Si supponga che l'informazione sia trasportata dal segnale aleatorio $x(t)$ e che il canale non introduca altre distorsioni, oltre il rumore. L'uscita del sistema è

$$y(t) = Kx(t - t_d) + n(t)$$

dove $Kx(t - t_d)$ è una versione attenuata e ritardata di $x(t)$ ed $n(t)$ è il rumore che accompagna il segnale utile in uscita.

Il rapporto segnale/rumore (SNR) in uscita vale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{S_0}{N_0} = \frac{K^2 \overline{x^2(t - t_d)}}{\overline{n^2(t)}}$$

Esso è spesso indicato in decibels

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{0,dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N}\right)_0$$

5.2 Probabilità di errore

Dato un sistema di comunicazione numerica (collegamento punto-punto) al cui ingresso vi sia la sequenza di simboli $\{s_k\}$, l'uscita sarà una sequenza $\{\hat{s}_k\}$ che, nel caso ideale, coinciderà con $\{s_k\}$. Nei sistemi reali, tuttavia, le sequenze differiranno a causa di errori causati dal canale. Un parametro di qualità molto importante del collegamento è la probabilità di errore per simbolo trasmesso P_e , definita da

$$P_e = \text{Prob}(\hat{s}_k \neq s_k)$$

6 Temperatura equivalente di rumore e cifra di rumore

Il ricevitore di un sistema di comunicazione analogico può essere schematizzato come una cascata di doppi bipoli. Risulta perciò importante caratterizzare un doppio bipolo nei confronti del rumore.

Si potrebbe procedere introducendo lo schema equivalente di ciascun componente del doppio bipolo in modo da avere una descrizione completa del rumore presente. Tale approccio risulta però eccessivamente complicato in quanto richiederebbe lo studio di circuiti equivalenti notevolmente complessi e potrebbe essere condotta solo se fosse noto lo schema circuitale del doppio bipolo considerato.

Risulta utile procedere alla definizione di un parametro sintetico che quantifichi la rumorosità del doppio bipolo e che sia utile alla determinazione del deterioramento del rapporto segnale/rumore dovuto alla presenza del doppio bipolo rumoroso. Si osservi che un doppio bipolo non rumoroso, operante su un segnale utile compreso nella banda passante del doppio bipolo ed affetto da rumore bianco, presenta lo stesso rapporto segnale/rumore sia in ingresso che in uscita in quanto amplifica (o attenua) allo stesso modo sia il segnale che il rumore. Un doppio bipolo rumoroso, invece, aggiunge rumore in eccesso, prodotto dallo stesso funzionamento del doppio bipolo, e riduce quindi il rapporto segnale/rumore in uscita rispetto al rapporto segnale/rumore in ingresso.

Il parametro sintetico adatto allo scopo della caratterizzazione sintetica del doppio bipolo è la *temperatura equivalente di rumore*; un parametro equivalente è la *cifra di rumore* del doppio bipolo. Questi parametri, introdotti dapprima per il singolo doppio bipolo, vengono poi utilizzati

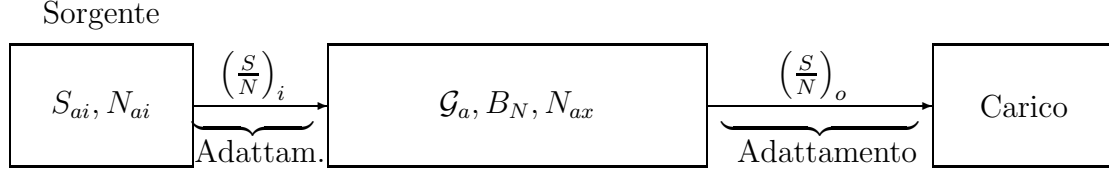


Figura 7: Un doppio bipolo rumoroso con sorgente e carico adattati.

per caratterizzare sinteticamente l'intero ricevitore, schematizzato come una cascata di doppi bipoli.

6.1 Temperatura equivalente di rumore di un doppio bipolo

Si consideri un doppio bipolo alimentato in ingresso da una sorgente di rumore bianco e che fornisca potenza al carico collegato ai morsetti di uscita; supponiamo di essere in condizioni di completo adattamento, cioè che l'impedenza d'ingresso del doppio bipolo sia un carico adattato per la sorgente di segnale e di rumore termico e che il carico sia adattato al doppio bipolo (si veda la Fig. 7).

In condizioni di adattamento per l'ingresso e per l'uscita, la sorgente fornisce la potenza S_{ai} di segnale disponibile a cui corrisponde una potenza di segnale in uscita pari a $S_{a0} = \mathcal{G}_a S_{ai}$. Analogamente la potenza di rumore in uscita da un doppio bipolo (avente banda equivalente di rumore B_N) dovuta alla sorgente di rumore bianco a temperatura T_i vale $\mathcal{G}_a K T_i B_N$ (si veda la (1)). Detta N_{ax} la potenza di rumore in eccesso introdotta dal doppio bipolo a causa del suo stesso funzionamento, assumendo l'incorrelazione della due sorgenti di rumore, si ha che la potenza di rumore complessivamente presente in uscita vale

$$N_{a0} = \mathcal{G}_a N_{ai} + N_{ax}$$

con

$$N_{ai} = K T_i B_N$$

da cui risulta

$$N_{a0} = \mathcal{G}_a K T_i B_N + N_{ax} = \mathcal{G}_a K B_N (T_i + T_e) \quad (4)$$

