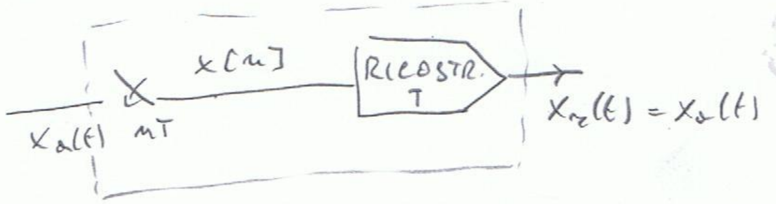
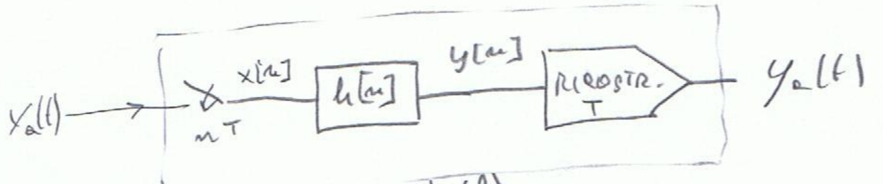
PROGETTO DI FILTRI FIR CON IL METODO DELLA FINESTRA (O DELLA SERIE DI FOURIER TRONCATA)

Lo schema tipico di campionamento e ricostruzione è riportato in figura



$x_r(t) = x_a(t)$ se le condizioni di alias-free e di ricostruzione sono soddisfatte.

La naturale evoluzione di questo discorso è la interposizione all'interno del sistema tempo-discreto di una operazione di filtraggio tempo-invariante.



$H_a(f)$

Il blocco interno processa la sequenza $x[n]$ mediante la convoluzione discreta

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

Assumiamo ancora che per ottenere $y[n]$ sia disponibile tutta la sequenza $x[n]$ (sommatoria con k da $-\infty$ a $+\infty$). Tale vincolo sarà rimosso in seguito.

Vogliamo studiare le caratteristiche del sistema lineare tempo-continuo equivalente $H_a(f)$.

Ricordiamo che $Y(\nu) = H(\nu) X(\nu)$, dove

$$X(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\nu - n}{T}\right).$$ Pertanto

$$Y(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(\nu) X_a\left(\frac{\nu - n}{T}\right)$$

$$Y_a(f) = I(f) \cdot Y(fT) = I(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(fT) X_a\left(\frac{fT - n}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(fT) X_a\left(f - \frac{n}{T}\right) I(f)$$

Pertanto se valgono le condizioni del teorema del campionamento per $x_a(t)$ e $I(f)$ è l'interpolatore cardinale ideale

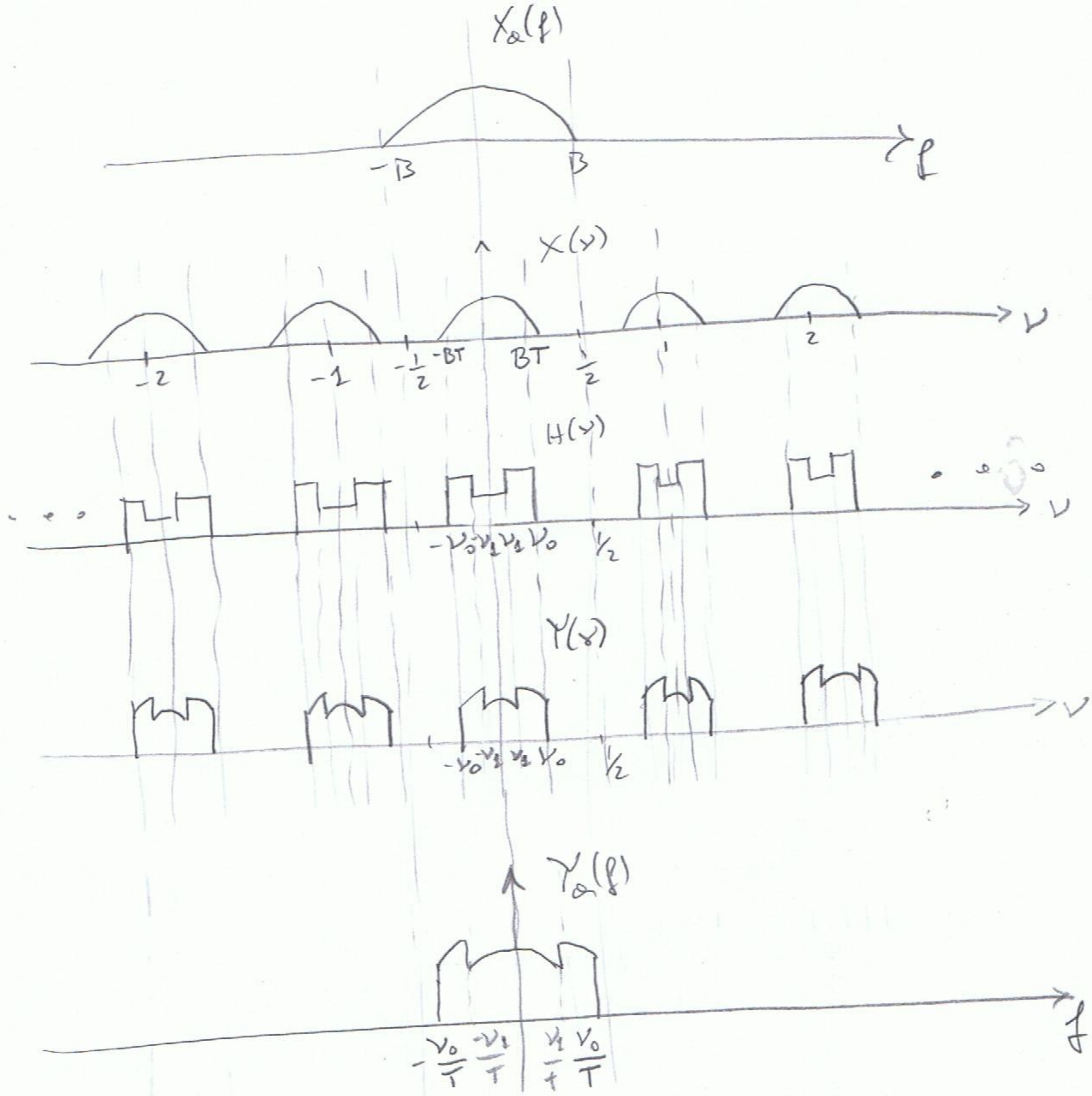
$$Y_a(f) = H(fT) X_a(f) \quad -\frac{1}{2T} < f < \frac{1}{2T}$$

