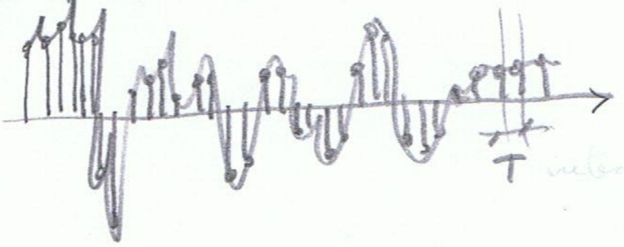
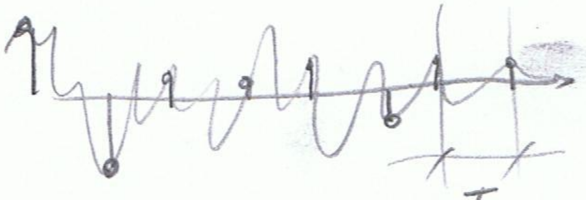
APPROCCIO INTUITIVO AL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Dato un segnale tempo-continuo è intuitivo che il passo di campionamento debba essere scelto a seconda della variabilità del segnale.



segnale ben campionato



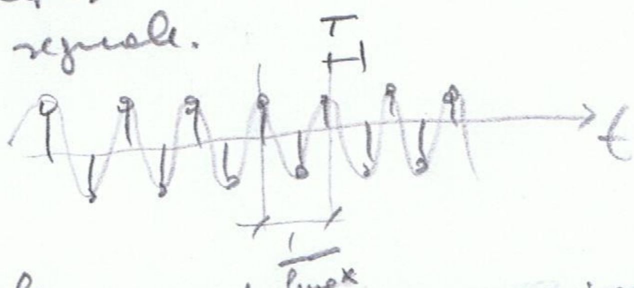
segnale mal campionato

$f_c = \frac{1}{T}$ frequenza di campionamento [Hz] o [campioni/sec]

T intervallo di campionamento [sec]

È intuitivo che i campioni devono catturare tutta la variabilità del segnale e non lasciare che tra un campione e il successivo il segnale originario sia troppo variabile. In tal caso l'informazione sulla forma d'onda originale sarebbe irrimediabilmente persa.

Per arrivare ad una conclusione quantitativa sulla minima frequenza di campionamento che conserva l'informazione nel segnale, assumiamo che il nostro segnale sia la sovrapposizione di numerose sinusoidi. Sia f_{max} la sinusoide a frequenza massima che compone lo spettro armonico del segnale.

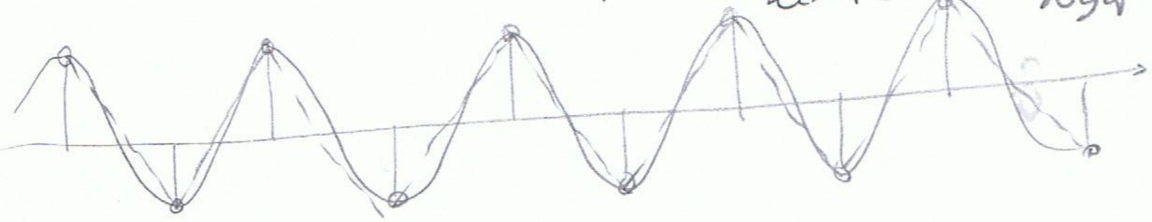


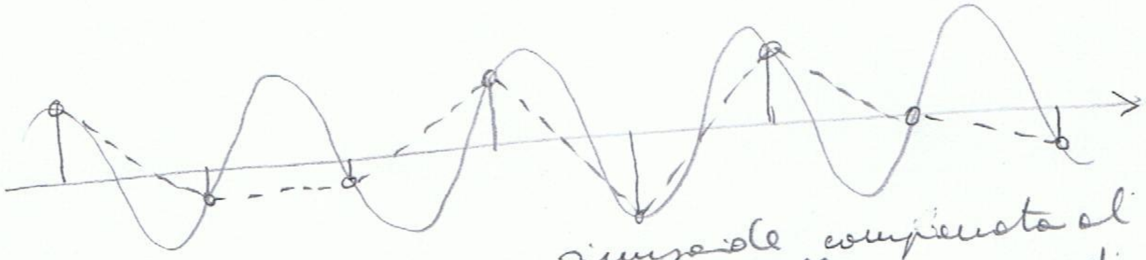
Se assumiamo per tale componente 2 campioni come il minimo oltre il quale il comportamento oscillante verrebbe perso, otteniamo la condizione

$$2T < \frac{1}{f_{max}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{T} > 2 f_{max}}$$