ove

$$T_e \triangleq \frac{N_{ax}}{\mathcal{G}_a K B_N}$$

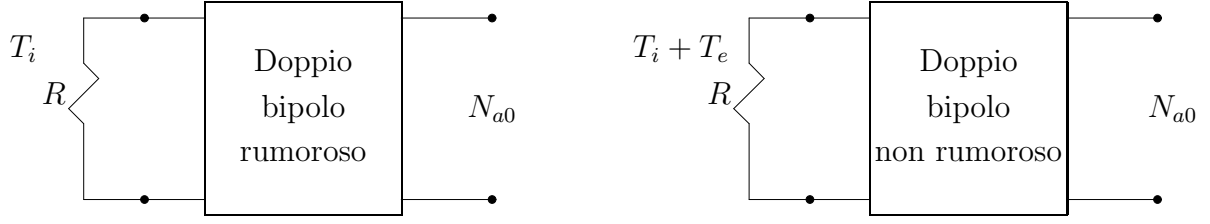


Figura 8: Equivalenza delle due situazioni dal punto di vista della potenza di rumore in uscita.

è la *temperatura equivalente di rumore* del doppio bipolo. Tenendo presente la (1), si può comprendere che essa rappresenta l'incremento fittizio di temperatura da fornire alla sorgente per portare in conto anche la rumorosità del doppio bipolo (si veda la Fig. 8).

Si noti che l'*ipotesi di completo adattamento* non è limitativa perchè quello che interessa è, in definitiva, il rapporto segnale/rumore e, quindi, l'eventuale fattore di disadattamento si cancella.

6.2 La cifra di rumore

Un parametro equivalente utile a portare in conto la rumorosità del doppio bipolo è la *cifra di rumore*. Essa può essere vista come il rapporto tra la potenza del rumore in uscita dal doppio bipolo rumoroso ($N_{a0} = \mathcal{G}_a K(T_i + T_e)B_N$) e quella in uscita da un doppio bipolo ideale ($N_{a0}^* = \mathcal{G}_a K T_i B_N$) nell'ipotesi di sorgente a temperatura T_i pari a $T_0 \triangleq 290$ K. Essa è definita, pertanto, nel modo seguente:

$$F \triangleq \frac{N_{a0}}{N_{a0}^*|_{T_i=T_0}} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad (5)$$

Dalla (5) segue che

$$T_e = T_0 (F - 1)$$

Si noti che nel caso ideale ($T_e = 0$) la cifra di rumore F vale uno; in pratica essa è maggiore di uno. Essa risulta particolarmente utile poichè il rapporto segnale/rumore in ingresso al doppio bipolo vale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{S_{ai}}{N_{ai}} = \frac{S_{ai}}{K T_i B_N}$$

avendo definito come potenza di rumore in ingresso al doppio bipolo la potenza del rumore bianco presente nella banda equivalente del doppio bipolo. Il rapporto segnale/rumore in uscita vale

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_o &= \frac{S_{ao}}{N_{ao}} \\ &= \frac{\mathcal{G}_a S_{ai}}{\mathcal{G}_a K B_N (T_i + T_e)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S_{ai}}{KB_N(T_i + T_e)} \\
&= \frac{S_{ai}}{KB_N T_i} \frac{T_i}{T_i + T_e} \\
&= \left(\frac{S}{N}\right)_i \frac{1}{1 + \frac{T_e}{T_i}} \tag{6}
\end{aligned}$$

Quando la temperatura equivalente T_i del rumore all'ingresso vale proprio T_0 , allora, dalla (5) risulta che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{1}{F} \left(\frac{S}{N}\right)_i$$

o, equivalentemente in dB, (sempre nel caso $T_i = T_0$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o,dB} = \left(\frac{S}{N}\right)_{i,dB} - F_{dB}$$

La cifra di rumore rappresenta, quindi, il fattore per cui occorre scalare il rapporto segnale/rumore in ingresso per portare in conto il rumore ulteriore introdotto dallo stesso doppio bipolo, nell'ipotesi di rumore in ingresso a temperatura ambiente T_0 . Data la maggiore semplicità dell'operazione da svolgersi sui valori in dB (in cui la moltiplicazione è sostituita dall'addizione), i rapporti segnale/rumore e la cifra di rumore sono comunemente espressi in dB.

Si noti di nuovo che *l'ipotesi di completo adattamento* non è limitativa perchè un eventuale fattore di disadattamento interessa sia il segnale che il rumore e non influenza le relazione (6). Si noti infine che uno stesso doppio bipolo può avere comportamenti diversi a seconda della frequenza di centro banda considerata per cui la temperatura equivalente di rumore e la cifra di rumore possono avere espressioni diverse per le diverse bande di frequenza in cui è possibile utilizzare il doppio bipolo.

Es. 3 Tra i doppi bipoli che si incontrano in un sistema di ricetrasmisione rientrano i cavi di collegamento fisico tra due punti. Essi vengono usati sia come collegamento fisico tra due siti remoti, sia per la connessione di due doppi bipoli (per es., la connessione di due amplificatori in cascata oppure quella tra i morsetti di antenna ed un amplificatore) che fanno parte della catena del ricevitore. I cavi di collegamento considerati includono linee di trasmissione, fibre ottiche e guide d'onda e sono costituiti da soli elementi passivi.

Si vuole qui determinare la temperatura equivalente di rumore T_e del cavo in equilibrio termico alla temperatura T_c . Si consideri il doppio bipolo connesso ad una sorgente in ingresso e ad un carico in uscita come mostrato in Fig. 7. Dalla definizione della temperatura di rumore T_i della sorgente in ingresso e della temperatura equivalente di rumore T_e del cavo considerato segue che la potenza di rumore N_{a0} in uscita dal cavo si può scrivere come

$$N_{a0} = \mathcal{G}_a KB_N(T_i + T_e) \tag{7}$$

dove \mathcal{G}_a è il guadagno del cavo e B_N è la sua banda equivalente di rumore.