ovvero

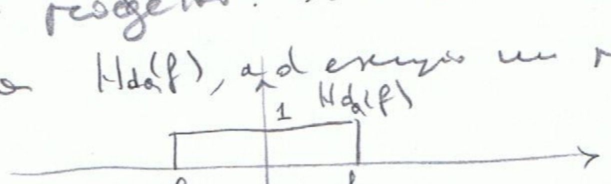
$$\boxed{H_a(f) = H(fT) \quad -\frac{1}{2T} < f < \frac{1}{2T}}$$

La risposta analogica equivalente è data da $H(\nu)$, $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$, riportata in f.

La seguente figura mostra in maniera pittorica l'andamento dei vari spettri per un filtro numerico $H(\nu)$ che elimina un po' della banda di $X_a(f)$ (per $|f| \in [\nu_0, BT]$), ne enfatizza una parte (per $|f| \in [\nu_1, \nu_0]$) e ne trasferisce inalterata un'altra (per $|f| \in [0, \nu_1]$).

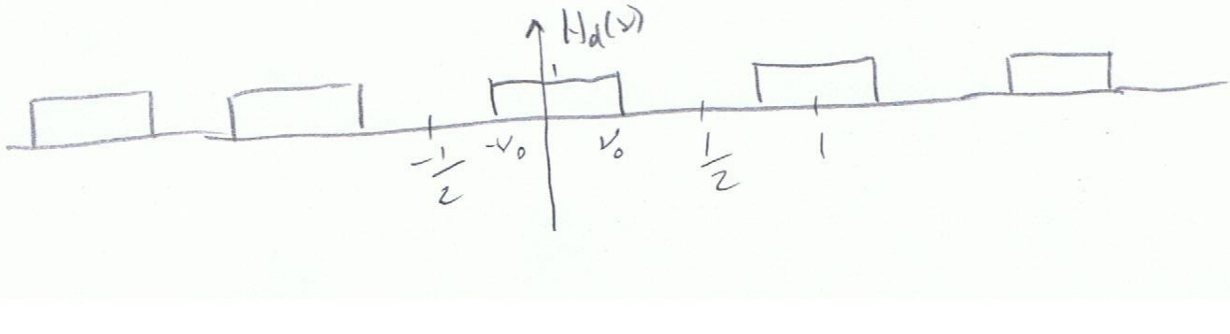


Le semplici relazioni suggeriscono una semplice tecnica di progetto. Data una risposta "desiderata" analogica $H_{da}(f)$, ad esempio un passa-basso,



fissata la freq. di campionamento $\frac{1}{T}$, riporta $H_{da}(f)$ in frequenza normalizzata ν. (si assume ovviamente che $f_0T < \frac{1}{2}$ ovvero $\frac{1}{T} > 2f_0$)

$$H_d(\nu) = H_{da}\left(\frac{\nu}{T}\right) \qquad \nu_0 = f_0 T$$



FIR4

Pertanto il filtro desiderato ha risposta impulsiva

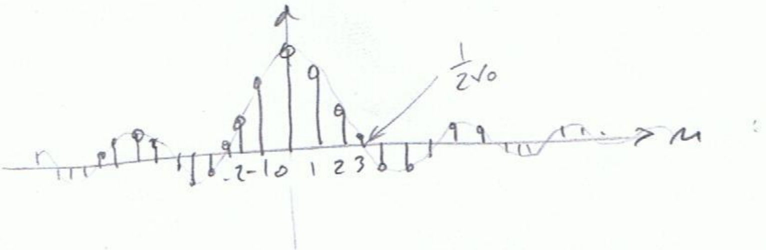
$$h_d[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H_d(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu \qquad -\infty < n < +\infty$$

ESEMPIO Filtro passa-basso ideale con freq. di taglio f_0.

$\nu_0 = f_0 T$

$$h_d[n] = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{+j2\pi\nu n}\, d\nu = \left.\frac{e^{j2\pi\nu n}}{j2\pi n}\right]_{-\nu_0}^{\nu_0} = \frac{e^{j2\pi\nu_0 n} - e^{-j2\pi\nu_0 n}}{j2\pi n} = \frac{\sin 2\pi\nu_0 n}{\pi n \nu_0 2}\,\nu_0 2$$

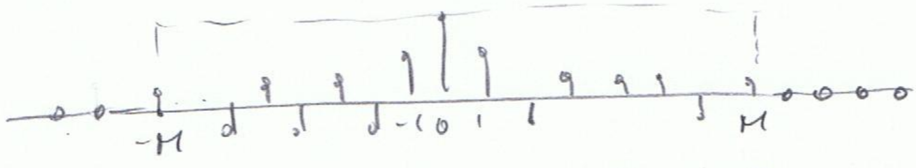
$$h_d[n] = 2\nu_0\, \mathrm{sinc}\, 2\nu_0 n$$



Ovviamente (anche dall'esempio) $h_d[n]$ non è fisicamente realizzabile perché: (a) ha estensione infinita; (b) non è **causale**.

