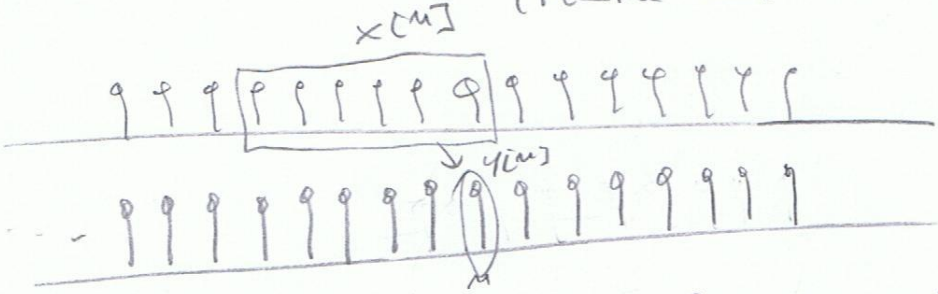
# SISTEMA TEMPO-DISCRETO FIR

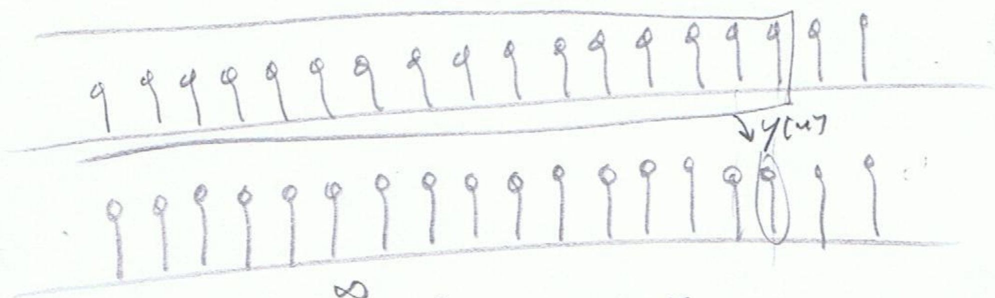
(Finite Impulse response)




$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]\,x[n-k] \quad \text{(ordine } N\text{)}$$

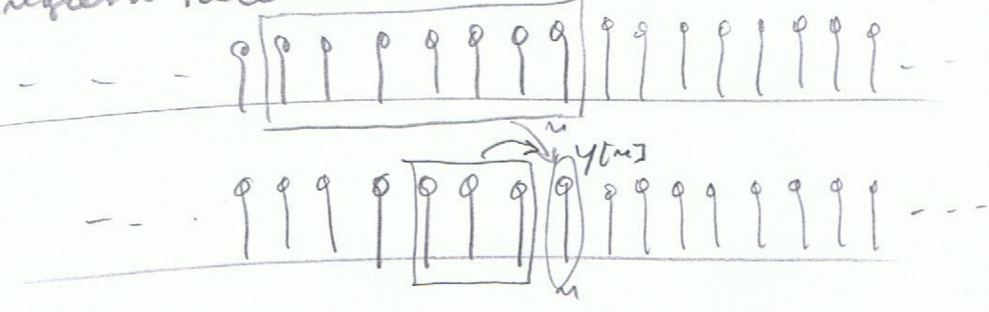
# SISTEMA TEMPO-DISCRETO IIR

(Infinite Impulse Response)




$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

Un sistema IIR può essere ottenuto mantenendo memoria delle uscite precedenti anche il numero di ingressi precedenti nell'eq. alle differenze è finito.




$$y[n] = -\underbrace{\sum_{k=1}^{M} a_k\,y[n-k]}_{\text{parte ricorsiva}} + \sum_{k=0}^{N-1} b_k\,x[n-k]$$

La parte ricorsiva conferisce al sistema una memoria infinita, quindi una risposta impulsiva infinita.

Ovviamente la ricorsione può generare divergenza (instabilità) e i coeff. $a_k$, che danno luogo a poli in $H(z)$ devono essere considerati con attenzione.

Esempio (SOLDI IN TASCA)

$y[n]$ soldi in tasca alla fine del giorno $n$

$x[n]$ soldi spesi (−) o guadagnati (+) il giorno $n$.

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

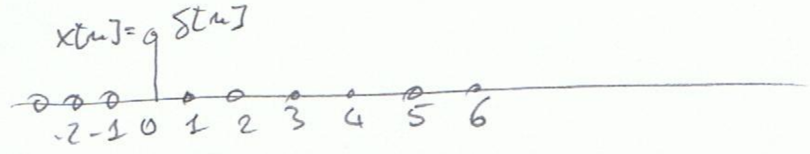
$y[-1]$ capitale iniziale

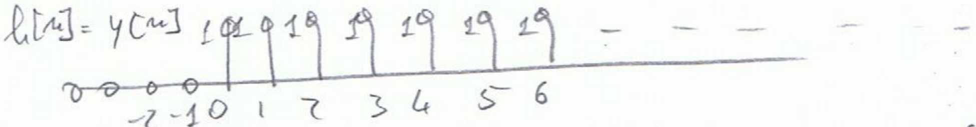
$$y[0] = y[-1] + x[0]$$
$$y[1] = y[0] + x[1] = y[-1] + x[0] + x[1]$$
$$y[2] = y[1] + x[2] = y[-1] + x[0] + x[1] + x[2]$$
$$\vdots$$
$$y[n] = y[-1] + \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

Per $n$ grande la memoria del sistema tende ad essere infinita poiché la risposta è la somma di tutta la storia spesa/guadagno $x[n]$.

