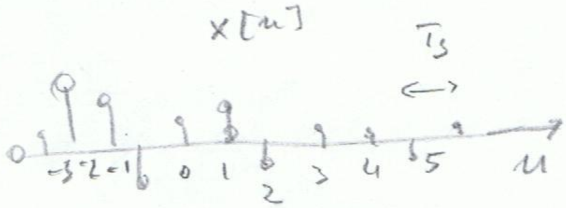
SEGNALI TEMPO-DISCRETO

corso di Teoria dei Segnali
Seconda Univ. di Napoli, 2011
(Prof. F. A.N. PALMIERI



I segnali tempo discreto possono o meno essere il risultato del campionamento di segnali tempo-continui. In questo caso ad essi è associato un intervallo T_s, di cui $\frac{1}{T_s} = f_s$ è detta frequenza di campionamento. I segnali vengono studiati ed elaborati in un tempo normalizzato nell'insieme discreto degli interi

Per segnali deterministici si definiscono

ENERGIA $\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$ POTENZA: $P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$

Le definizioni sono ovvie estensioni delle definizioni di energia e potenza già date per i segnali tempo-continui

Sono segnali di energia i segnali per cui $\mathcal{E}_x < \infty$

Ovviamente per tali segnali $P_x = 0$

Sono segnali di potenza i segnali per cui $0 < P_x < \infty$

Ovviamente per segnali di potenza $\mathcal{E}_x = \infty$.

Si definiscono inoltre

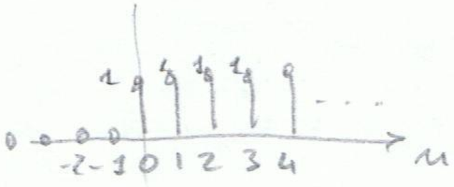
media temporale di $x[n]$ tra n_1 e n_2

$$\mu_x[n_1, n_2] = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]$$

media asintotica di $x[n]$

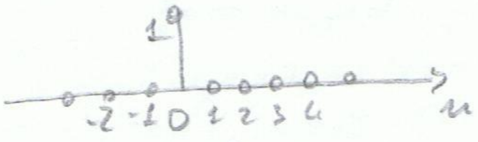
$$\mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$$

ALCUNI SEGNALI TEMPO-DISCRETO ELEMENTARI:



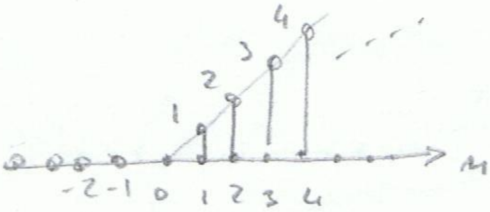
GRADINO

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



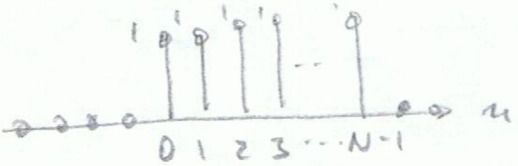
IMPULSO

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



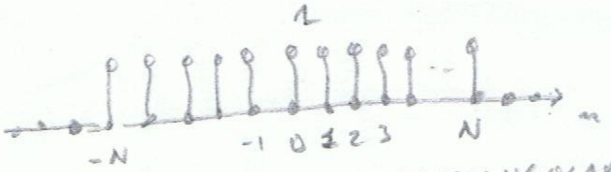
RAMPA

$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



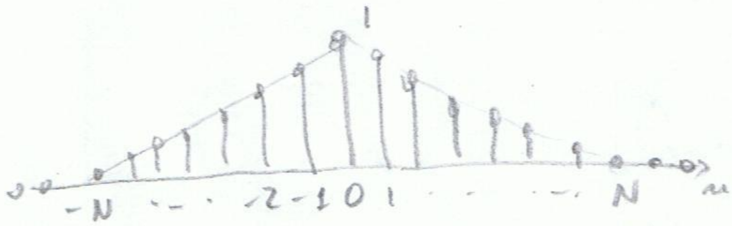
IMPULSO RETTANGOLARE
DI DURATA N (causale)