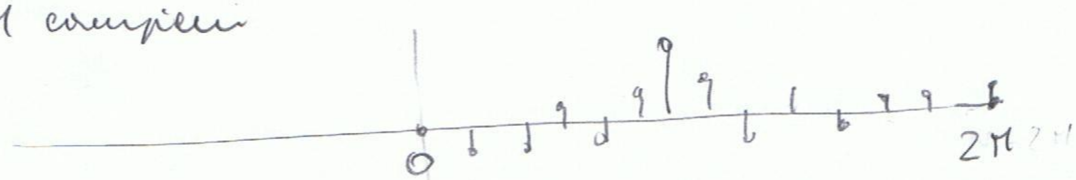
Pertanto la prima operazione per ottenere un filtro realizzabile è il troncamento ad una lunghezza finita.

finestratura



← $N = 2M+1$ campioni →

La seconda è una traslazione temporale verso destra di M campioni



Il filtro risultante è pertanto

$$\boxed{h[n] = h_d[n-M]\, w[n-M] \qquad n = 0, \dots, N-1}$$

dove
$$w[n] = \begin{cases} 1 & -M \le n \le M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \text{(finestra rettangolare)}$$

Dalle note relazioni sulla DTFT, la risposta armonica di $H(\nu)$ diventa

$$H(\nu) = e^{-j2\pi\nu M}\left(H_d(\nu) * W(\nu)\right) = e^{-j2\pi\nu M} \int_{-1/2}^{1/2} H_d(\eta)\, W(\nu-\eta)\, d\eta$$

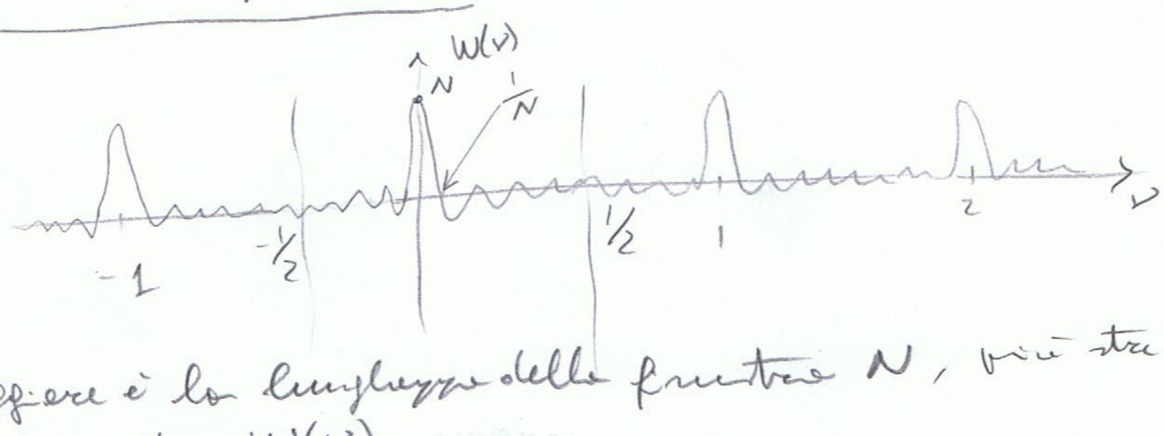
dove $W(\nu)$ è la DTFT della sequenza finestra.

Più in particolare per la finestra rettangolare

$$W(\nu) = \sum_{n=-M}^{M} e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{\substack{m=0 \\ m=n+M}}^{2M} e^{-j2\pi\nu(m-M)} = e^{j2\pi\nu M} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu m}$$

$$= e^{j2\pi\nu M} \frac{1-e^{-j2\pi\nu N}}{1-e^{-j2\pi\nu}} = \frac{\cancel{e^{j2\pi\nu M}}\, e^{-j\pi\nu N}}{\cancel{e^{-j\pi\nu}}} \frac{\left(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}\right)}{\left(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right)} \frac{2j}{2j}$$

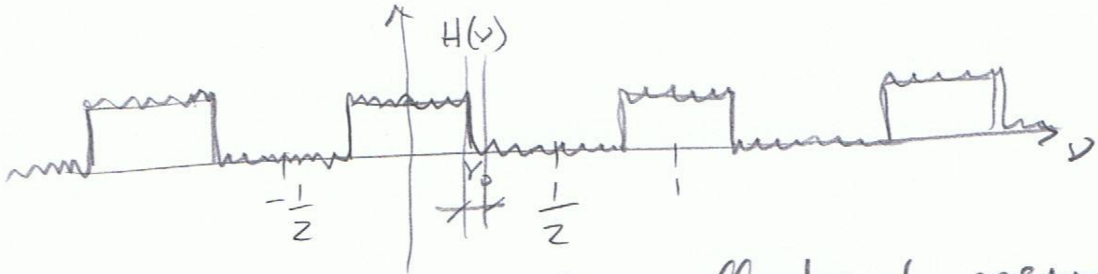
$$\boxed{W(\nu) = \frac{\sin \pi N\nu}{\sin \pi\nu}} \qquad \text{(funzione di Dirichelet)}$$



Maggiore è la lunghezza della finestra N, più stretto è lo spettro $W(\nu)$.

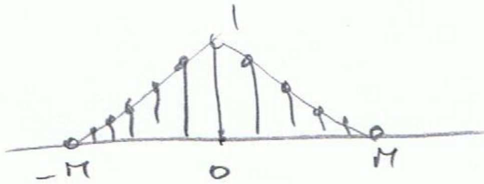
L'effetto del troncamento e della traslazione, sono quindi una "dispersione" della caratteristica ideale $H_d(\nu)$ e l'aggiunta di una fase lineare $-2\pi M\nu$ (non molto importante)

Nell'esempio del filtro passa-basso otteniamo



un "ripple" nella banda passante e nella banda oscura e una banda di transizione non ideale. La banda di transizione sarà tanto più stretta quanto più stretto è il lobo principale di $W(\nu)$. L'effetto è infatti l'effetto di Gibbs tipico del troncamento della serie di Fourier. La larghezza della banda di transizione è circa $\frac{2}{N}$.