Valutiamo la risposta impulsiva $x[n] = \delta[n]$;

$$y[-1] = 0,$$
$$y[0] = 0 + \delta[n] = 1$$
$$y[1] = y[0] + \delta[1] = y[0] = 1$$
$$\vdots$$
$$y[n] = 1$$




Risposta impulsiva $h[n] = u[n]$ infinita (al limite di stabilità)

ESEMPIO (SOLDI IN BANCA CON TASSA PATRIMONIALE)

- $y[n]$ capitale alla fine del giorno
- Al capitale si applica una tassa di $1/1000$ alla fine di ogni giorno. $0 < \left(1 - \frac{1}{1000}\right) = a < 1$
- $x[n]$ guadagno o perdita giornaliero
- $y[-1]$ capitale iniziale

La ricorsione che descrive questo processo è (*)

$$y[n] = a\, y[n-1] + x[n]$$

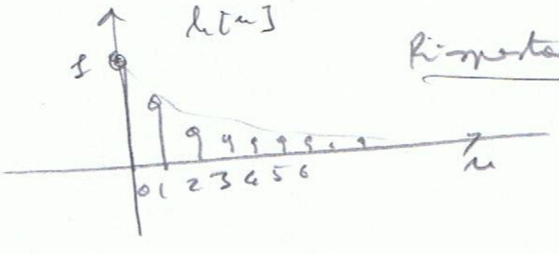
$$y[0] = a\, y[-1] + x[0]$$
$$y[1] = a\, y[0] + x[1] = a\left(a\, y[-1] + x[0]\right) + x[1] = a^2 y[-1] + a\, x[0] + x[1]$$
$$y[2] = a\, y[1] + x[2] = a\left(a^2 y[-1] + a\, x[0] + x[1]\right) + x[2] = a^3 y[-1] + a^2 x[0] + a\, x[1] + x[2]$$

$$y[n] = \underbrace{a^{n+1} y[-1]}_{\to 0 \text{ poiché } a<1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\, x[k]}_{\text{effetto dell'ingresso}}$$

(l'effetto del capitale iniziale diventa progressivamente irrilevante)

Per vedere più chiaro l'effetto di $x[n]$, valutiamo la risposta impulsiva: $x[n] = \delta[n]$, $y[-1] = 0$

$$y[0] = x[0] = 1$$
$$y[1] = a\, y[0] + x[1] = a \cdot 1 + 0$$
$$y[2] = a\, y[1] + x[2] = a^2 + 0$$
$$y[n] = a\, y[n-1] + x[n] = a^n$$

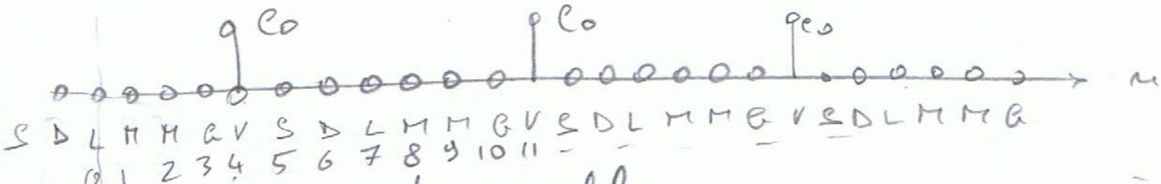



Risposta IIR

---

(*) Si noti che nel modello è previsto un sussidio dell'1/1000 del debito qualora $y[n] < 0$. Un po' irrealistico, ma si tratta di un esercizio.

La risposta impulsiva ci consente di studiare l'andamento per qualunque $x[n]$. Ad esempio, parto da $y[-1]=0$ (zero capitale) e vengo pagato ogni 7 giorni. $C_0$