Questa condizione è di fatto la condizione del teorema del campionamento, nota anche come <u>condizione di Nyquist</u>.

sinusoide campionata al limite della cond. di Nyquist.





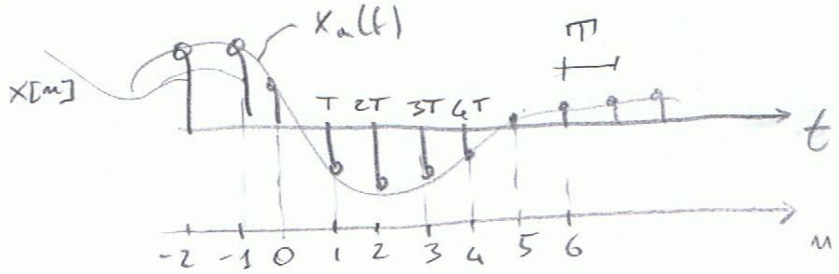
sinusoide campionata al di sotto della frequenza di Nyquist. La sua ricostruzione dai campioni sarebbe errata, ovvero effetto di "aliasing".

Nella figura sono mostrate delle "rozze" ricostruzioni basate su interpolazioni lineari. Si vede come nel caso di sottocampionamento la forma del segnale si sia completamente persa.

Nelle prossime pagine analizzeremo il problema più in dettaglio usando la trasformata di Fourier.

RELAZIONI TRA TEMPO-CONTINUO E TEMPO DISCRETO

Supponiamo che $x[n]$ sia ottenuto dal campionamento uniforme di un segnale $x_a(t)$



T intervallo di campionamento [sec]

$\frac{1}{T}$ frequenza di campionamento [campioni/sec] [Hz]

$$x[n] = x_a(nT) \qquad \forall n$$

Qual'è la relazione tra la DTFT di $x[n]$ e la trasf. di Fourier tempo-continuo $X_a(f)$? Vediamo:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\, e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f)\, e^{j2\pi f nT}\, df \; e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n(\nu - fT)}}_{\text{dalla formula di Poisson}} df$$

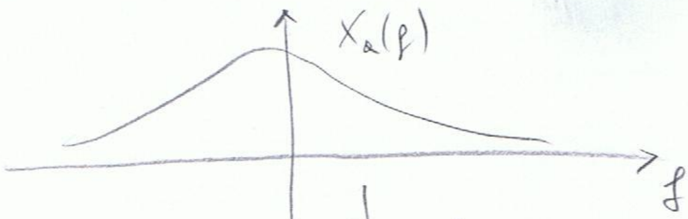
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - fT - n)\, df$$