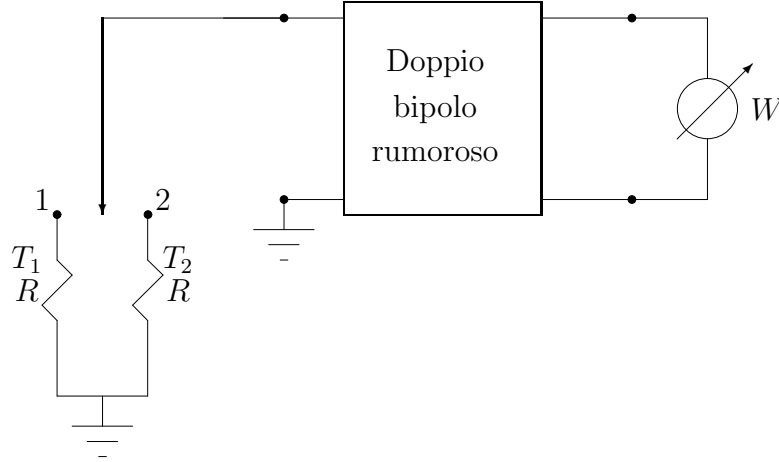


Figura 9: Metodo della temperatura calda e fredda.

La sorgente di rumore in ingresso può essere equivalentemente sostituita da una resistenza alla temperatura T_i . Se ora si immagina che la temperatura T_i della sorgente di rumore in ingresso coincida con T_c , allora, guardando indietro dai morsetti di uscita, si vede solo materiale conduttore alla temperatura T_c e, dunque, si percepisce la presenza di una sorgente di rumore bianco alla temperatura T_c ; il rumore generato da tutti questi elementi resistivi non si presenta però direttamente in uscita ma viene filtrato dal cavo avente banda equivalente di rumore pari a B_N . Risulta, pertanto, ragionevole l'approssimazione secondo cui il rumore in uscita dal doppio bipolo presenta densità spettrale di potenza pari a $\frac{KT_c}{2}$ nella banda equivalente di rumore B_N del cavo; in questo caso, pertanto, la potenza di rumore N_{a0} in uscita dal cavo si può quindi scrivere come

$$N_{a0|T_i=T_c} = KB_N T_c \quad (8)$$

Dalle relazioni (7) e (8) segue che

$$\mathcal{G}_a KB_N (T_c + T_e) = KB_N T_c$$

da cui segue che

$$T_e = (\mathcal{L}_a - 1)T_c \quad (9)$$

ove $\mathcal{L}_a \triangleq \frac{1}{\mathcal{G}_a}$ è l'attenuazione del cavo. Dalla (9) e dalla (5) segue che la cifra di rumore del cavo vale

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_c}{T_0} (\mathcal{L}_a - 1)$$

da cui segue che, per un cavo alla temperatura fisica T_0 ($T_c = T_0$), la cifra di rumore F coincide con l'attenuazione del cavo \mathcal{L}_a :

$$F = \mathcal{L}_a \quad (10)$$

Es. 4 Spesso la temperatura equivalente di rumore del doppio bipolo non può essere determinata in base a considerazioni di tipo analitico e va misurata sperimentalmente sulla base del comportamento ingresso/uscita del doppio bipolo. Un metodo semplice per la misura di T_e è schematizzato in Fig. 9.

In posizione 1 si ha che la potenza misurata dal wattmetro W è

$$N_1 = CK\mathcal{G}_B B_N (T_1 + T_e) \quad (11)$$

ove C è la costante di calibrazione del wattmetro. In posizione 2 la potenza misurata dal wattmetro vale

$$N_2 = CK\mathcal{G}B_N(T_2 + T_e) \quad (12)$$

Dalle (11) e (12) segue che

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_1 + T_e}{T_2 + T_e} \quad (13)$$

La relazione (13) consente di determinare la temperatura equivalente di rumore T_e del doppio bipolo considerato sulla base delle misure delle potenze N_1 ed N_2 e della conoscenza delle due temperature T_1 e T_2 delle due resistenze usate come sorgente di rumore in ingresso. Per evitare errori grossolani nella stima di T_e occorre che T_1 e T_2 siano abbastanza diverse e note con buona precisione; si usa fissare tali temperature ponendo la resistenza in acqua bollente ($T_1 = 373\text{K}$) ed in azoto liquido ($T_2 = 77\text{K}$).

7 Cifra di rumore di un ricevitore

Il ricevitore complessivo può essere ragionevolmente modellato come una cascata di doppi bipoli. Pertanto, risulta utile determinare la temperatura equivalente di rumore della cascata (cioè del ricevitore complessivo) sulla base delle temperature equivalenti $T_{e,i}$ ($i = 1, \dots, N$) dei singoli doppi bipoli che costituiscono la cascata.

Si inserisca una sorgente di rumore bianco alla temperatura T_{in} in ingresso ad una cascata di N doppi bipoli e si consideri la potenza in uscita in condizioni di completo adattamento. Dalla (4) segue che la potenza di rumore di uscita è pari a

$$N_{a0} = \mathcal{G}_a K B_N (T_{in} + T_e) \quad (14)$$

dove T_e è la temperatura equivalente di rumore della cascata, B_N è la banda equivalente di rumore della cascata e \mathcal{G}_a è il guadagno disponibile della cascata che si può scrivere facilmente in termini dei guadagni disponibili $\mathcal{G}_{a,i}$ ($i = 1, \dots, N$) dei singoli doppi bipoli

$$\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N} \quad (15)$$

D'altronde la potenza disponibile di rumore in uscita risulta la somma di $N + 1$ contributi indipendenti. Il primo contributo è dato dal rumore bianco alla temperatura equivalente T_{in} in ingresso alla cascata di N doppi bipoli che fornisce un contributo alla potenza disponibile in uscita che, per la (1), vale

$$N_{a0} = \mathcal{G}_a K B_N T_{in}$$

Il secondo contributo è dato dal rumore in eccesso generato dal primo doppio bipolo che può essere considerato equivalente, ai fini del calcolo della potenza di rumore disponibile in uscita, ad un

rumore bianco alla temperatura $T_{e,1}$ in ingresso alla cascata dove $T_{e,1}$ è la temperatura equivalente di rumore del primo doppio bipolo della cascata; per la (1) il contributo risultante alla potenza disponibile di rumore in uscita risulta pertanto pari a $\mathcal{G}_a K B_N T_{e,1}$.

