LA TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

(DFT)

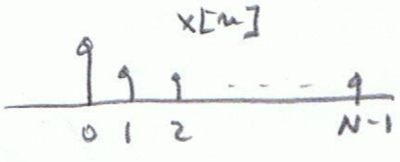
Nell'analisi del comportamento in frequenza di dati reali tempo-discreto, ci sono due elementi che vanno tenuti in conto:

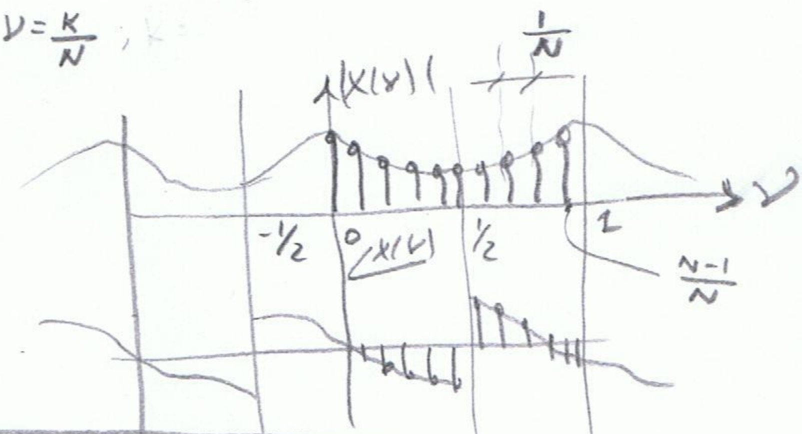
(1) le sequenze disponibili sono di lunghezza finita.

(2) la trasformata di Fourier $X(\nu)$, può essere valutata solo su un numero discreto di valori di ν.

Queste due esigenze portano alla definizione della trasformata discreta di Fourier, come la trasformata di Fourier di una sequenza finita valutata su un numero finito di frequenze normalizzate equamente spaziate, ovvero

$$\begin{cases} X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi n\nu} \\ X[k] = X(\nu)\Big|_{\nu=\frac{k}{N}} \qquad k=0,\dots,N-1 \end{cases}$$





(*) $$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k=0,\dots,N-1}$$ DFT (DISCRETE FOURIER TRANSFORM)

La ragione per avere scelto N campioni in frequenza è nel fatto che poiché $x[n]$ è utilizzato solo su N campioni, abbiamo N "gradi di libertà" e pertanto N valori dovrebbero bastare per ricostruire $\{x[n], n=0,\dots,N-1\}$ da $\{X[K], K=0,\dots,N-1\}$. Infatti la Anti-trasformata discreta di Fourier, o IDFT è

$$(**) \qquad \boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi}{N}Kn} \qquad n=0,\dots,N-1}$$

IDFT

Prova:

Dalla definizione

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nK},$$

moltiplichiamo ambo i membri per $e^{j\frac{2\pi}{N}K\ell}$ e sommiamo su K per $K=0,\dots,N-1$

$$\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi}{N}K\ell} = \sum_{K=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nK} e^{j\frac{2\pi}{N}K\ell}$$

$$\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi}{N}K\ell} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{\sum_{K=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}K(n-\ell)}}$$

$n=\ell$: N

$n\neq\ell$: $\dfrac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-\ell)N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-\ell)}} = 0$

$$\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi}{N}K\ell} = N\, x[\ell]$$

PERIODICITA': Nota che $X[K]$ se valutata dalla formula (*) per $K > N-1$ e $K<0$ è periodica con periodo N. Analogamente $x[n]$ dalla formula (**) è periodica con periodo N se calcolata per $n > N-1$ e per $n<0$.

Utile è anche la formulazione matriciale diretta

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{W}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{X}}$$

e inversa

$$\underbrace{\frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{W}}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