Un diverso compromesso tra banda di transizione e attenuazione può essere ottenuto con diverse finestre. Tipiche sequenze finestra sono.

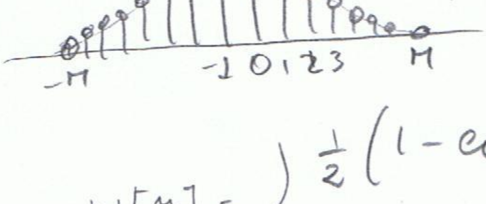


Finestra triangolare (o di Bartlett.)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{n}{M} + 1 & -M \le n \le 0 \\ -\frac{n}{M} + 1 & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Finestra di Hanning

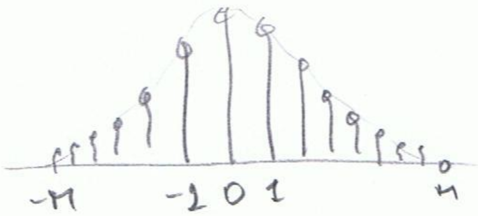
HANNING



$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi(n+M)}{2M}\right) & -M \le n \le M \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Finestra di Hamming

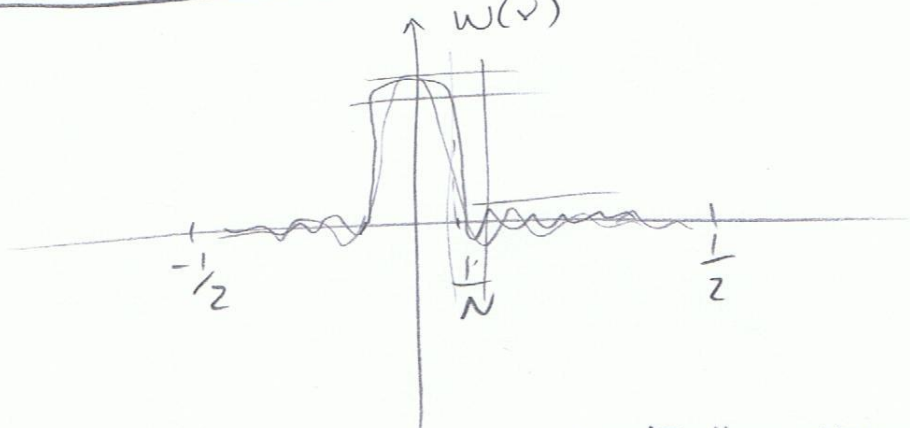
HAMMING.



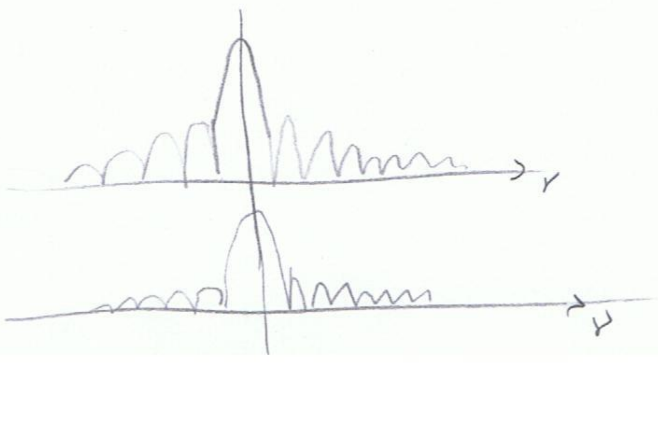
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos \dfrac{2\pi(n+M)}{2M} & -M \le n \le M \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

⋮

Le varie finestre realizzano un diverso compromesso tra larghezza del lobo principale e attenuazione dei lobi laterali

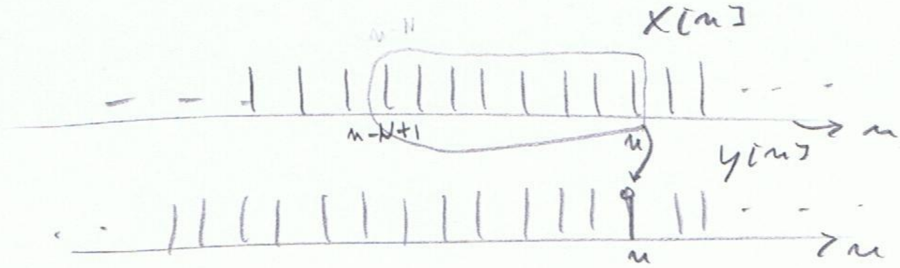


Tipicamente un lobo principale stretto corrisponde a lobi laterali alti (poco attenuati) e viceversa.
Vedi letteratura con grafici in dB. Grafici in dB, ovvero $G(\nu) = 20 \lg \left| \dfrac{W(\nu)}{W(0)} \right|$, mostrano meglio i dettagli dei lobi laterali



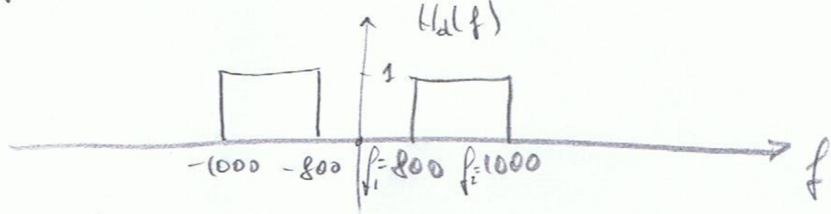
L'uscita del filtro è quindi il risultato del FIR

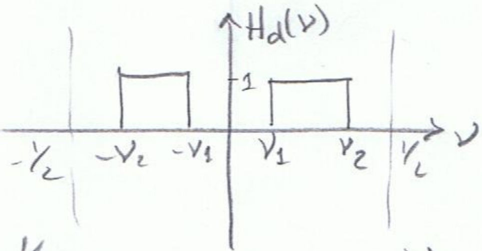
$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\,x[n-k]$$



Ad ogni istante di tempo si valuta una combinazione lineare di N campioni. Esistono algoritmi efficienti per il calcolo dell'uscita quando N è grande, ma ne parleremo in seguito.