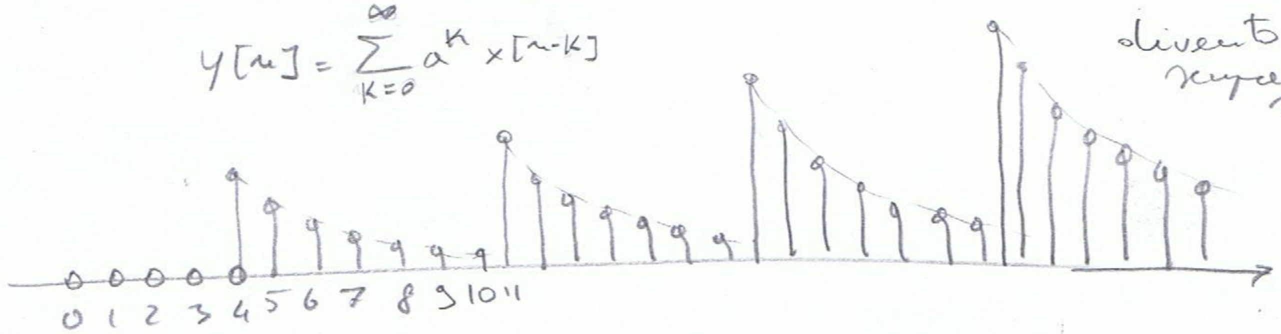

Se non spendo nulla

$$x[n] = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-7m-4]$$

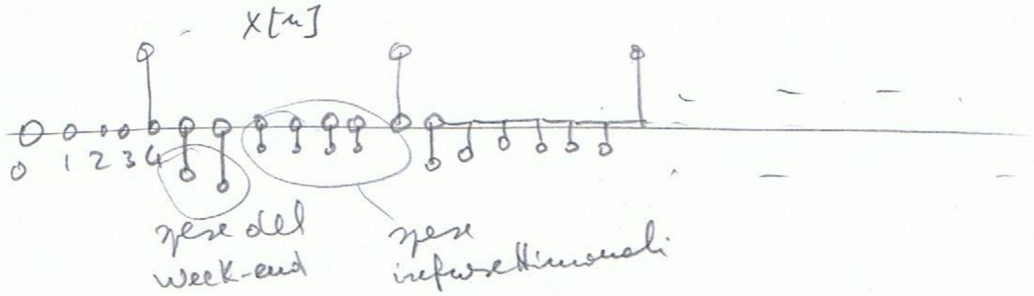
$n = 7m+4$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x[n-k]$$

diventa sempre più ricco.



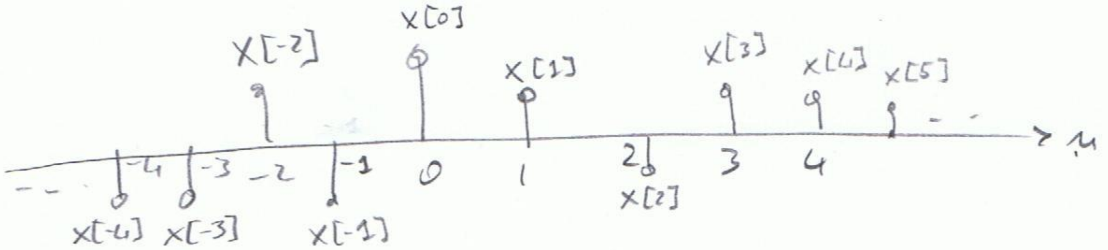

Se invece la sequenza dei guadagni si aggiunge a quella delle spese




La risposta è più complessa ma ben descritta dalla convoluzione.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x[n-k]$$

## RICHIAMI SULLA Z-TRASFORMATA




Le proprietà delle sequenze e la loro manipolazione può spesso essere facilitata associando ad ogni sequenza un polinomio nella variabile complessa z

$$\dots + x[-2]\, z^{2} + x[-1]\, z^{1} + x[0] + x[1]\, z^{-1} + x[2]\, z^{-2} + \dots$$

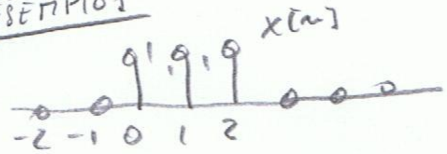
Le potenze negative sono associate ai campioni per $n > 0$ e quelle positive ai campioni per $n < 0$. Pertanto la potenza $z^{-n}$ assume il significato formale di un operatore di traslazione temporale. Si definisce <u>Z-trasformata</u> di una sequenza $x[n]$, la funzione complessa di variabile complessa

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

La regione del piano z per cui tale funzione è finita è detta <u>ROC</u> (<u>Region of Convergence</u>)

Prima di parlare di proprietà generali presentiamo qualche esempio

<u>ESEMPIO 1</u>

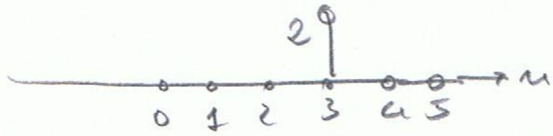



$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$X(z)$ esiste per tutti i valori eccetto che per $z=0$ dove diverge

$$\text{ROC: } z \in \mathbb{C} \sim \{z=0\}$$

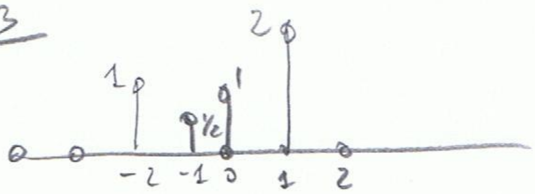
## ESEMPIO 2




$x[n] = 2\delta[n-3]$ $\qquad X(z) = 2\,z^{-3}$

ROC: $z \in \mathbb{C} \sim \{z=0\}$

## ESEMPIO 3

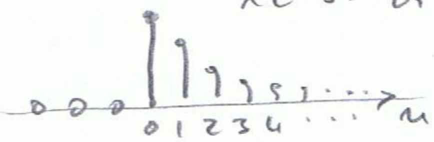



$X(z) = z^{2} + \frac{1}{2} z^{1} + 1 + 2z^{-1}$

ROC: $z \in \mathbb{C} \sim \{z=0\} \sim \{z=\infty\}$

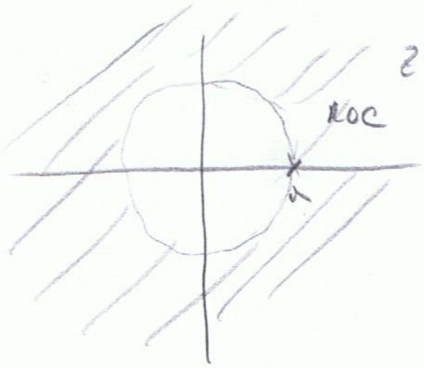
## ESEMPIO 4

$x[n] = a^{n} u[n] \qquad 0 < a < 1$



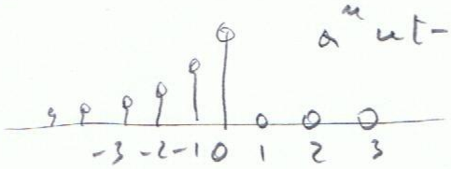

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^{n} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad \text{se } |a z^{-1}| < 1$$

$$\begin{cases} X(z) = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}} \\ \text{ROC}: |z| > |a| \end{cases}$$