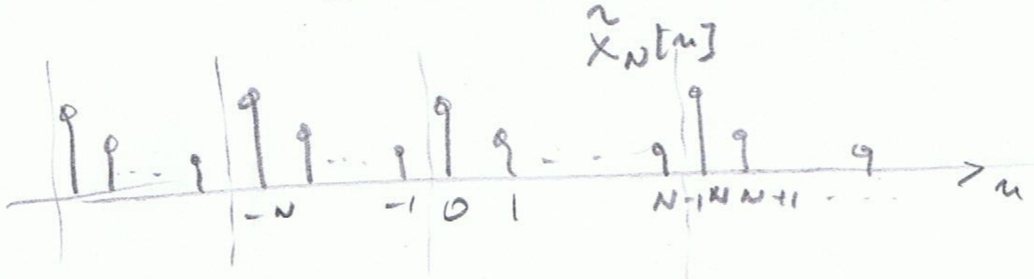
Si noti che $\underline{\underline{W}}$ è simmetrica e ortogonale, poiché

$$\underline{\underline{W}}^{-1} = \frac{1}{N}\underline{\underline{W}}^{*} = \frac{1}{N}\underline{\underline{W}}^{H}$$

Per maggiore facilità di manipolazione definiamo

$$x_N[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ (sequenza finestrata)

$$\tilde{x}_N[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_N[n - \ell N]$$ Estensione periodica di $x_N[n]$



PROPRIETÀ DELLA DFT

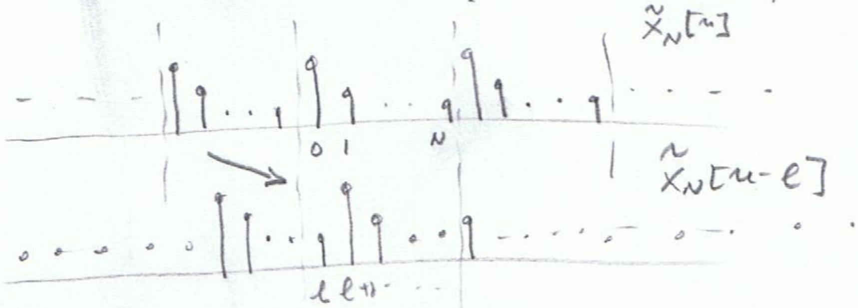
1. linearità $\qquad x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] \qquad x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_2[k]$

$$x_1[n]+x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k]+X_2[k]$$

2. Traslazione circolare

$$\{x[n], n=0,\dots,N-1\} \xleftrightarrow{DFT} \{X[k], k=0,\dots,N-1\}$$

$$\tilde{x}_N[n-l] \xleftrightarrow{DFT} \{e^{-j\frac{2\pi}{N}lk} X[k], k=0,\dots,N-1\}$$



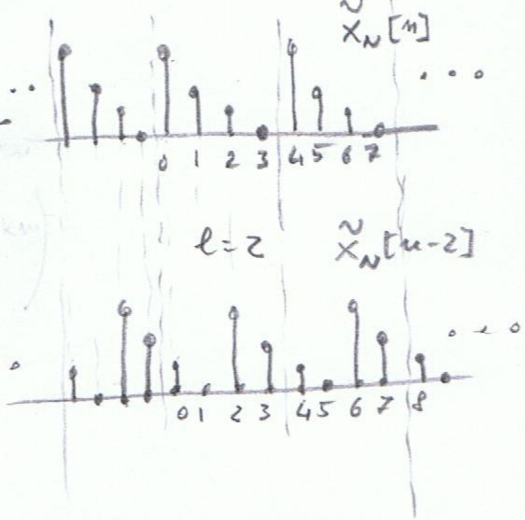
Prova

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N[n-l]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=-l}^{N-1-l} \tilde{x}_N[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+l)}$$

$m = n-l$

$$= \sum_{m=-l}^{-1} \tilde{x}_N[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+l)} + \sum_{m=0}^{N-1-l} \tilde{x}_N[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+l)}$$

Es. N=4



ma per la periodicità di $\tilde{x}_N[m]$, abbiamo che

$\tilde{x}_N[m]$, $m=-l,\dots,-1$

$= \tilde{x}_N[m]$, $m = N-l,\dots,N-1$

Ma anche

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+N)},$$

quindi

$$= \sum_{m=N-l}^{N-1} \tilde{x}_N[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} + \sum_{m=0}^{N-1-l} \tilde{x}_N[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \quad \blacksquare$$

3. Inversione temporale

$$\{\tilde{x}_N[n],\ n=0,\dots,N-1\} \xleftrightarrow{\text{DFT}} \{\tilde{X}_N[k],\ k=0,\dots,N-1\}$$

$$\{\tilde{x}_N[N-n],\ n=0,\dots,N-1\} \xleftrightarrow{\text{DFT}} \{\tilde{X}_N[N-k],\ k=0,\dots,N-1\}$$