$$\alpha = fT$$

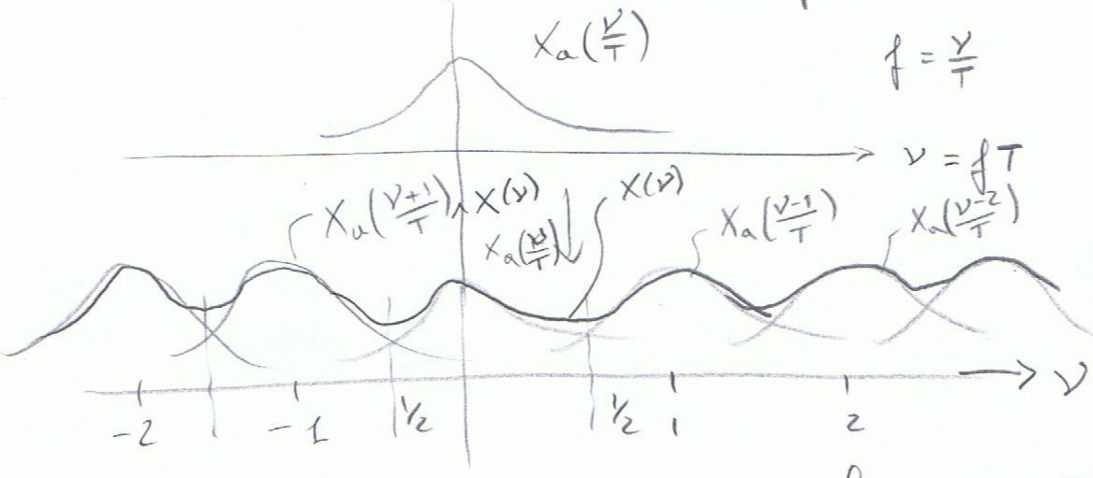
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\alpha}{T}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \alpha - n)\, \frac{d\alpha}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int X_a\left(\frac{\alpha}{T}\right) \delta(\nu - n - \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\nu - n}{T}\right)$$

$$\boxed{X(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\frac{\nu - n}{T}\right)}$$

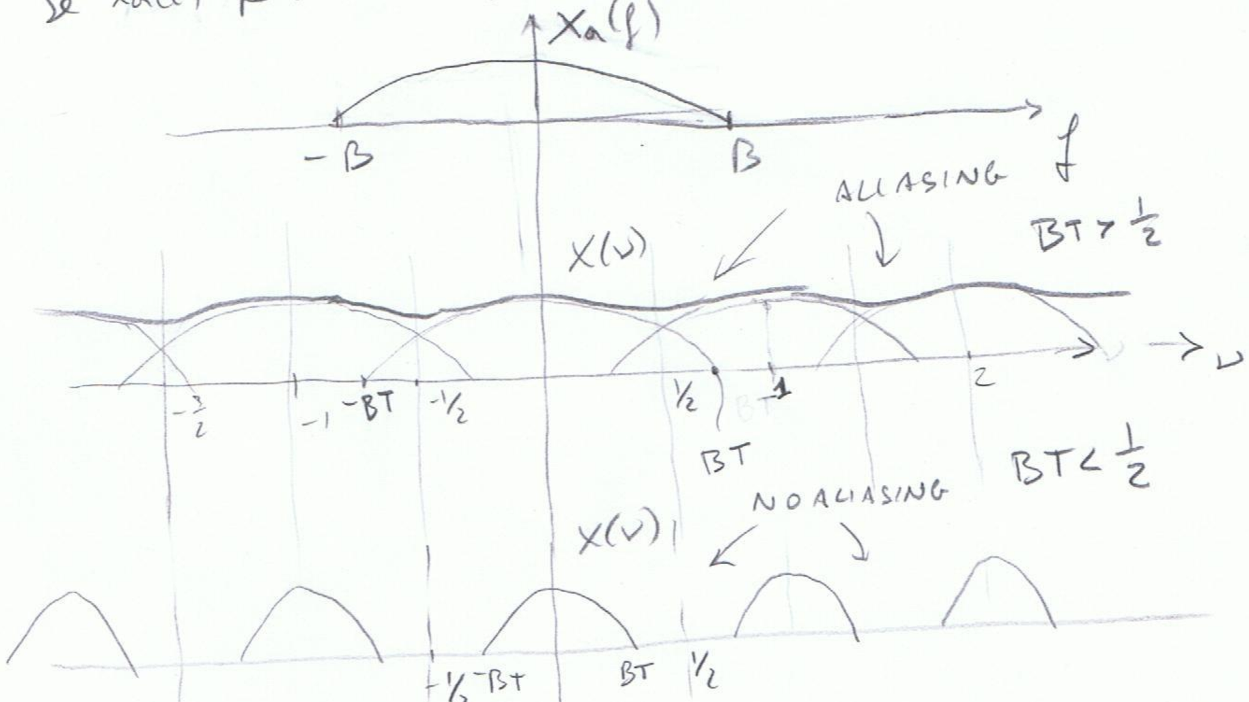


contrazione o espansione dell'asse delle frequenze.