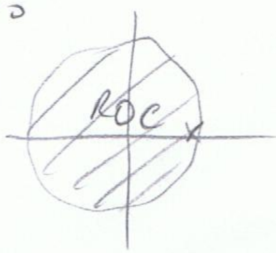

## ESEMPIO 5

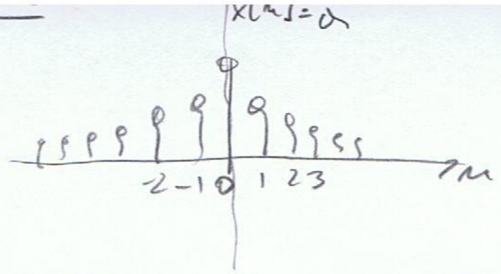
$a^{n} u[-n] \qquad |a| > 1$




$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} z^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{1 - a^{-1} z} \quad \text{se } |a^{-1} z| < 1 \qquad |z| < |a|$$






$0 < a < 1$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{|n|} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n}$$

$m = -n$

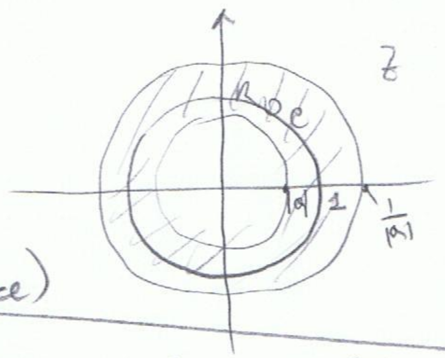
$$= \sum_{m=1}^{\infty} a^{+m} z^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n}$$

$$= -a^{0} z^{0} + \sum_{m=0}^{\infty} a^{m} z^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n}$$

$$= -1 + \frac{1}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$|az| < 1$ $\qquad$ $|az^{-1}| < 1$

$|z| < \frac{1}{|a|}$ $\qquad$ $|z| > |a|$




$$\begin{cases} X(z) = -1 + \frac{1}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} \\ \text{ROC: } |a| < z < \frac{1}{|a|} \quad (\text{regione anulare}) \end{cases}$$

L'ultimo esempio è emblematico poiché mostra come per una sequenza bilatera (noncausale) la ROC sia sempre una regione anulare.

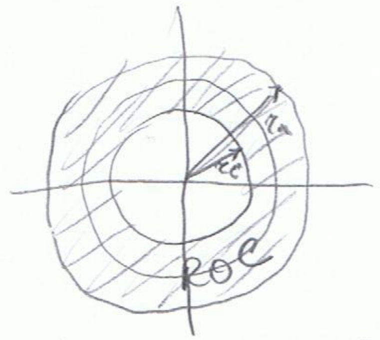
In generale separando i contributi della parte causale e anticausale di $x[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= -x[0] + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x[-n] z^{n}}_{\text{parte anticausale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}}_{\text{parte causale}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[-n] z^{n}| \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |x[n] z^{-n}|$$

La parte anticausale converge se c'è un $r_a$ abbastanza piccolo per cui in $|z| < r_a$ la serie è assolutamente sommabile.
La parte causale converge se c'è un $r_c$ abbastanza grande per cui in $|z| > r_c$ la serie è assolutamente sommabile.




La regione di convergenza è sempre una regione anulare se c'è intersezione, ovvero se $r_a > r_c$. Viceversa se $r_a < r_c$ non c'è intersezione e la Z-trasformata non esiste.

---

Alcune proprietà della Z-trasformata.

- Linearità:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$$
$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$$
$$c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] \xleftrightarrow{Z} c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z)$$

- Traslazione temporale

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

Prova

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} X(z) \quad \square$$
$$m = n - n_0$$

- Trasformata inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$$C \subset ROC$$

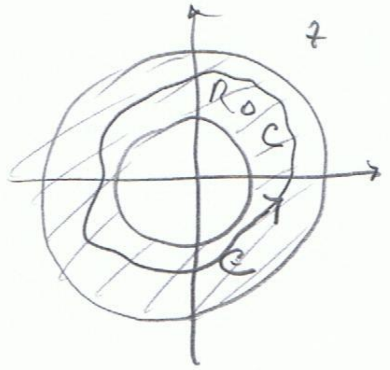
Prova:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, z^{-k}$$

$$z^{n-1} X(z) = z^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, z^{-k}$$

$$z^{n-1} X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, z^{n-1-k}$$

Integriamo $X(z)$ su un contorno chiuso $C$ contenuto all'interno della ROC di $C$ e che include l'origine.




$$\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, z^{n-1-k} dz$$

Poiché la serie converge su C, possiamo scambiare la sommatoria con l'ordine di integrazione.

$$\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \oint_C z^{n-1-k} dz$$

Dal teorema di Cauchy, $\frac{1}{2\pi j}\oint z^{n-1-k} dz = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases}$

Da cui

$$\oint_C X(z)\, z^{n-1} dz = x[n] \qquad \blacksquare$$

Normalmente per passare da $X(z)$ a $x[n]$ useremo l'integrazione complessa. La tecnica più comune è scomporre $X(z)$ in sovrapposizione di trasformate note di cui è nota la antitrasformata.