$$p_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$



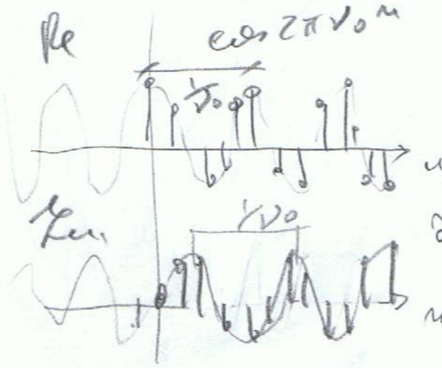
IMPULSO RETTANGOLARE
CENTRATO DI DURATA 2N+1

$$\Pi_{2N+1}[n] \doteq \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$



IMPULSO TRIANGOLARE
CENTRATO

$$\Lambda_{2N+1}[n] = \begin{cases} \frac{n}{N}+1 & -N \leq n < 0 \\ -\frac{n}{N}+1 & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$



$$e^{j2\pi\nu_0 n} = \cos 2\pi\nu_0 n + j\sin 2\pi\nu_0$$

ESPONENZIALE COMPLESSO

Si noti che la sequenza non è necessariamente periodica anche se $e^{j2\pi\nu_0 t}$ è periodica.
Una sequenza periodica $x[n]$ di periodo N è tale che

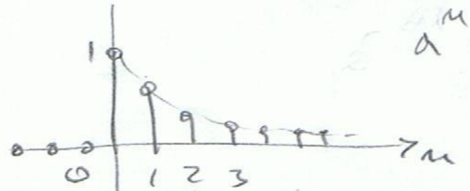
$$x[n] = x[n+KN] \qquad \forall K, n$$

Quindi

$$e^{j2\pi\nu_0 n} = e^{j2\pi\nu_0 (n+KN)}$$

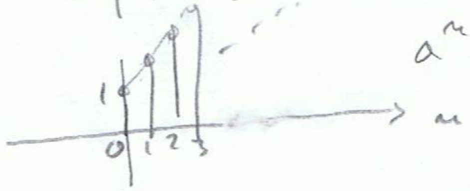
se $2\pi\nu_0 KN = 2\pi m$ ovvero se $\nu_0 = \frac{m}{KN}$

o meglio se $\nu_0 N$ è esprimibile come razionale $\frac{m}{K}$



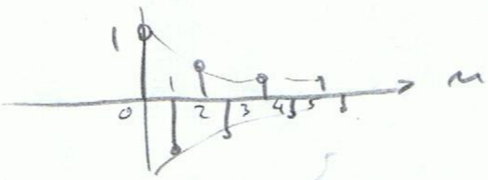
$a^n u[n] \quad 0 < a < 1$

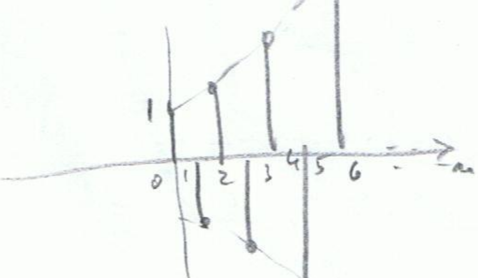
SEQ. ESPONENZIALE MONOLATERA (CAUSALE)



$a^n u[n] \quad a > 1$

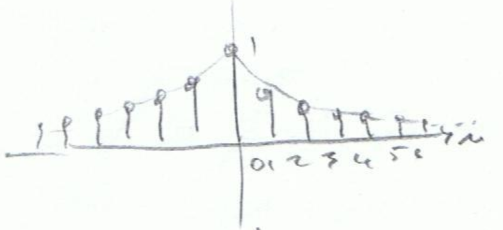
$a^n u[n] \quad -1 < a < 0$





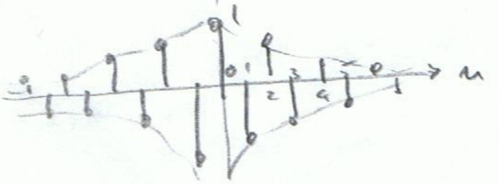
$a^n u[n] \quad a < -1$

STD.