ESERCIZIO Progettare un filtro passa-banda per un segnale vocale campionato a 8 KHz, nella banda $[f_1, f_2] = [800, 1000]$ Hz usando la tecnica della finestra.





$$\nu_1 = \frac{800}{8000} = 1/10 \qquad \nu_2 = \frac{1000}{8000} = \frac{1}{8}$$

$$h_d[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H_d(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu = \int_{-\nu_2}^{\nu_2} e^{j2\pi\nu n}\, d\nu - \int_{-\nu_1}^{\nu_1} e^{j2\pi\nu n}\, d\nu$$

$$= \left.\frac{e^{j2\pi\nu n}}{j2\pi n}\right]_{-\nu_2}^{\nu_2} - \left.\frac{e^{j2\pi\nu n}}{j2\pi n}\right]_{-\nu_1}^{\nu_1} = \frac{e^{j2\pi\nu_2 n} - e^{-j2\pi\nu_2 n}}{j2\pi n} - \frac{e^{+j2\pi\nu_1 n} - e^{-j2\pi\nu_1 n}}{j2\pi n}$$

$$h_d[n] = \frac{\sin 2\pi\nu_2 n - \sin 2\pi\nu_1 n}{\pi n}$$; Usando la finestra rettangolare

$$h[n] = \frac{\sin 2\pi\nu_2(n-M) - \sin 2\pi\nu_1(n-M)}{\pi(n-M)}, \quad n = 0, \dots, 2M.$$

FIRs

$$= 2\nu_2 \frac{\sin 2\pi \nu_2 (n-M)}{2\nu_2 \pi (n-M)} - 2\nu_1 \frac{\sin 2\pi \nu_1 (n-M)}{2\nu_1 \pi (n-M)}$$

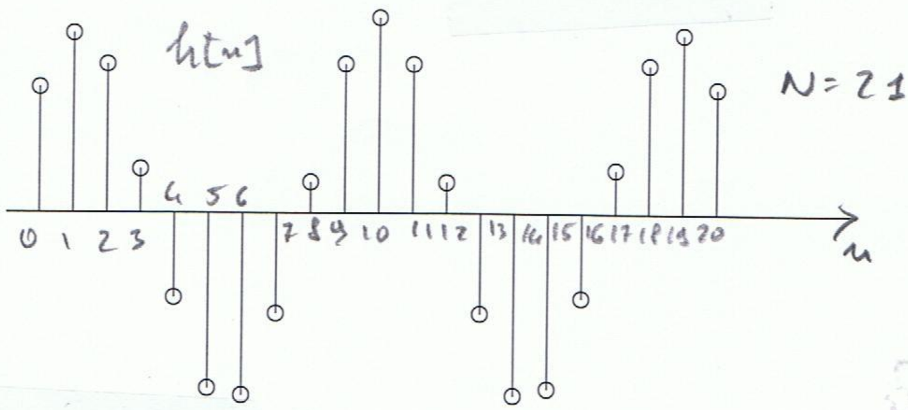
$$= 2\nu_2 \operatorname{sinc} 2\nu_2 (n-M) - 2\nu_1 \operatorname{sinc} 2\nu_1 (n-M)$$

```
%design of an FIR band-pass filter with the window technique

fc=8000; %sampling frequency
f1=800; %lower cutoff
f2=1000; %higher cutoff
nu1=f1/fc;
nu2=f2/fc;
N=201 % window length (odd number)
M=(N-1)/2;
h=[];
for n=0:N-1
    h=[h 2*nu2*sinc(2*nu2*(n-M))-2*nu1*sinc(2*nu1*(n-M))];
end
figure
stem(h)        %plot impulse response
ylabel('impulse response')
xlabel('n')

B=h;
A=[1];
[H W]=freqz(B,A,200); %get frequency response (abscissa in rad)
figure
subplot(2,1,1)
plot(W/(2*pi),abs(H)) %plot magnitude (abscissa in norm freq.)
ylabel('magnitude')
xlabel('nu')
subplot(2,1,2)
plot(W/(2*pi),phase(H)) %plot phase (abscissa in norm freq.)
ylabel('phase')
xlabel('nu')
```