---

- Convoluzione

$$z[n] = (x * y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[n-k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Z(z) = X(z)\,Y(z)$$

Prova

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[n-k]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, y[n-k]\, z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k]\, z^{-n}}_{z^{-k} Y(z)}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, z^{-k}}\, Y(z) = X(z)\,Y(z).$$

# Sistemi lineari descritti dalla Z-trasformata

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad ; \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n} = \dots h[-2]z^{2} + h[-1]z + h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots$$

(non causale)

Se $h[n]$ è causale ($=0$ $n<0$)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\, z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots$$

Se $h[n]$ è anticausale ($=0$ $n>0$)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} h[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h[-n]\, z^{n} = \dots + h[-2]z^{2} + h[-1]z + h[0]$$

$h[n]$ FIR causale:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + \dots + h[N-1]z^{-N+1}$$

$$= z^{-N+1}\left(h[0]z^{N-1} + h[1]z^{N-2} + \dots + h[N-2]z + h[N-1]\right)$$

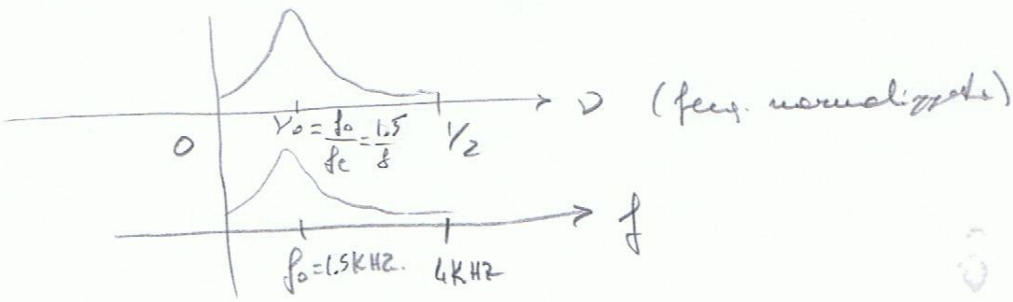
Per $N > 1$ ci sono $N-1$ poli nell'origine ($z=0$)
e $N-1$ zeri (radici del polinomio).

- Forme canoniche
  - Rapporto tra polinomi in $z^{-1}$
  - Rappresentazione zeri-poli.
  - Rappresentazione zeri-poli con zeri e poli reali o complessi coniugati.

Dalle fotocopie del Proakis, Manolakis.

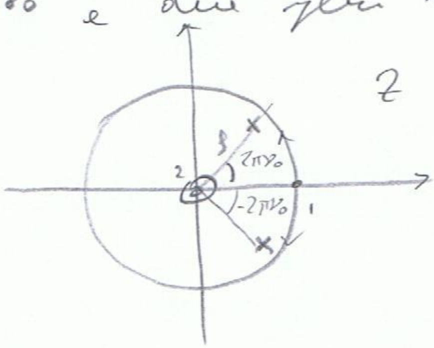
# Progetto di un filtro numerico per piazzamento zeri-poli

ES. F. Campionamento $f_c = 8\,KHz$, Passa-banda centrato su $1.5\,KHz$.




Piazziamo una coppia di poli complessi coniugati a

$p_{12} = \rho e^{\pm j2\pi\nu_0}$ e due zeri nell'origine.




$$\begin{cases} \nu_0 = \frac{1.5}{8} \\ \rho = 0.95 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-\rho e^{j2\pi\nu_0})(z-\rho e^{-j2\pi\nu_0})} = \frac{z^2}{z^2 - 2\rho\left(\frac{e^{j2\pi\nu_0}+e^{-j2\pi\nu_0}}{2}\right)z + \rho^2}$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, z + \rho^2} = \frac{1}{1 - 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, z^{-1} + \rho^2 z^{-1}}$$