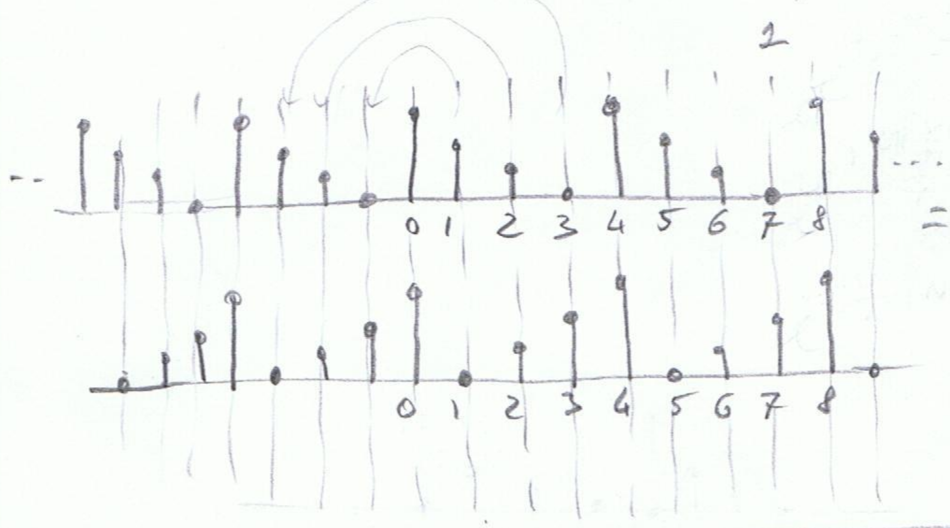
Prova:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N[N-n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m]\, \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-m)}}_{\cancel{e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}\, e^{j\frac{2\pi}{N}km}} =$$

$m = N-n$

1

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k-N)m}$$



$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)m} \quad \boxed{\square}$$

4. Convoluzione circolare.

La convoluzione circolare di due sequenze di lunghezza finita $x_N[n]$ e $y_N[n]$, è pari alla convoluzione lineare della loro estensione periodica

$$x_N[n] \circledast y_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m]\, \tilde{y}_N[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{y}_N[m]\, \tilde{x}_N[n-m]$$

Questa è equivalente a

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_N[m]\, \tilde{y}_N[n-m]$$ (tenendo ferma $x_N[m]$ e facendo shiftare $\tilde{y}_N[m]$)

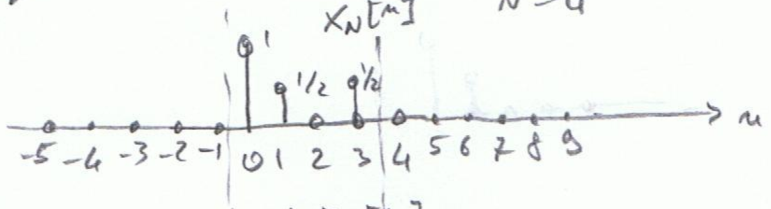
oppure

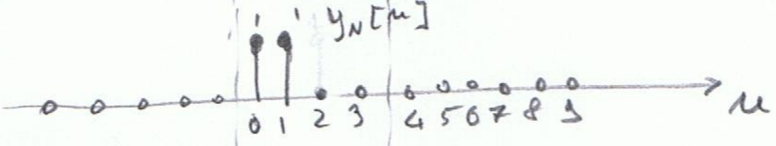
$$\sum_{m=0}^{N-1} y_N[m]\, \tilde{x}_N[n-m]$$ (tenendo ferma $y_N[m]$ e facendo shiftare $\tilde{x}_N[m]$)

La convoluzione circolare differisce dalla convoluzione lineare

$$x_N[n] * y_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_N[m]\, y_N[n-m]$$ che assume zero al di fuori di $0 .. N-1$.