Il terzo contributo al rumore in uscita è dato dal rumore in eccesso generato dal secondo doppio bipolo che, ai fini del calcolo della potenza disponibile in uscita, risulta equivalente ad un rumore bianco a temperatura equivalente $T_{e,2}$ posto in ingresso al secondo doppio bipolo della cascata. Pertanto, per la (1) il contributo risultante alla potenza di rumore in uscita risulta pari a $\mathcal{G}_{c,2} K B_{c,2} T_{e,2}$ dove $\mathcal{G}_{c,2}$ e $B_{c,2}$ rappresentano rispettivamente il guadagno disponibile e la banda equivalente di rumore del sistema S_2 costituito dalla cascata dal secondo all' N -esimo doppio bipolo. Si noti che $\mathcal{G}_{c,2} = \mathcal{G}_{a,2} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N}$.

Il quarto contributo al rumore in uscita è dato dal rumore in eccesso generato dal terzo doppio bipolo che, ai fini del calcolo della potenza disponibile in uscita, risulta equivalente ad un rumore bianco a temperatura equivalente $T_{e,3}$ posto in ingresso al terzo doppio bipolo della cascata. Pertanto, per la (1), il contributo risultante alla potenza di rumore disponibile in uscita risulta pari a $\mathcal{G}_{c,3} K B_{c,3} T_{e,3}$ dove $\mathcal{G}_{c,3}$ e $B_{c,3}$ rappresentano rispettivamente il guadagno disponibile e la banda equivalente di rumore del sistema S_3 costituito dalla cascata dal terzo all' N -esimo doppio bipolo. Si noti che $\mathcal{G}_{c,3} = \mathcal{G}_{a,3} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N}$.

L' N -esimo contributo al rumore in uscita è dato dal rumore in eccesso generato dall' $(N-1)$ -esimo doppio bipolo che, ai fini del calcolo della potenza disponibile in uscita, risulta equivalente ad un rumore bianco a temperatura equivalente $T_{e,N-1}$ posto in ingresso all' $(N-1)$ -esimo doppio bipolo della cascata. Pertanto, per la (1), il contributo risultante alla potenza di rumore disponibile in uscita risulta pari a $\mathcal{G}_{c,N-1} K B_{c,N-1} T_{e,N-1}$ dove $\mathcal{G}_{c,N-1}$ e $B_{c,N-1}$ rappresentano rispettivamente il guadagno disponibile e la banda equivalente di rumore del sistema S_{N-1} costituito dalla cascata dell' $(N-1)$ -esimo e dell' N -esimo doppio bipolo. Si noti che $\mathcal{G}_{c,N-1} = \mathcal{G}_{a,N-1} \mathcal{G}_{a,N}$.

L' $(N+1)$ -esimo contributo al rumore in uscita è dato dal rumore in eccesso generato dall' N -esimo doppio bipolo che, ai fini del calcolo della potenza disponibile in uscita, risulta equivalente ad un rumore bianco a temperatura equivalente $T_{e,N}$ posto in ingresso all' N -esimo doppio bipolo della cascata. Pertanto, per la (1), il contributo risultante alla potenza disponibile di rumore in uscita risulta pari a $\mathcal{G}_{c,N} K B_{c,N} T_{e,N}$ dove $\mathcal{G}_{c,N}$ e $B_{c,N}$ rappresentano rispettivamente il guadagno disponibile e la banda equivalente di rumore dell' N -esimo doppio bipolo. Si noti che $\mathcal{G}_{c,N} = \mathcal{G}_{a,N}$.

Risulta, pertanto, che la potenza di rumore disponibile complessiva in uscita, per l'indipendenza dei diversi contributi, si può scrivere come

$$\begin{aligned}
N_{a0} &= \mathcal{G}_a K B_N T_{in} + \mathcal{G}_a K B_N T_{e,1} + \mathcal{G}_{c,2} K B_{c,2} T_{e,2} + \mathcal{G}_{c,3} K B_{c,3} T_{e,3} + \dots + \mathcal{G}_{c,N} K B_{c,N} T_{e,N} \\
&= \mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N} K B_N T_{in} + \mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N} K B_N T_{e,1} + \mathcal{G}_{a,2} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N} K B_{c,2} T_{e,2} \\
&+ \mathcal{G}_{a,3} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N} K B_{c,3} T_{e,3} + \dots + \mathcal{G}_{a,N} K B_{c,N} T_{e,N} \\
&= \mathcal{G}_{a,1} \dots \mathcal{G}_{a,N} K \left(B_N T_{in} + B_N T_{e,1} + \frac{B_{c,2} T_{e,2}}{\mathcal{G}_{a,1}} + \frac{B_{c,3} T_{e,3}}{\mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2}} + \dots + \frac{B_{c,N} T_{e,N}}{\mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N-1}} \right) \quad (16)
\end{aligned}$$