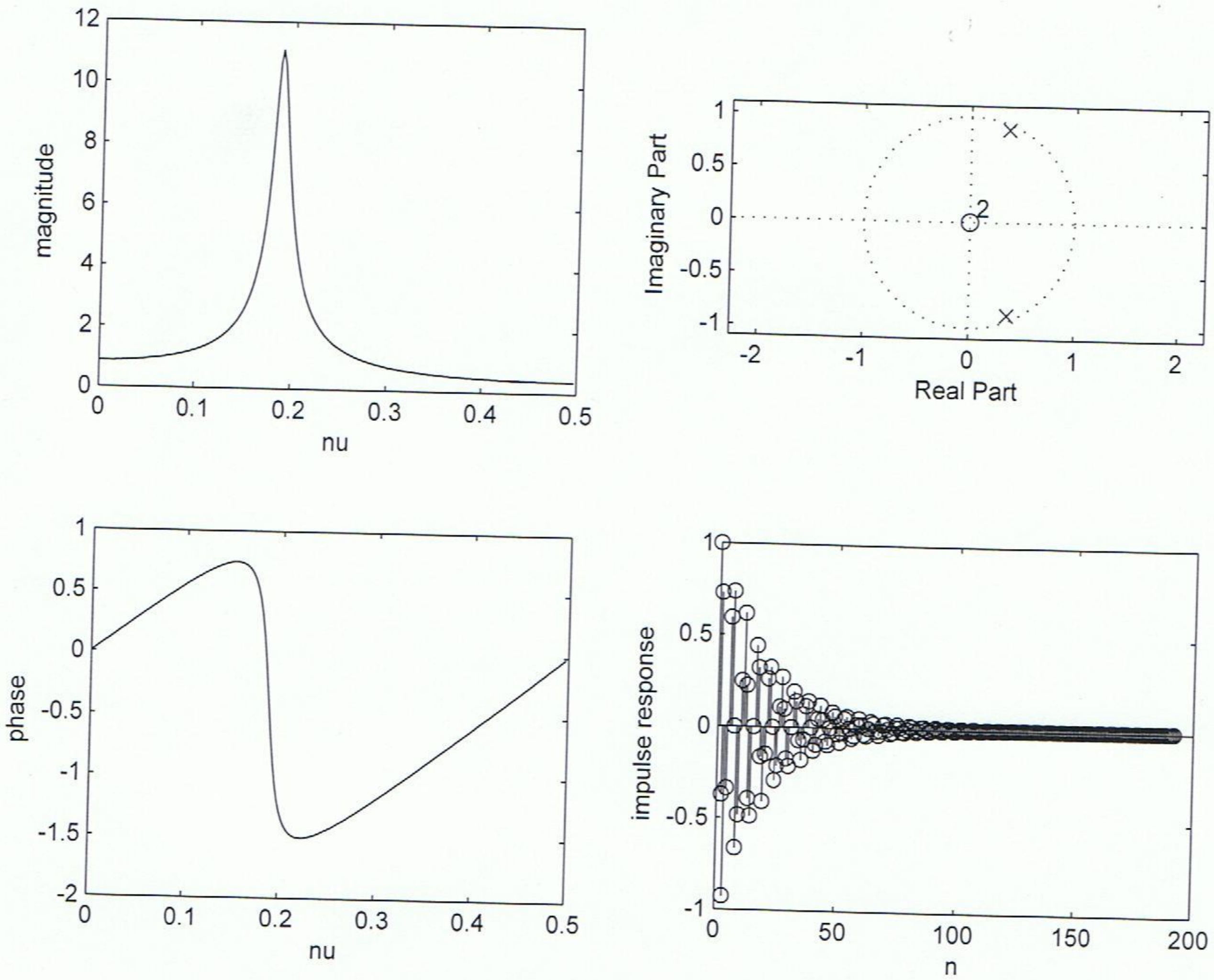
L'eq. alle differenze del filtro è

$$y[n] = 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, y[n-1] - \rho^2 y[n-2] + x[n]$$

Un programma in MATLAB traccia il grafico di modulo e fase di $H(\nu) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi\nu}}$, la risposta impulsiva $h[n] = Z^{-1}[H(z)]$ e il diagramma poli-zeri nel piano z.

Senza nome

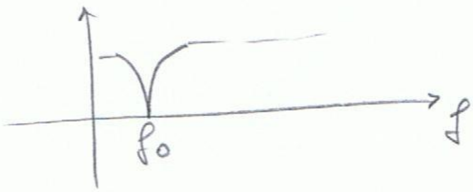
```
fc=8000; %sampling frequency
f0=1500; % center frequency
nu0=f0/fc ; %center frequency (normalized)
rho=0.95;
A=[1 -2*rho*cos(2*pi*nu0) rho^2];
B=[1];
[H W]=freqz(B,A,200); %get frequency response (abscissa in rad)
[h t]=impz(B,A);  %get impulse response
subplot(2,2,1)
plot(W/(2*pi),abs(H)) %plot magnitude (abscissa in norm freq.)
ylabel('magnitude')
xlabel('nu')
subplot(2,2,3)
plot(W/(2*pi),phase(H)) %plot phase (abscissa in norm freq.)
ylabel('phase')
xlabel('nu')
subplot(2,2,2)
zplane(B,A)       %compute and plot z plane
subplot(2,2,4)
stem(t,h)        %plot impulse response
ylabel('impulse response')
xlabel('n')
```

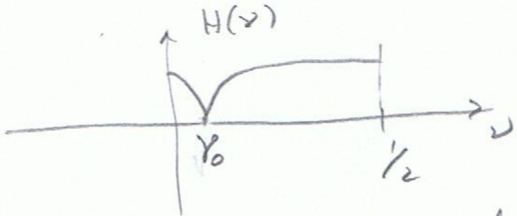


ESEMPIO Filtro a spillo: un filtro che elimina una frequenza specifica.

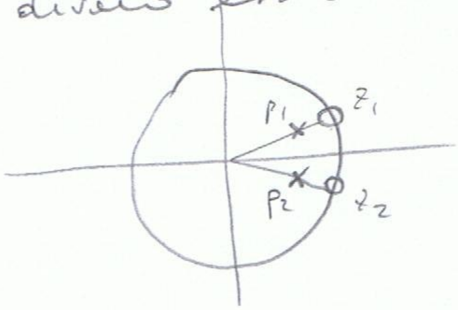
Es. $f_c = 10KHz$ $\quad f_0 = 500Hz$

$$\nu_0 = \frac{f_0}{f_c} = \frac{500}{10000} = 0.05$$




Mettiamo uno zero nel cerchio unitario a $e^{j2\pi\nu_0}$ e un polo all'interno per tirare su la risposta attorno a $\nu_0$. Poli e zeri devono essere in coppie per avere una risposta reale.