$X(\nu)$ = versione normalizzata in frequenza e periodicizzata di $X_a(f)$.

Se $x_a(t)$ fosse una funzione limitata in banda

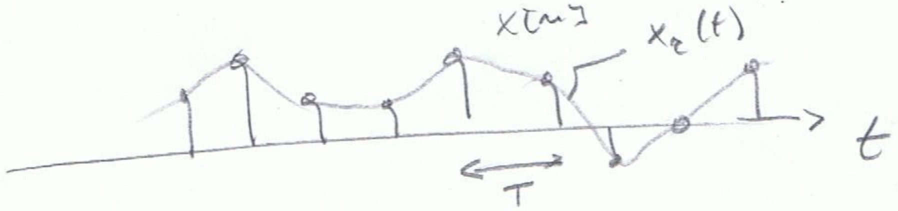


Se vale la condizione di NYQUIST : $BT < \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{T} > 2B}$,
la forma della trasformata di Fourier si conserva nel dominio discreto.
Funzioni limitate in banda a rigore, sono rare, ma

quando è ragionevole assumere che non ci siano componenti spettrali oltre una certa frequenza massima $f_{MAX} = B$, si può campionare ottenendo essenzialmente una sequenza alias-free con $\frac{1}{T} > 2 f_{MAX}$.

RICOSTRUZIONE

Ci siamo occupati del passaggio dal tempo-continuo al tempo-discreto, ma come operare nella direzione opposta? Ovvero come ottenere un segnale tempo-continuo $x_r(t)$ da una sequenza $x[n]$?



Molte sono le tecniche di passaggio da valori campionati alla funzione continua. Si pensi al classico problema dell'interpolazione in cui per ottenere valori intermedi in una tabella si "interpolano" valori adiacenti.

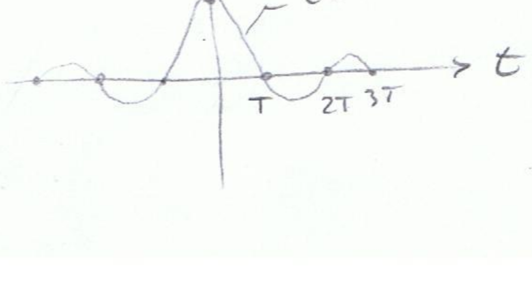
Poniamo sul segnale ricostruito il "vincolo di interpolazione", ovvero che

$$x_r(nT) = x[n] \quad \forall n .$$

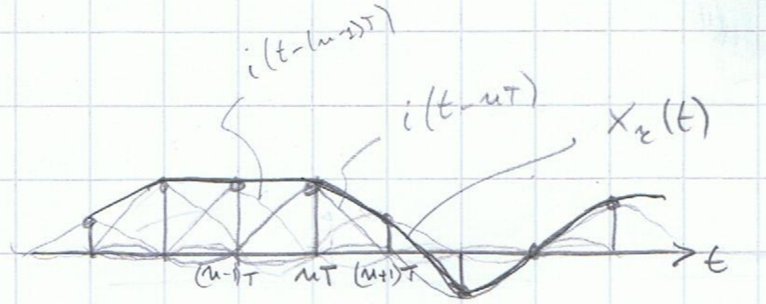
Si possono operare interpolazioni polinomiali, splines eccetera. Ci limiteremo qui a trattare solo interpolazioni del tipo

$$\boxed{x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, i(t-nT)},$$

dove $i(t)$ è una funzione interpolante, ovvero tale che $i(0)=1$ e $i(nT)=0 \quad \forall n \neq 0$



Tipico andamento di una funzione interpolante



Il segnale ricostruito può essere riscritto come

$$x_r(t) = i(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\delta(t-nT)$$

Trasformando

$$X_r(f) = I(f)\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T}$$

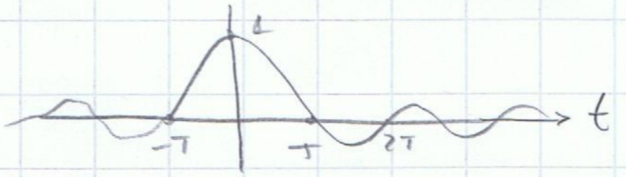
$$\boxed{X_r(f) = I(f)\cdot X_{DTFT}(fT)}$$