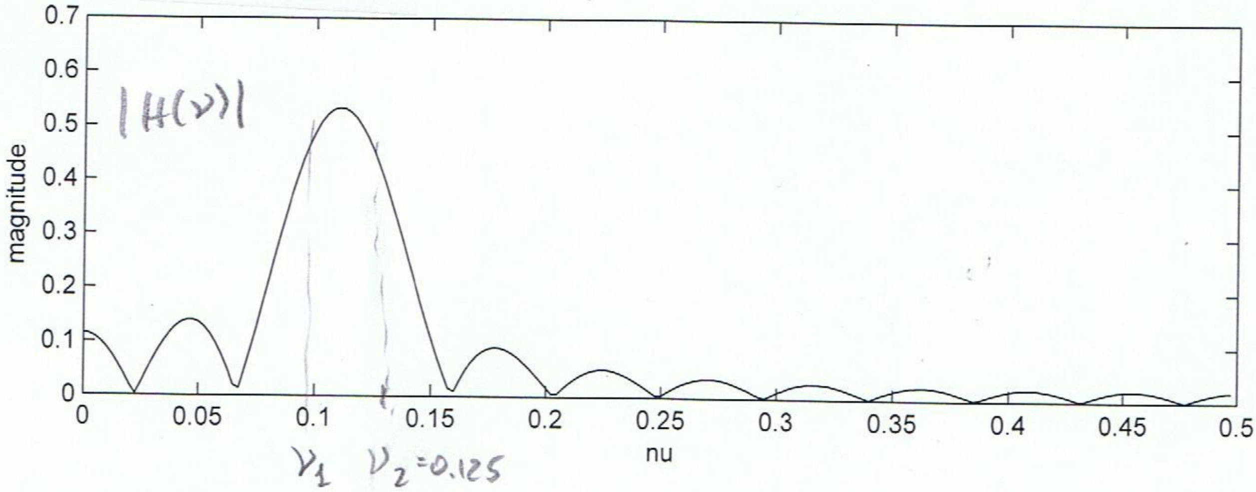
rectangular window

→ h = h .* hamming(N)' (with Hamming window)

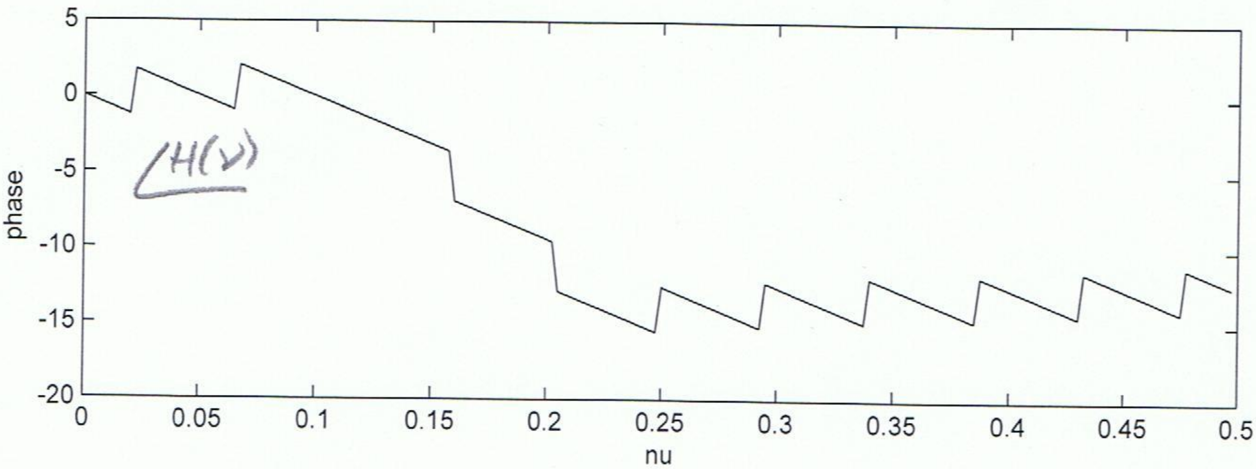
FIR10



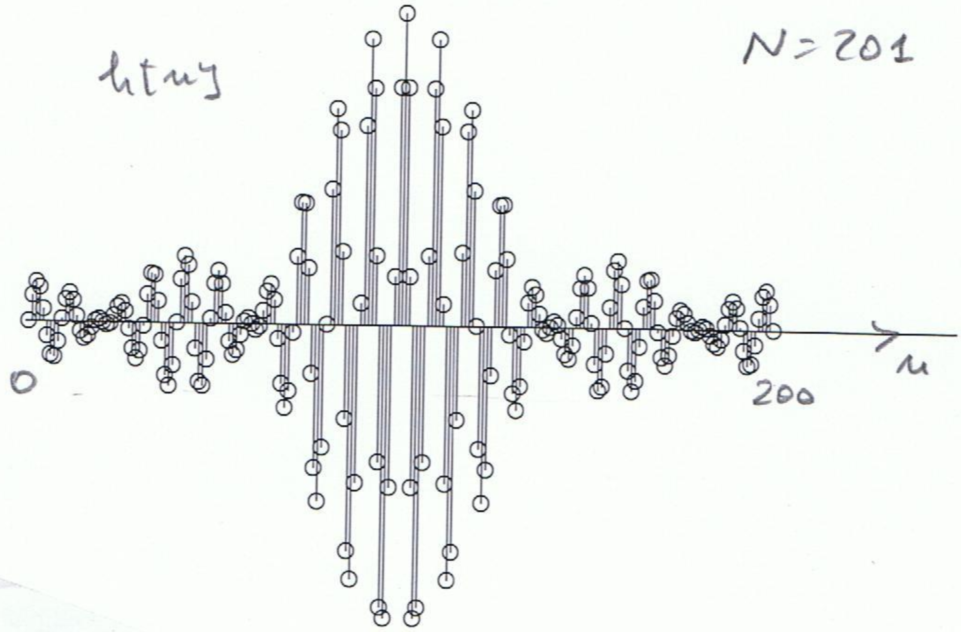
h[n]
N = 21
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
n