$$p_1 = \rho e^{+j2\pi\nu_0}$$
$$p_2 = p_1^* = \rho e^{-j2\pi\nu_0}$$
$$z_1 = e^{j2\pi\nu_0}$$
$$z_2 = z_1^* = e^{-j2\pi\nu_0}$$

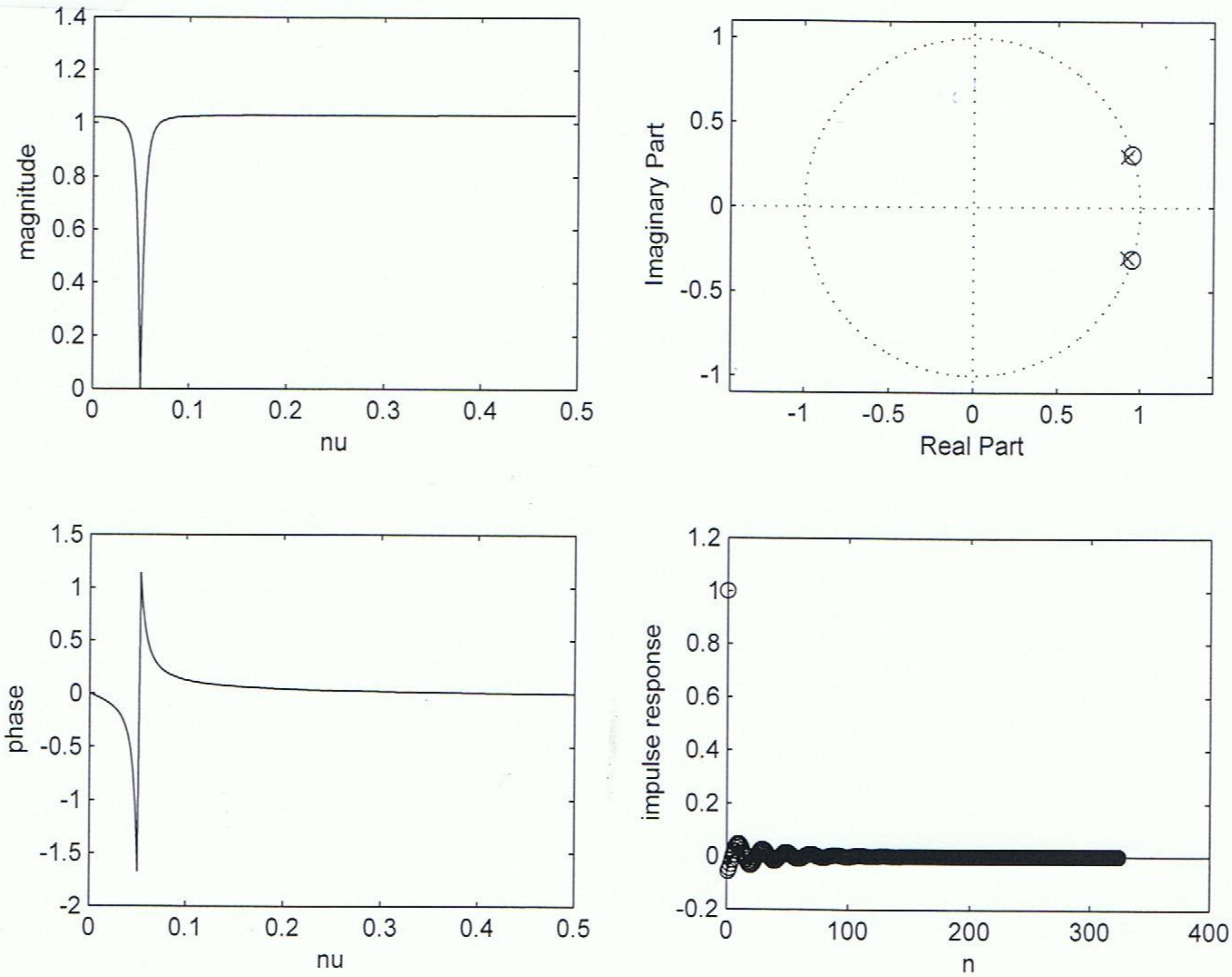
$$H(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{(z-e^{j2\pi\nu_0})(z-e^{-j2\pi\nu_0})}{(z-\rho e^{j2\pi\nu_0})(z-\rho e^{-j2\pi\nu_0})}$$

$$= \frac{z^2 - 2\cos 2\pi\nu_0\, z + 1}{z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, z + \rho^2} = \frac{1 - 2\cos 2\pi\nu_0\, z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$y[n] = 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, y[n-1] - \rho^2 y[n-2] + x[n] - 2\cos 2\pi\nu_0\, x[n-1] + x[n-2]$$

Senza nome

```
fc=10000; %sampling frequency
f0=500; % center frequency
nu0=f0/fc ; %center frequency (normalized)
rho=0.97;
A=[1 -2*rho*cos(2*pi*nu0) rho^2];
B=[1 -2*cos(2*pi*nu0) 1];
[H W]=freqz(B,A,200); %get frequency response (abscissa in rad)
[h t]=impz(B,A);  %get impulse response
subplot(2,2,1)
plot(W/(2*pi),abs(H)) %plot magnitude (abscissa in norm freq.)
ylabel('magnitude')
xlabel('nu')
subplot(2,2,3)
plot(W/(2*pi),phase(H)) %plot phase (abscissa in norm freq.)
ylabel('phase')
xlabel('nu')
subplot(2,2,2)
zplane(B,A)       %compute and plot z plane
subplot(2,2,4)
stem(t,h)        %plot impulse response
ylabel('impulse response')
xlabel('n')
```