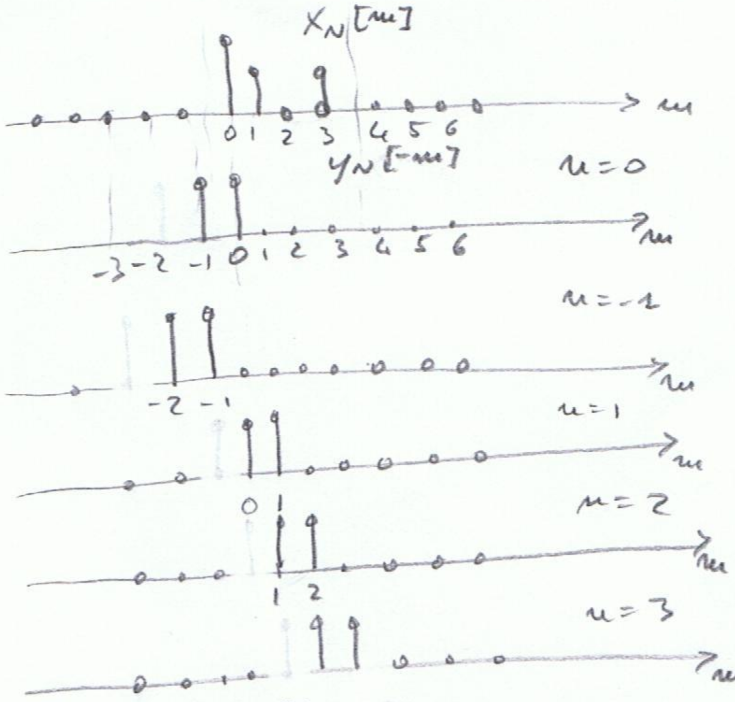
Esempio





Convoluzione lineare

$$z[n] = x_N[n] * y_N[n]$$



$n=0$ $\quad z[0]=1$

$n=-1$ $\quad z[-1]=0$

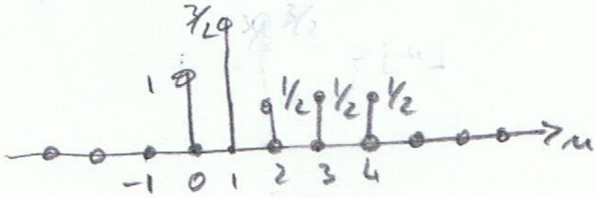
$n=1$ $\quad z[1] = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$n=2$ $\quad z[2] = \frac{1}{2}$