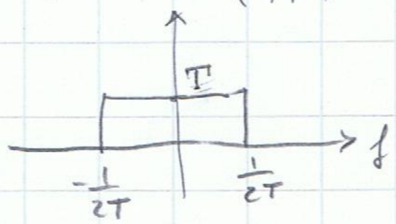
trasformata dell'impulso di interpolazione

DTFT riportata a frequenza f (espresso continuo)

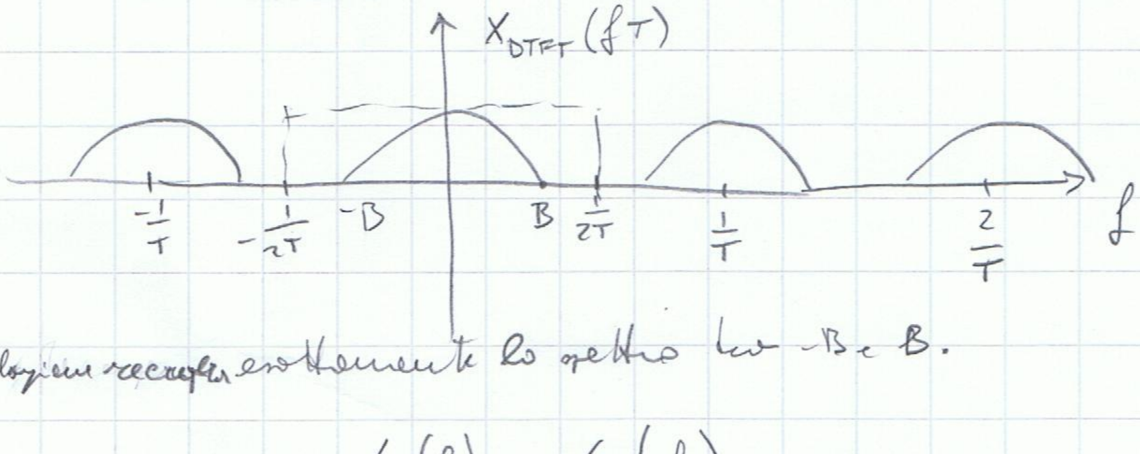
Esempio: Interpolatore cardinale

$$i(t) = \text{sinc}\,\frac{t}{T} \qquad I(f) = T\,\Pi\left(\frac{f}{1/T}\right)$$





Se il segnale $x_a(t)$ è limitato in banda,



l'interpolazione raccoglie esattamente lo spettro tra $-B$ e B.

$$X_r(f) = X_a(f)$$

$$x_r(t) = x_a(t)$$

La formula esplicita di interpolazione è

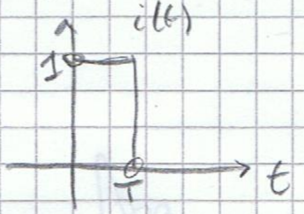
$$\boxed{x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)}$$

FORMULA DI INTERPOLAZIONE CARDINALE

Le condizioni per cui $x_r(t) = x_a(t)$ e la formula di interpolazione cardinale vanno sotto il nome di teorema del campionamento (Shannon, Whittaker, Kotelnikov, Nyquist, ...)

