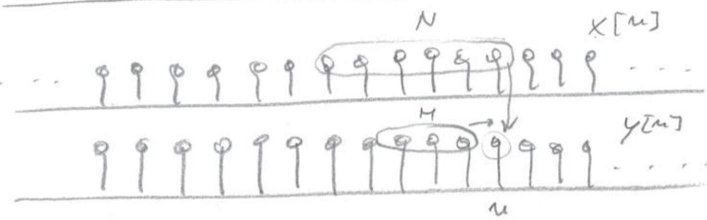
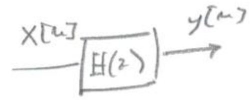
FORMA CANONICA DEI FILTRI NUMERICI





$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=1}^{M} a_k\, y[n-k]}_{\text{parte ricorsiva}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} b_k\, x[n-k]}_{\text{solo dai campioni dell'ingresso}} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{STRUTTURA}\\ \text{GENERALE IIR}\end{array}\right)$$

$$\Downarrow Z$$

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}\, Y(z) + \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \dots - a_M z^{-M}}$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ ha in generale sia poli che zeri. Per vedere meglio riduciamola a rapporto di polinomi in potenze positive di z

$$H(z) = \frac{z^{-N+1}}{z^{-M}} \; \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \dots + b_{N-1}}{z^{M} - a_1 z^{M-1} - a_2 z^{M-2} - \dots - a_M} \quad \begin{array}{l} \to N-1 \text{ zeri} \\ \to M \text{ poli} \end{array}$$

$= z^{-N+M+1}$ poli o zeri nell'origine a seconda che $-N+M+1 \lessgtr 0$

Affinché i coefficienti dell'equazione alle differenze siano reali deve verificarsi che i poli e gli zeri complessi compaiano in coppie coniugate.

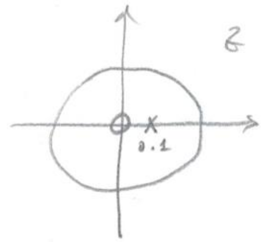
Poliseni F. Z

Esempio 1: Dall'equazione alle differenze:

$$y[n] = 0.1\, y[n-1] + 3x[n],$$

la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{3}{1 - 0.1 z^{-1}} = \frac{3\, z}{z - 0.1}$$



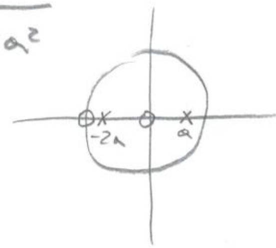
Esempio 2

Dati i poli e gli zeri

$$z_1 = -1 \quad z_2 = 0 \qquad p_1 = a \quad p_2 = -2a \qquad |a| < \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{(z+1)\, z}{(z-a)(z+2a)} = \frac{z^2 + z}{z^2 - az + 2az - 2a^2}$$

$$= \frac{\cancel{z^2}\,(1 + z^{-1})}{\cancel{z^2}\,(1 - a z^{-1} - 2a z^{-2})}$$

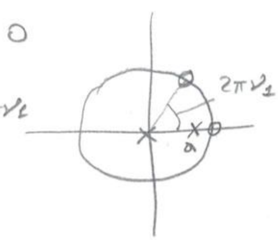


l'eq. alle differenze è

$$y[n] = a\, y[n-1] + 2a\, y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

Esempio 3 Dati i poli e gli zeri

$$z_1 = e^{j2\pi\nu_1} \qquad z_2 = 1 \qquad p_1 = a \qquad p_2 = 0$$



$$H(z) = \frac{(z - e^{j2\pi\nu_1})(z-1)}{(z-a)\, z} = \frac{z^2 - e^{j2\pi\nu_1} z - z + e^{j2\pi\nu_1}}{z^2 - az}$$

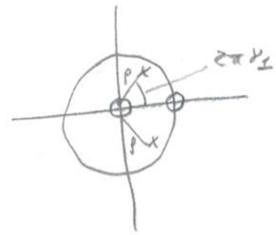
$$= \frac{\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}} \; \frac{1 - (e^{j2\pi\nu_1} + 1)\, z^{-1} + e^{j2\pi\nu_1} z^{-2}}{1 - a z^{-1}}$$

coefficienti complessi!!

l'equazione alle differenze ha coefficienti complessi e quindi l'uscita del filtro è complessa.