Si assuma ora che la banda equivalente di rumore di S_2, S_3, \dots, S_{N-1} e dell'ultimo doppio bipolo siano molto simili ed approssimativamente uguali alla banda equivalente di rumore della cascata di tutti gli N doppi bipoli: $B_{c,2} \simeq B_{c,3} \simeq B_{c,N-1} \simeq B_{c,N} \simeq B_N$. Questa assunzione è ragionevole perchè spesso l'ultimo elemento della cascata presenta il massimo effetto filtrante e risulta responsabile della banda passante di tutta la cascata. In effetti la banda dell'ultimo elemento della cascata risulta pari a quella del segnale utile che risulta spesso minore di quella dei segnali negli stadi intermedi. La condizione imposta viene soddisfatta esattamente quando i primi $N - 1$ doppi bipoli hanno risposta in frequenza costante (in modulo) nella banda passante dell' N -esimo doppio bipolo; in tal caso tutti i doppi bipoli vedono rumore bianco nella banda passante dell'ultimo doppio bipolo.

La (16) si può quindi riscrivere come

$$N_{a0} = \mathcal{G}_{a,1} \dots \mathcal{G}_{a,N} K B_N \left(T_{in} + T_{e,1} + \frac{T_{e,2}}{\mathcal{G}_{a,1}} + \frac{T_{e,3}}{\mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2}} + \dots + \frac{T_{e,N}}{\mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N-1}} \right) \quad (17)$$

Da (14), (15) e (17) segue che

$$T_e = T_{e,1} + \frac{T_{e,2}}{\mathcal{G}_{a,1}} + \frac{T_{e,3}}{\mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2}} + \dots + \frac{T_{e,N}}{\mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N-1}} \quad (18)$$

Dalla (18) è possibile ricavare la relazione, detta *formula di Friis*, che esprime la cifra di rumore della cascata F_e in termini delle cifre di rumore F_i ($i = 1, \dots, N$) dei singoli elementi della cascata:

$$\begin{aligned}
F_e &= 1 + \frac{T_e}{T_0} \\
&= 1 + \frac{T_{e,1}}{T_0} + \frac{T_{e,2}}{T_0 \mathcal{G}_{a,1}} + \frac{T_{e,3}}{T_0 \mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2}} + \dots + \frac{T_{e,N}}{T_0 \mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N-1}} \\
&= F_1 + \frac{F_2 - 1}{\mathcal{G}_{e,1}} + \frac{F_3 - 1}{\mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2}} + \dots + \frac{F_N - 1}{\mathcal{G}_{a,1} \cdot \dots \cdot \mathcal{G}_{a,N-1}} \quad (19)
\end{aligned}$$

Dalla (18), o equivalentemente dalla (19), discendono conseguenze molto importanti nel progetto di un qualunque ricevitore. Al fine di minimizzare la temperatura equivalente di rumore del ricevitore, che è di estremo interesse sia nel caso analogico che nel caso numerico, conviene

usare come primo elemento della cascata un amplificatore, usualmente detto pre-amplificatore, con guadagno $\mathcal{G}_{a,1}$ molto elevato; in tal modo, nella (18) risultano trascurabili i termini dal secondo in poi, per cui la temperatura equivalente di rumore del ricevitore finisce per coincidere con quella $T_{e,1}$ del pre-amplificatore. Pertanto, l'utilizzo di un pre-amplificatore (con guadagno sufficientemente elevato) ben curato nei confronti del rumore consente di mantenere bassa la temperatura equivalente di rumore del ricevitore, indipendentemente dalle caratteristiche rumorose della parte rimanente.

Spesso non risulta possibile che un amplificatore sia il primo elemento del ricevitore. In tal caso, infatti, esso dovrebbe essere direttamente attaccato all'antenna, come avviene, per esempio, in alcune antenne a tromba. In pratica, spesso è necessario un tratto di cavo per connettere il pre-amplificatore ai morsetti d'antenna.

Dalla definizione di temperatura equivalente di rumore T_e del ricevitore segue (vedi Fig. 8) che è possibile portare in conto il rumore che il ricevitore genera a causa del suo funzionamento incrementando di T_e la temperatura equivalente del rumore bianco in ingresso al ricevitore. Il rumore in ingresso al ricevitore è quello che si presenta ai morsetti d'antenna per effetto del funzionamento stesso dell'antenna ed è dovuto sia al materiale conduttore che costituisce l'antenna sia ai campi elettromagnetici intercettati dall'antenna diversi da quello che trasporta il segnale utile. Esso è spesso modellabile ragionevolmente come rumore bianco alla temperatura T_a , detta temperatura equivalente di rumore d'antenna.

Nello studio delle comunicazioni elettriche si considera sempre ideale il ricevitore dal punto di vista della generazione interna del rumore ma si ammette che in ingresso al ricevitore ci sia una sorgente di rumore bianco, indipendente dal segnale utile, con densità spettrale di potenza pari a $\frac{N_0}{2}$ dove $N_0 \triangleq K(T_a + T_e) \triangleq KT_{op}$ dove $T_{op} \triangleq T_a + T_e$ è detta *temperatura operativa del sistema*. Tale sorgente di rumore è usualmente descritta come parte del canale di comunicazione (definito come il sistema che ha per ingresso i morsetti d'antenna in trasmissione e per uscita i morsetti d'antenna in ricezione nel caso di canale con propagazione libera del campo elettromagnetico, o, equivalentemente, come il sistema che ha per ingresso e per uscita i morsetti in trasmissione ed in ricezione del cavo utilizzato nel caso di propagazione guidata del campo elettromagnetico) benchè essa descriva anche gli effetti della rumorosità interna al dispositivo.