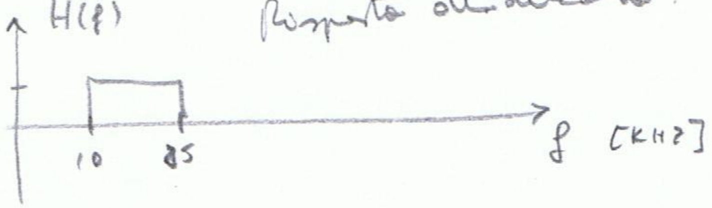


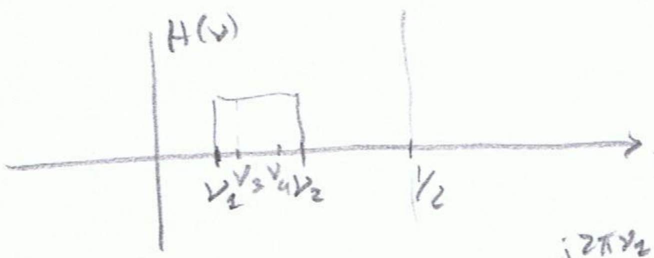
## ESEMPIO PASSA-BANDA

$f_c = 100\ \text{KHz}$

$f_1 = 10\ \text{KHz} \quad f_2 = 25\ \text{KHz}$

Risposta desiderata.

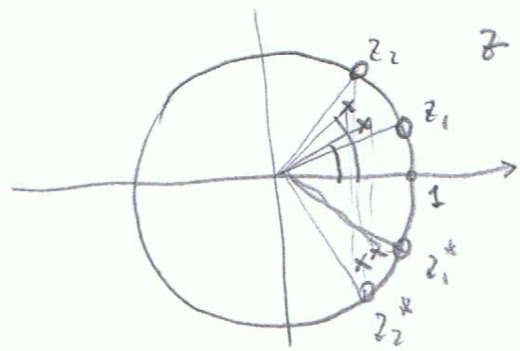



$$\nu_1 = \frac{10000}{100000} = 0.1$$

$$\nu_2 = \frac{25000}{100000} = 0.25$$

Piazziamo due zeri a $z_1 = e^{j2\pi\nu_1}$ e $z_2 = e^{j2\pi\nu_2}$ con i loro complessi coniugati, e due poli all'interno del cerchio per tirare su la risposta.




$$\begin{cases} z_1 = e^{j2\pi\nu_1} \\ z_1^* = e^{-j2\pi\nu_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = e^{j2\pi\nu_2} \\ z_2^* = e^{-j2\pi\nu_2} \end{cases}$$

$$p_1 = \rho e^{j2\pi\nu_3} \qquad p_1^* = \rho e^{-j2\pi\nu_3}$$

$$p_2 = \rho e^{j2\pi\nu_4} \qquad p_2^* = \rho e^{-j2\pi\nu_4}$$

$$H(z) = \frac{(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_1 z + 1)(z^2 - 2\cos 2\pi\nu_2 z + 1)}{(z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_3 z + 1)(z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_4 z + 1)}$$

$$= \frac{(1 - 2\cos 2\pi\nu_1 z^{-1} + z^{-2})(1 - 2\cos 2\pi\nu_2 z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2\rho\cos 2\pi\nu_3 z^{-1} + z^{-2})(1 - 2\rho\cos 2\pi\nu_3 z^{-1} + z^{-2})}$$

NOTA:
Per ottenere i coefficienti dei polinomi prodotto basta effettuare la convoluzione discreta

delle sequenze che rappresentano i polinomi:

Ad esempio:

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}\right)\left(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}\right)$$

$$= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4}$$

dove

$$c_i = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \beta_{i-k} \qquad i = 0, \dots, 4$$

(convoluzione lineare)

In generale

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-N+1}\right)\left(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{M-1} z^{-M+1}\right)$$

$$= \gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \dots + \gamma_{N+M} z^{-N-M+2}$$

Dove

$$\gamma_m = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \beta_{m-k} \qquad m = 0, \dots, N+M$$

Interessante anche l'interpretazione grafica

Senza nome

```
fc=100000; %sampling frequency
f1=10000;
f2=25000;
f3=13000;
f4=22000;
nu1=f1/fc;
nu2=f2/fc;
nu3=f3/fc;
nu4=f4/fc;
rho=0.90;
B=conv([1 -2*cos(2*pi*nu1) 1],[1 -2*cos(2*pi*nu2) 1]);
A=conv([1 -2*rho*cos(2*pi*nu3) rho^2],[1 -2*rho*cos(2*pi*nu4) rho^2]);
[H W]=freqz(B,A,200); %get frequency response (abscissa in rad)
[h t]=impz(B,A);  %get impulse response
subplot(2,2,1)
plot(W/(2*pi),abs(H)) %plot magnitude (abscissa in norm freq.)
ylabel('magnitude')
xlabel('nu')
subplot(2,2,3)
plot(W/(2*pi),phase(H)) %plot phase (abscissa in norm freq.)
ylabel('phase')
xlabel('nu')
subplot(2,2,2)
zplane(B,A)       %compute and plot z plane
subplot(2,2,4)
stem(t,h)       %plot impulse response
ylabel('impulse response')
xlabel('n')
```