Esempio 4

$$p_1 = \rho e^{j2\pi\nu_1} \quad p_2 = \rho e^{-j2\pi\nu_1} \qquad z_1 = 1 \quad z_2 = 0$$



$$H(z) = \frac{(z-1)\,z}{(z-\rho e^{j2\pi\nu_1})(z-\rho e^{-j2\pi\nu_1})}$$

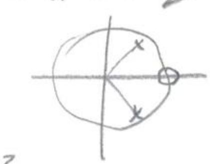
$$= \frac{z^2 - z}{z^2 - \rho e^{j2\pi\nu_1} z - \rho e^{-j2\pi\nu_1} z + \rho^2}$$

$$= \frac{z^2 - z}{z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_1\, z + \rho^2} = \frac{\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 - 2\rho\cos 2\pi\nu_1\, z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$y[n] = 2\rho\cos 2\pi\nu_1\, y[n-1] - \rho^2 y[n-2] + x[n] - x[n-1]$$

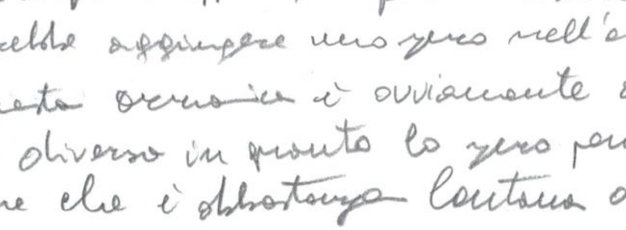
Esempio 5 (Con numero di poli maggiore al # di zeri)

$$p_1 = \rho e^{j2\pi\nu_1} \quad p_2 = \rho e^{-j2\pi\nu_1} \qquad z = 1$$



$$H(z) = \frac{z-1}{z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_1\, z + \rho^2} = \frac{\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}}\,\frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 2\rho\cos 2\pi\nu_1\, z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$y[n] = 2\rho\cos 2\pi\nu_1\, y[n-1] - \rho^2 y[n-2] + x[n-1] - x[n-2]$$



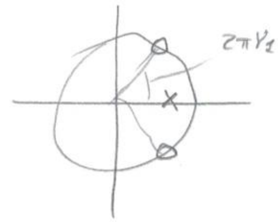
l'uscita del filtro non "sente" l'ingresso subito, ma dopo un ritardo di un campione (Ritardo complessivo)

Per evitare questo effetto, che potrebbe essere non desiderabile, si potrebbe aggiungere uno zero nell'origine come nell'Esempio 4. La risposta armonica è ovviamente diversa (solo in fase), ma non molto diversa in quanto lo zero pone un vincolo nell'origine che è abbastanza lontana dal cerchio unitario

Esempio 6 (con un numero di zeri superiore al # di poli)

PAlmieri F. 4

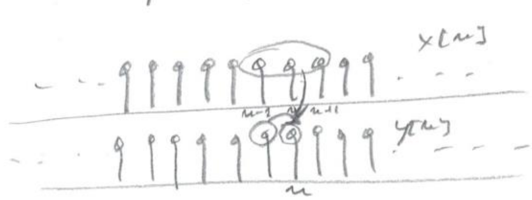
$$P_1 = a \qquad z_1 = e^{j2\pi\nu_1} \qquad z_2 = e^{-j2\pi\nu_2}$$



$$H(z) = \frac{z^2 - 2\cos 2\pi\nu_1 z + 1}{z - a}$$

$$= \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}} \; \frac{z - 2\cos 2\pi\nu_1 + z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$

$$y[n] = a\,y[n-1] + x[n+1] - 2\cos 2\pi\nu_1\, x[n] + x[n-1]$$



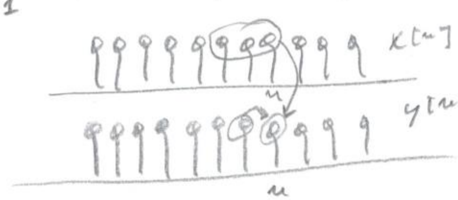
il filtro è non causale poiché richiede il campione $x[n+1]$ "futuro" rispetto a $y[n]$.