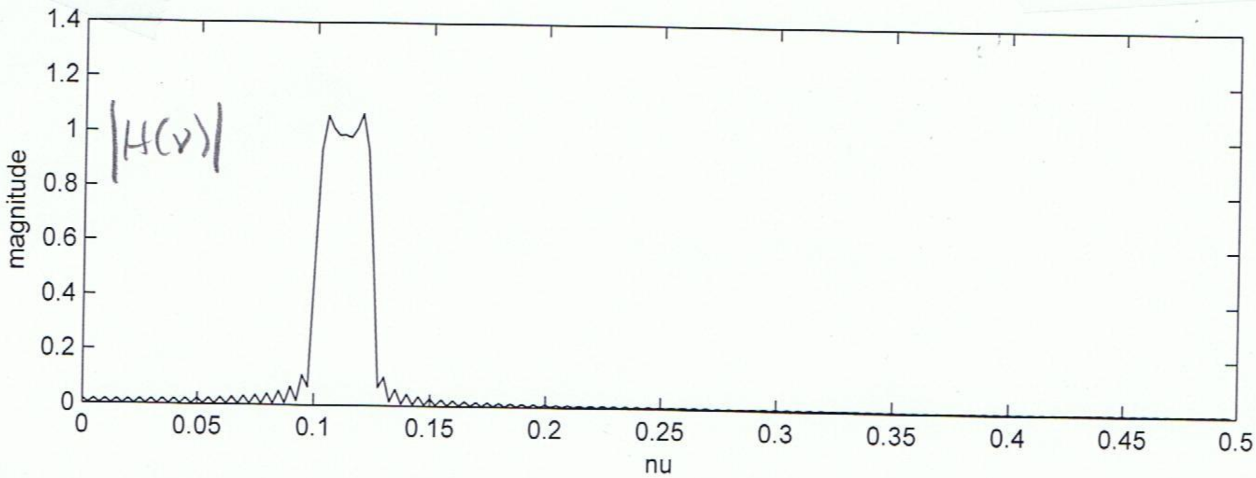


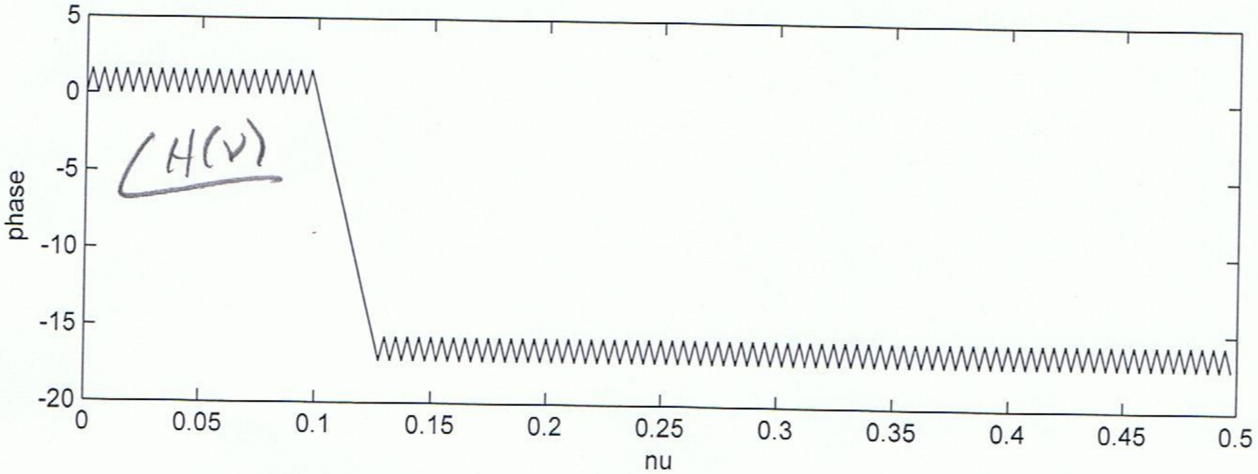
|H(ν)|
magnitude
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5
nu
ν1 ν2=0.125



∠H(ν)
phase
5
0
-5
-10
-15
-20
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5
nu