Studiando le prestazioni dei collegamenti punto-punto, si vedrà che dalla densità spettrale di potenza $\frac{N_0}{2}$ del rumore introdotto dal canale dipende il valore che si riesce a conseguire di un importante parametro di qualità del collegamento: il rapporto segnale rumore nel caso di collega-

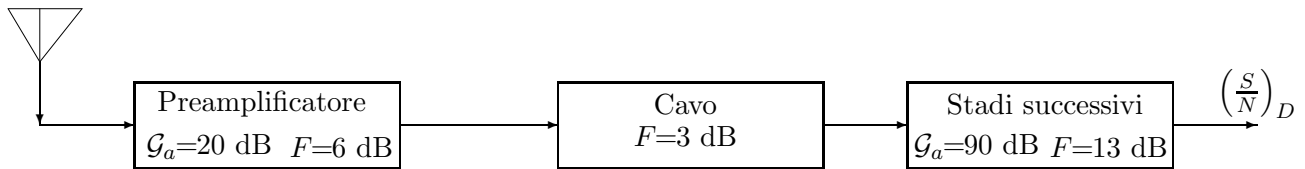


Figura 10: Un ricevitore con amplificazione ai terminali d'antenna.

menti analogici e la probabilità di errore nel caso di collegamenti numerici. Risulta, pertanto, importante curare la realizzazione del pre-amplificatore e collegarlo mediante un cavo con attenuazione sufficientemente ridotta in modo che $T_e \ll T_a$ e che, quindi, il rumore generato dal ricevitore influenzi in maniera trascurabile le prestazioni che si conseguono.

Es. 5 Dato il sistema di Fig. 10, si ha che la cifra di rumore complessiva è

$$F = 4 + \frac{2 - 1}{100} + \frac{20 - 1}{100 \times \frac{1}{2}} = 4.39 = 6.4dB$$

Se, viceversa, si fa riferimento ad una configurazione in cui si omette il pre-amplificatore, risulta

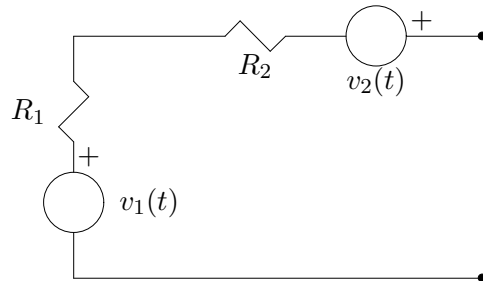
$$F = 2 + \frac{20 - 1}{\frac{1}{2}} = 40$$

cioè il rumore in uscita è circa 10 volte quello della configurazione precedente.

8 Esercizi con soluzione

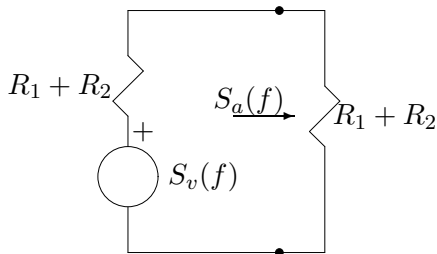
Ex. 1 Due resistori R_1 ed R_2 a temperatura T_1 e T_2 sono connessi in serie. Calcola la temperatura di rumore T_N della combinazione.

L'equivalente secondo Thévenin della situazione è



$$S_{v_1}(f) = 2KR_1T_1$$

$$S_{v_2}(f) = 2KR_2T_2$$



$$S_v(f) = 2K(R_1T_1 + R_2T_2)$$

$$S_a(f) = \frac{S_v(f)}{4(R_1 + R_2)} = \frac{K(R_1T_1 + R_2T_2)}{2(R_1 + R_2)} \triangleq \frac{\eta_a}{2}$$

$$T_N \triangleq \frac{\eta_a}{K} = \frac{R_1T_1 + R_2T_2}{R_1 + R_2}$$

Ex. 2 Calcola la banda equivalente di rumore B_N per il filtro

$$H(f) = K \exp\left(-\frac{\ln 2}{2} \frac{f^2}{W^2}\right)$$

filtro gaussiano

e confrontala con quella a 3 dB.

Banda a 3 dB (B)

Per il filtro considerato risulta

$$|H(f)|^2 = K^2 \exp\left(-\ln 2 \frac{f^2}{W^2}\right)$$

e, pertanto,

$$\mathcal{G} \triangleq |H(f)|_{\max}^2 = K^2$$

Dalla seguente definizione della banda B

$$|H(B)|^2 \triangleq \frac{1}{2}\mathcal{G}$$

seguono le seguenti equivalenze

$$K^2 \exp\left(-\ln 2 \frac{B^2}{W^2}\right) = \frac{1}{2}K^2$$

$$-\ln 2 \frac{B^2}{W^2} = \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$B = W$$

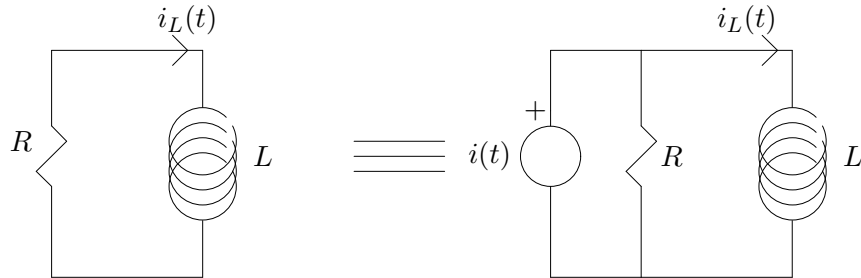
da cui risulta che W risulta proprio pari alla banda a 3 dB.