Il filtro può essere comunque realizzato se accettiamo un ritardo di un campione, ovvero usiamo la funzione di trasferimento ritardata

$$z^{-1}\,\frac{z^2 - 2\cos 2\pi\nu_1 z + 1}{z - a} = \frac{z^2 - 2\cos 2\pi\nu_1 z + 1}{z(z-a)} = \frac{}{z^2 - a z}$$

che equivale ad aver aggiunto un polo nell'origine. la risposta armonica sarà la stessa in ampiezza, ma con una fase a cui è stata aggiunta una fase lineare. L'eq. alle differenze si ottiene come al solito

$$\frac{1 - 2\cos 2\pi\nu_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - a z^{-1}} \rightarrow y[n] = a\,y[n-1] + x[n] - 2\cos 2\pi\nu_1\, x[n-1] + x[n-2]$$



Filtro causale

FIR CAUSALE

Vediamo un po' più in dettaglio quando non c'è la parte ricorsiva $a_1 = a_2 \dots = 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \, x[n-k]$$

Si noti che le b_k in questo caso sono proprio i campioni della risposta impulsiva $h[n] = b_n$

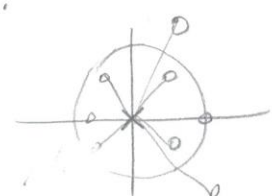
Nel dominio Z abbiamo

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1}$$

Per vedere poli e zeri, mettiamo in evidenza z^{-N+1}

$$= \underbrace{z^{-N+1}}_{\substack{N-1 \\ \text{poli nell'origine}}} \big(\underbrace{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \dots + b_{N-1}}_{N-1 \text{ zeri}} \big)$$



Ribadiamo che gli zeri devono essere o reali o in coppie coniugate affinché i coefficienti b_n siano reali.

Esempio 7

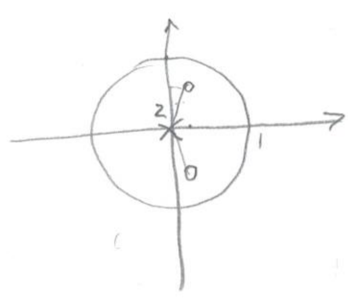
$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2} x[n-1] + \frac{1}{2} x[n-2]$$

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} = z^{-2}\left(z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}\right)$$

$$z_{12} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2}}{2}$$

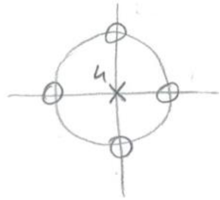
$$= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-8}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{4}}$$



Esempio 8

Palmieri F.6



$z_1 = 1 \quad z_2 = j \quad z_3 = -1 \quad z_4 = -j$

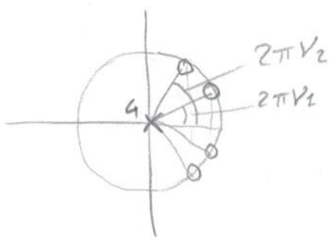
$p_{1,2,3,4} = 0 \quad (4)$

$$H(z) = z^{-4}(z-1)(z+1)(z-j)(z+j)$$

$$= z^{-4}(z^2-1)(z^2+1) = z^{-4}(z^4 \cancel{+z^2} \cancel{-z^2} - 1) = 1 - z^{-4}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-4]$$