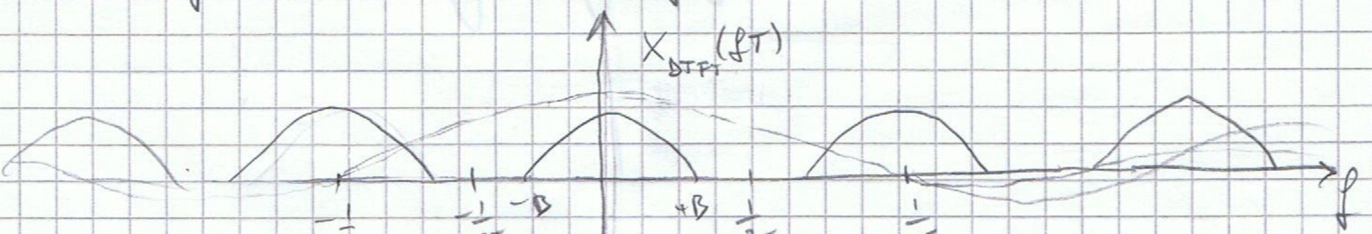
Altri interpolatori o impulsi di ricostruzione:

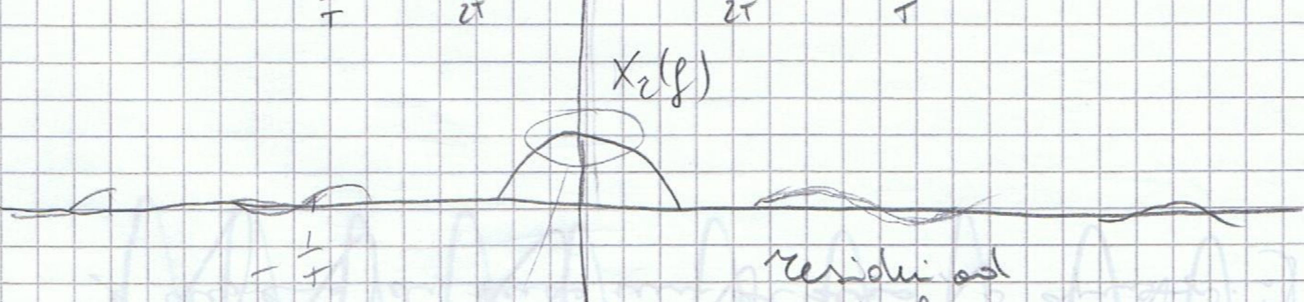
$$i(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$



SAMPLE-AND-HOLD

$$I(f) = e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\,T\,\mathrm{sinc}\,Tf$$

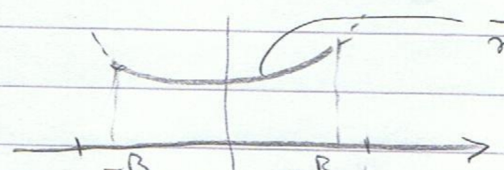




residui ad alte frequenze

distorsione alle basse frequenze

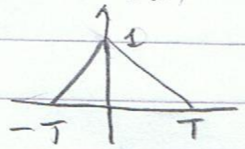
I residui ad alte frequenze possono essere eliminati con un filtro passa-basso, che essenzialmente smussa gli spigoli in $x_r(t)$ (*). La distorsione alle basse frequenze, che è tanto più piccola (sinc più piatto) quanto più grande è la frequenza di campionamento, può essere anch'essa compensata con un filtro opportunamente modellato

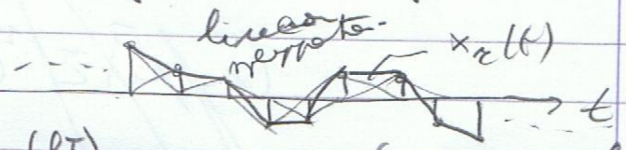


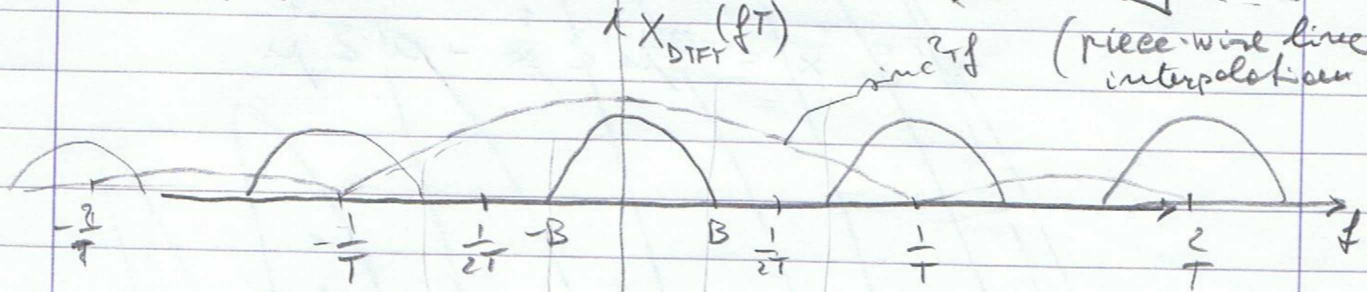
(*) Questo schema è quello tipico di un DAC (Digital-to-Analog Converter) in cui ogni valore viene mantenuto per T secondi e poi "smussato" da un passa-basso.