Banda B_N

$$\begin{aligned} B_N &= \frac{1}{G} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{K^2} \int_0^{+\infty} K^2 \exp \left(-\ln 2 \frac{f^2}{W^2} \right) df \\ &= \int_0^{+\infty} \exp \left(-\ln 2 \frac{f^2}{W^2} \right) df && \sqrt{\ln 2} \frac{f}{W} \triangleq x \\ &= \frac{W}{\sqrt{\ln 2}} \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx \\ &= \frac{W}{\sqrt{\ln 2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 1.06 W \end{aligned}$$

La banda equivalente di rumore è maggiore della banda a 3 dB.

Ex. 3 Un resistore R “rumoroso” sia connesso in serie con un induttore L . Sia T la temperatura. Si calcoli la densità spettrale della corrente che fluisce nell’induttore e l’energia media in esso immagazzinata.



$$S_i(f) = \frac{2KT}{R}$$

$$i_L = i \frac{R}{R + j\omega L}$$

$$S_{i_L}(f) = S_i(f) \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{2KT}{R} \frac{R^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i_L^2$$

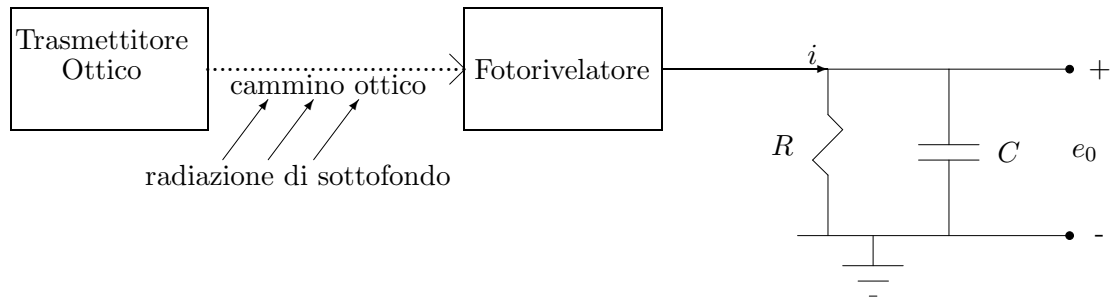
$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} L \overline{i_L^2(t)}$$

$$= \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{i_L}(f) df$$

$$= \frac{2KLT}{R} \int_0^{+\infty} \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} d\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{KLT}{R\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2}} d\omega & \omega \frac{L}{R} \triangleq x \\
&= \frac{KLT}{R\pi} \frac{R}{L} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx \\
&= \frac{KT}{\pi} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{KT}{2}
\end{aligned}$$

Ex. 4 Un modello semplificato di sistema di comunicazione ottico è il seguente:



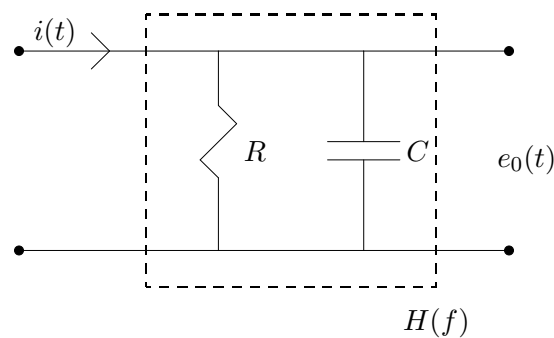
Il trasmettitore produce impulsi di luce che viaggiano verso il fotorivelatore attraverso un cammino ottico. La corrente del fotorivelatore si può scrivere

$$i = \bar{I} + i_s + i_b$$

dove \bar{I} , il segnale utile, è la corrente media dovuta alla luce trasmessa, i_s è una componente di rumore shot, con densità spettrale di potenza $S_s(f) = q\bar{I}$ (q è la carica dell'elettrone), dovuta all'arrivo dei fotoni in istanti di tempo discreti e aleatori, ed i_b è una componente di rumore bianco, con densità spettrale di potenza $S_b(f) = \frac{\eta}{2}$, dovuta al rumore di fondo.

- Si calcoli il rapporto segnale/rumore $\left(\frac{S}{N}\right)_0$ all'uscita del filtro, assumendo la resistenza R non rumorosa;
- Si ripeta il calcolo di (a), considerando R rumorosa.

(a) Definito il sistema $H(f)$ nel modo seguente



risulta che

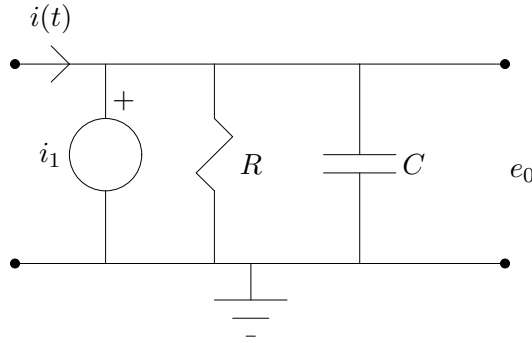
$$|H(f)|^2 = \left| \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|^2 = \frac{R^2}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2} \quad B \triangleq \frac{1}{2\pi RC}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_0 &= \frac{\bar{T}^2 \mathcal{G}}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) |H(f)|^2 df} \\ &= \frac{\bar{T}^2 R^2}{(2q\bar{T} + \eta) R^2 B \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\bar{T}^2}{(2q\bar{T} + \eta) B_N} \end{aligned}$$

essendo¹ $S_n(f) = S_s(f) + S_b(f) = q\bar{T} + \frac{\eta}{2}$ e $B_N = \frac{\pi B}{2}$, come ricavato in (2), la banda equivalente di rumore.