h[n]
N = 201
0
200
n

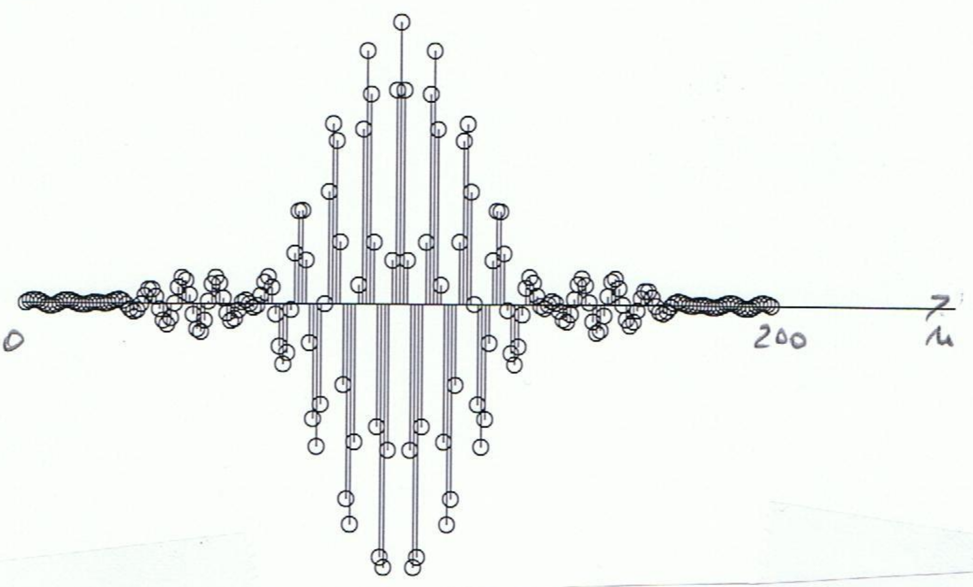

|H(ν)|
magnitude
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
nu

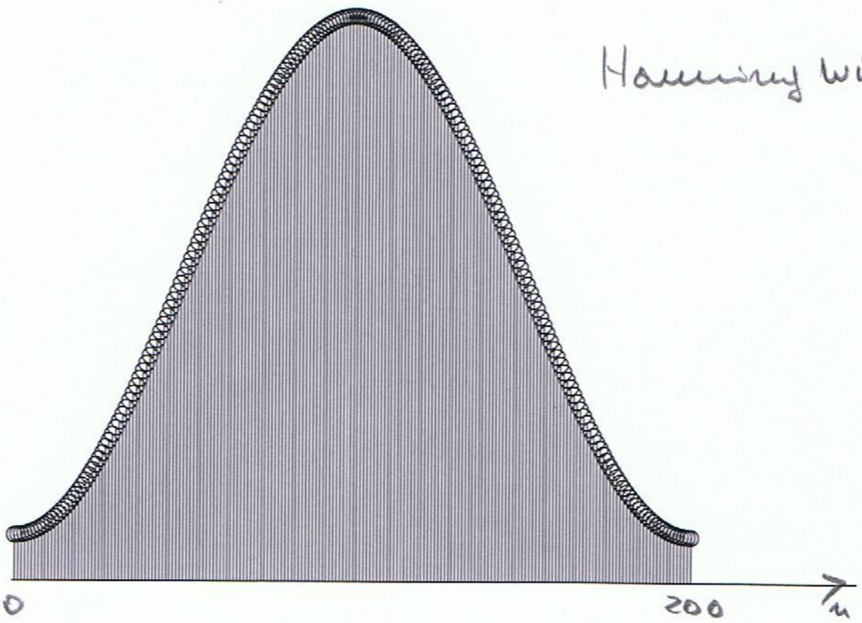

∠H(ν)
phase
5
0
-5
-10
-15
-20
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
nu

Finestriamo la risposta impulsiva con una finestra di Hamming.

$N = 201$

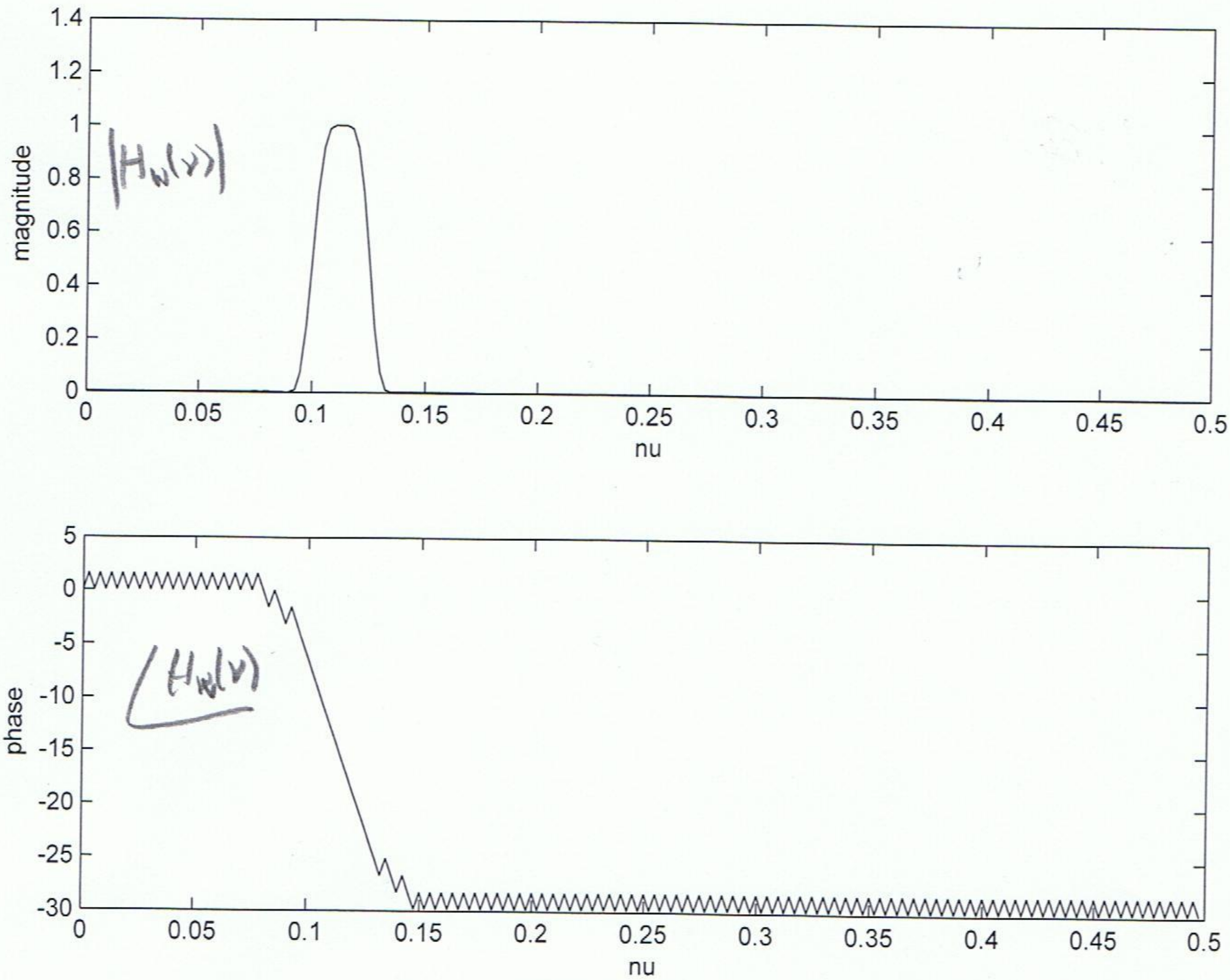
$h_w[n] = h[n]\,w[n]$





Hamming window

FIR.13



1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
magnitude
$|H_w(\nu)|$
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
nu
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
phase
$\angle H_w(\nu)$
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
nu