$n=3$ $\quad z[3] = \frac{1}{2}$

$z[4] = \frac{1}{2}$

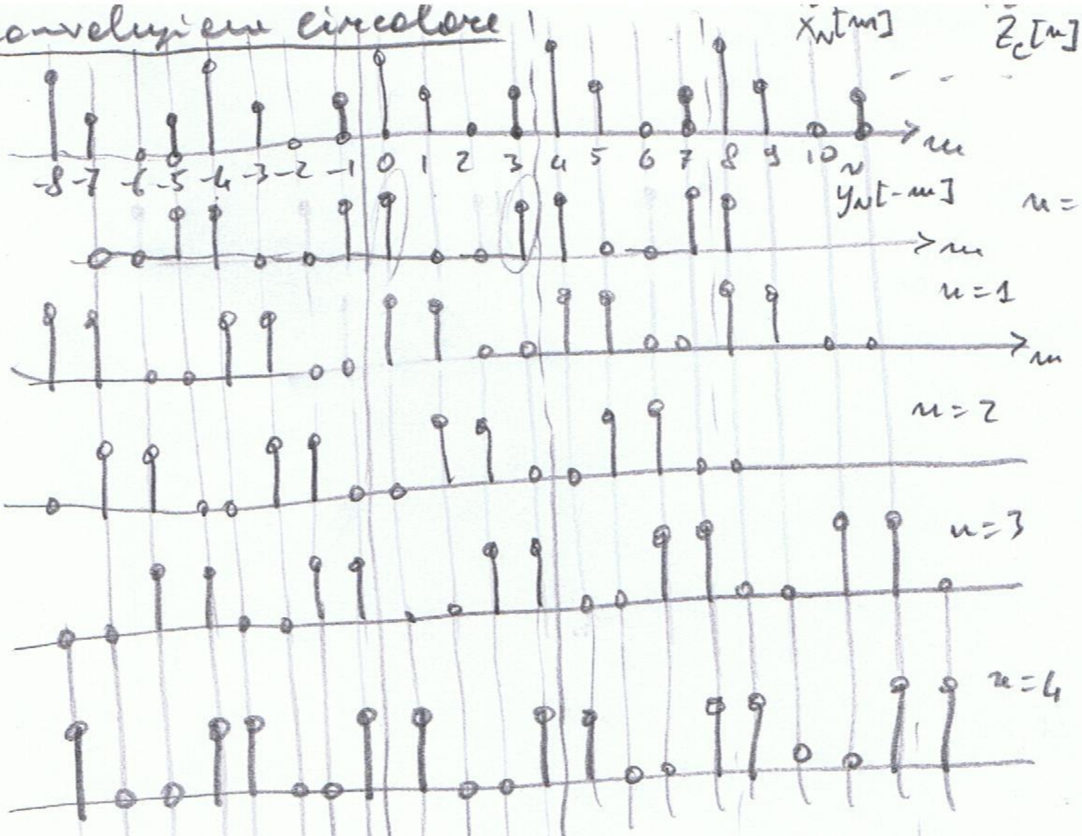
$z[5] = 0$



convoluzione circolare

$$\tilde{z}_c[n] = x_N[n] \circledast y_N[n]$$

DFT o 7



$n=0 \quad z_c[0] = \frac{3}{2}$

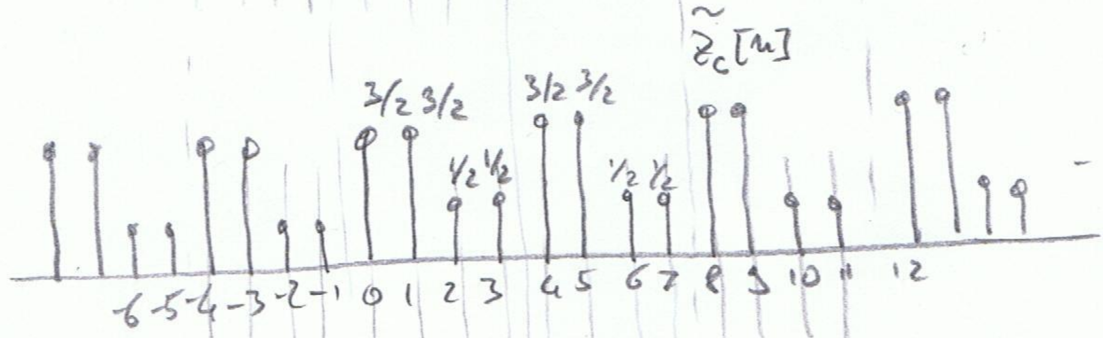
$n=1 \quad z_c[1] = \frac{3}{2}$

$n=2 \quad z_c[2] = \frac{1}{2}$

$n=3 \quad z_c[3] = \frac{1}{2}$

$n=4 \quad z_c[4] = \frac{3}{2}$

$z_c[5] = \frac{3}{2}$



sequenza periodica

$$\tilde{x}_N[n] \xleftrightarrow{DFT} X_N[k]$$

$$\tilde{y}_N[n] \xleftrightarrow{DFT} Y_N[k]$$

$$\tilde{x}_N[n] \circledast \tilde{y}_N[n] \xleftrightarrow{DFT} \tilde{X}_N[k] \cdot \tilde{Y}_N[k]$$

(conv. circolare) (prodotto)

Risultato duale

$$\tilde{x}_N[n] \cdot \tilde{y}_N[n] \xleftrightarrow{DFT} \tilde{X}_N[k] \circledast \tilde{Y}_N[k]$$

(prodotto) (conv. circolare)

PROVA:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m]\, \tilde{y}_N[n-m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m] \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}_N[n-m] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$l = n - m$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m] \sum_{l=-m}^{N-1-m} \tilde{y}_N[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(l+m)}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}}_{X_N[k]} \sum_{l=-m}^{N-1-m} \tilde{y}_N[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$$

$$\sum_{l=-m}^{-1} \tilde{y}_N[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} + \sum_{l=0}^{N-1-m} \tilde{y}_N[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$$

$\tilde{y}_N[l] \quad l = -m, \ldots, -1$

$= \tilde{y}_N[l] \quad l = N-m, \ldots N-1$

Ma anche

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \quad l = -m, \ldots, -1$

$= e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \quad l = N-m, \ldots, N-1$, quindi

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_N[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}}_{X_N[k]} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{y}_N[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}}_{Y_N[k]}$$

$\blacksquare$