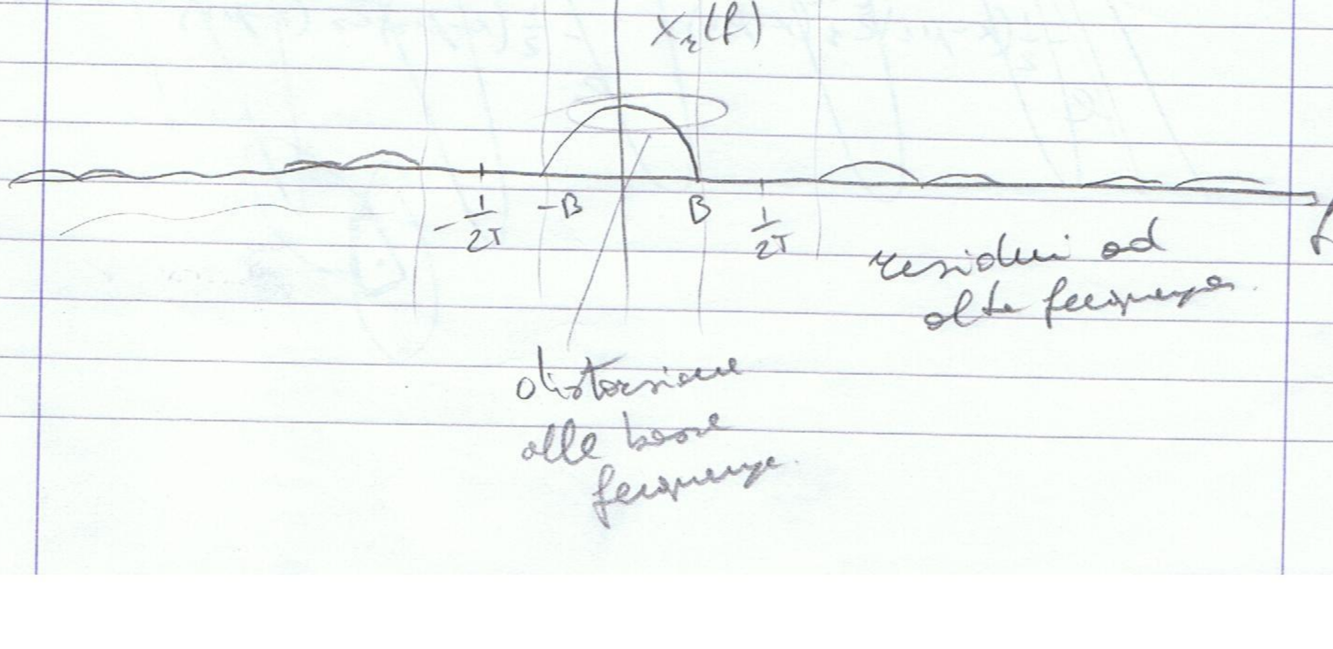
Interpolatore lineare

$$i(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \quad ; \quad I(f) = T\,\mathrm{sinc}^2 Tf$$









Anche qui i residui ad alte frequenze possono essere eliminati con un filtro passa-basso. Questi sono più attenuati nel caso sample-and-hold perché i lobi laterali del sinc^2 sono più bassi. Anche la distorsione alle basse frequenze è più contenuta (il sinc^2 è più piatto attorno allo zero). Comunque un filtro opportunamente progettato può compensare la distorsione