(b) La situazione ora diventa la seguente



ed è quindi la stessa di (a), solo che

$$S_n(f) = S_s(f) + S_b(f) + S_{i_1}(f) = q\bar{T} + \frac{\eta}{2} + \frac{2KT}{R}$$

Quindi,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\bar{T}^2}{(2q\bar{T} + \eta + \frac{4KT}{R}) B_N}$$

Ex. 5 All'uscita di un amplificatore con $\mathcal{G}_a = 50$ dB e $B_N = 20$ kHz è misurata una potenza disponibile $N_{a0} = 10^{10} KT_0$ quando $T_i = T_0$. Calcola la T_e e la N_{a0} quando $T_i = 2T_0$.

Dalla (4) segue che

$$10^{10} KT_0 = 10^5 K(T_0 + T_e) 2 \cdot 10^4$$

¹Le densità si sommano poichè le sorgenti di rumore sono indipendenti.

e, quindi,

$$10T_0 = 2(T_0 + T_e)$$

da cui $T_e = 4T_0$ Ancora dalla (4) segue che, se $T_i = 2T_0$, la potenza disponibile vale

$$\mathcal{G}_a K(2T_0 + 4T_0)B_N = 6\mathcal{G}_a K T_0 B_N \simeq 48 \times 10^{-12} W \simeq -103 \text{ dBW}$$

Ex. 6 Due amplificatori in cascata hanno le seguenti caratteristiche: $T_{e,1} = 3T_0$, $\mathcal{G}_{a,1} = 10 \text{ dB}$, $F_2 = 13 \text{ dB}$, $\mathcal{G}_{a,2} = 50 \text{ dB}$. Se $B_N = 100 \text{ kHz}$ e $T_i = 10T_0$, qual è il valore della potenza S_i del segnale utile in ingresso alla cascata richiesto per avere un SNR in uscita $\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 30 \text{ dB}$?

La temperatura equivalente di rumore complessiva è

$$\begin{aligned} T_e &= T_{e,1} + \frac{T_{e,2}}{\mathcal{G}_{a,1}} \\ &= 3T_0 + \frac{T_0(F_2 - 1)}{10} \\ &= 3T_0 + \frac{T_0(20 - 1)}{10} \\ &= 4.9T_0 \end{aligned}$$

Siccome

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{S_i \mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2}}{\mathcal{G}_{a,1} \mathcal{G}_{a,2} K(T_i + T_e)B_N}$$

affinchè $\left(\frac{S}{N}\right)_0$ sia pari a 1000 deve risultare

$$\begin{aligned} S_i &= 10^3 K(T_i + T_e)B_N \\ &= 10^3 \times 1.37 \times 10^{-23} \times (10 T_0 + 4.9 T_0)10^5 = 5.9 \times 10^{-12} W \\ &= -112.3 \text{ dBW} \end{aligned}$$

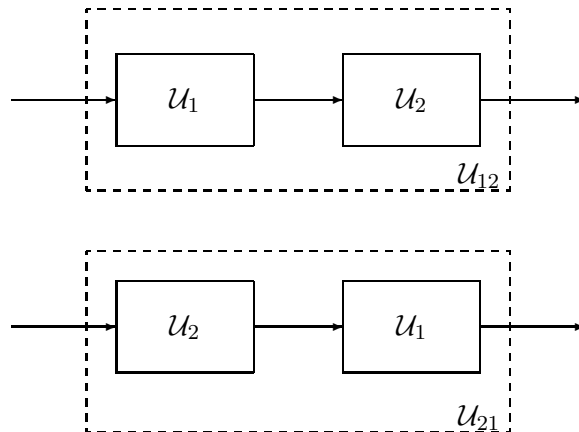
Ex. 7 La misura di rumore di *Hans-Adler* è definita da

$$\mathcal{U} \triangleq \frac{F - 1}{1 - \mathcal{L}} \quad (20)$$

Se si pongono in cascata due amplificatori con

$$\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2 \quad (21)$$

qual è la configurazione che dà il valore più basso per l' \mathcal{U} complessivo?



Le seguenti condizioni sono equivalenti alla (21):

$$\begin{aligned} \frac{F_1 - 1}{1 - \mathcal{L}_1} &< \frac{F_2 - 1}{1 - \mathcal{L}_2} \\ (F_1 - 1)(1 - \mathcal{L}_2) &< (F_2 - 1)(1 - \mathcal{L}_1) \\ F_1(1 - \mathcal{L}_2) + \mathcal{L}_2 &< F_2(1 - \mathcal{L}_1) + \mathcal{L}_1 \end{aligned} \quad (22)$$

Calcoliamo la misura \mathcal{U}_{12} per la prima configurazione:

$$\mathcal{U}_{12} = \frac{F_1 + \mathcal{L}_1(F_2 - 1) - 1}{1 - \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$$

ed analogamente, scriviamo la misura \mathcal{U}_{21} per la seconda configurazione:

$$\mathcal{U}_{21} = \frac{F_2 + \mathcal{L}_2(F_1 - 1) - 1}{1 - \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$$

La condizione

$$\mathcal{U}_{12} < \mathcal{U}_{21} \quad (23)$$

risulta quindi equivalente alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \frac{F_1 + \mathcal{L}_1(F_2 - 1) - 1}{1 - \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} &< \frac{F_2 + \mathcal{L}_2(F_1 - 1) - 1}{1 - \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} \\ F_1 + \mathcal{L}_1(F_2 - 1) - 1 &< F_2 + \mathcal{L}_2(F_1 - 1) - 1 \\ F_1 - \mathcal{L}_2(F_1 - 1) &< F_2 - \mathcal{L}_1(F_2 - 1) \end{aligned} \quad (24)$$

Siccome le condizioni (22) e (24) sono equivalenti, allora anche le condizioni (21) e (23) sono equivalenti; pertanto, la condizione data (21) implica la (23).