Esempio 9



$z_1 = e^{j2\pi\nu_1} \quad z_2 = e^{-j2\pi\nu_1}$

$z_3 = e^{j2\pi\nu_2} \quad z_4 = e^{-j2\pi\nu_2}$

$$H(z) = z^{-4}\left(z - e^{j2\pi\nu_1}\right)\left(z - e^{-j2\pi\nu_1}\right)\left(z - e^{j2\pi\nu_2}\right)\left(z - e^{-j2\pi\nu_2}\right)$$

$$= z^{-4}\left(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_1 z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_2 z + 1\right)$$

$$= z^{-4}\Big(z^4 - 2\cos 2\pi\nu_2 z^3 + z^2 - 2\cos 2\pi\nu_1 z^3 + 4\cos 2\pi\nu_1 \cos 2\pi\nu_2 z^2$$

$$- 2\cos 2\pi\nu_1 z + z^2 - 2\cos 2\pi\nu_2 z + 1\Big)$$

$$= z^{-4}\Big(z^4 \underbrace{- 2(\cos 2\pi\nu_2 + \cos 2\pi\nu_1)}_{b_1} z^3 + \underbrace{(2 + 4\cos 2\pi\nu_1 \cos 2\pi\nu_2)}_{b_2} z^2$$

$$\underbrace{- 2(\cos 2\pi\nu_1 + \cos 2\pi\nu_2)}_{b_3} z + \underbrace{1}_{b_4}\Big)$$

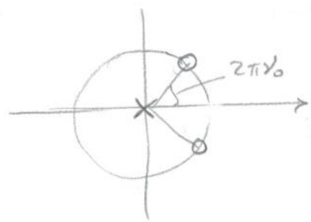
$$= 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + z^{-4}$$

$$y[n] = x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + b_3 x[n-3] + x[n-4]$$

Esempio 10 FIR con più zeri che poli

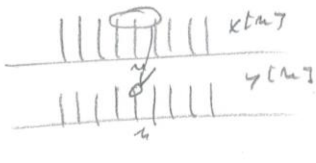
$z_1 = e^{j2\pi\nu_0}$ $z_2 = e^{-j2\pi\nu_0}$

$P_1 = 0$



$$H(z) = z^{-1}(z - e^{j2\pi\nu_0})(z - e^{-j2\pi\nu_0}) = z^{-1}(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_0 z + 1)$$

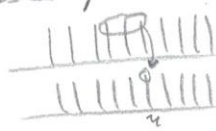
$$= z - 2\cos 2\pi\nu_0 + z^{-1}$$



$$y[n] = x[n+1] - 2\cos 2\pi\nu_0 \, x[n] + x[n-1]$$

filtro non causale.

Basta aggiungere un polo nell'origine per ottenere un filtro causale.

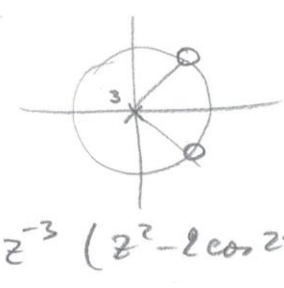


$$H(z) = z^{-2}(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_0 z + 1) = 1 - 2\cos 2\pi\nu_0 z^{-1} + z^{-2}$$

$$y[n] = x[n] - 2\cos 2\pi\nu_0 \, x[n-1] + x[n-2]$$

Esempio 11 FIR con più poli nell'origine che zeri

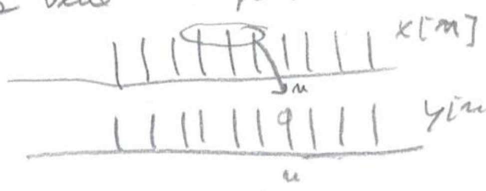
$P_{1,2,3} = 0$ $z_1 = e^{j2\pi\nu_0}$, $z_2 = e^{-j2\pi\nu_0}$



$$H(z) = z^{-3}(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_0 z + 1) = z^{-1} - 2\cos 2\pi\nu_0 z^{-2} + z^{-3}$$

$$y[n] = x[n-1] - 2\cos 2\pi\nu_0 \, x[n-2] + x[n-3]$$

L'uscita "vede" l'ingresso con un ritardo di un campione.



(Per risolvere basta eliminare un polo dall'origine)