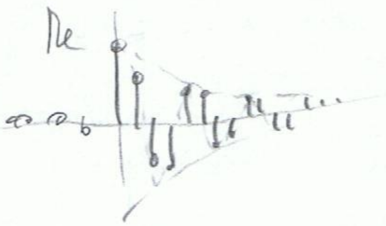
$a^{|n|}$ $0<a<1$

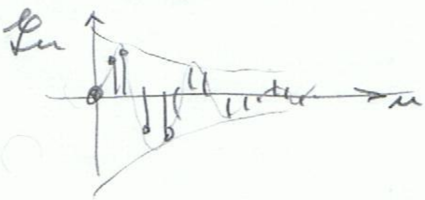
SEQ. ESPONENZIALE BI-LATERA



$a^{|n|}$ $-1<a<0$

$a^{n} e^{j2\pi\nu_0 n} u[n]$ $0<a<1$





OPERAZIONI ELEMENTARI

TRASLAZIONE TEMPORALE

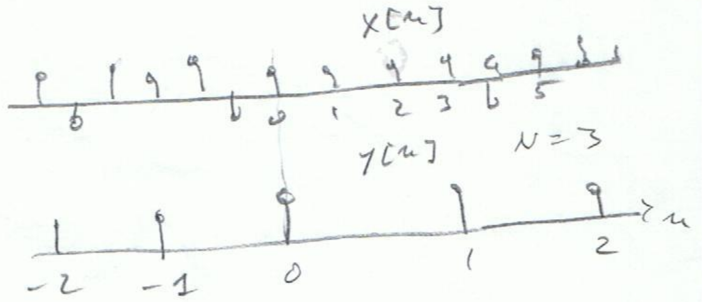
$y[n] = x[n - n_0]$

AMPLIFICAZIONE O ATTENUAZIONE

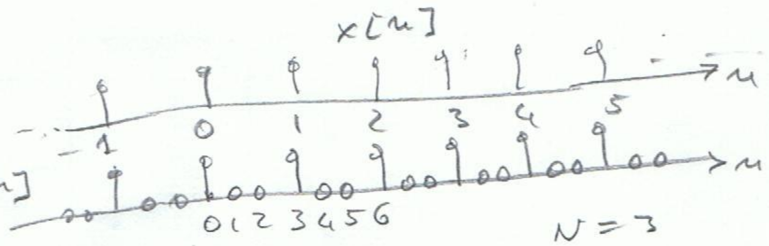
$y[n] = A x[n]$

DECIMAZIONE

$y[n] = x[nN]$



UP-SAMPLING
(ZERO FILLING)



$$\begin{cases} y[nN] = x[n] \\ y[nN+m] = 0 \quad m = 1, .., N-1 \end{cases}$$

PRODOTTO

$z[n] = x[n] \cdot y[n]$

CONVOLUZIONE LINEARE

$$z[n] = (x * y)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, y[n-m]$$

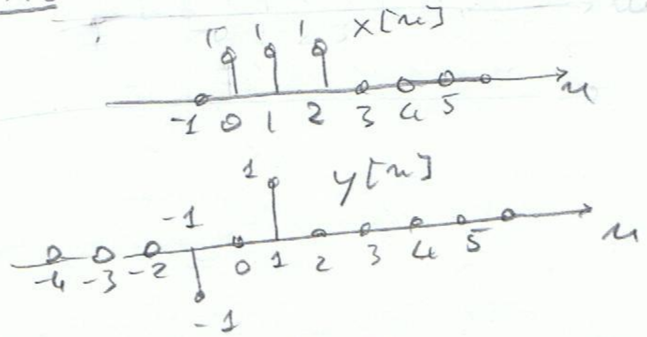
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m]\, x[n-m]$$

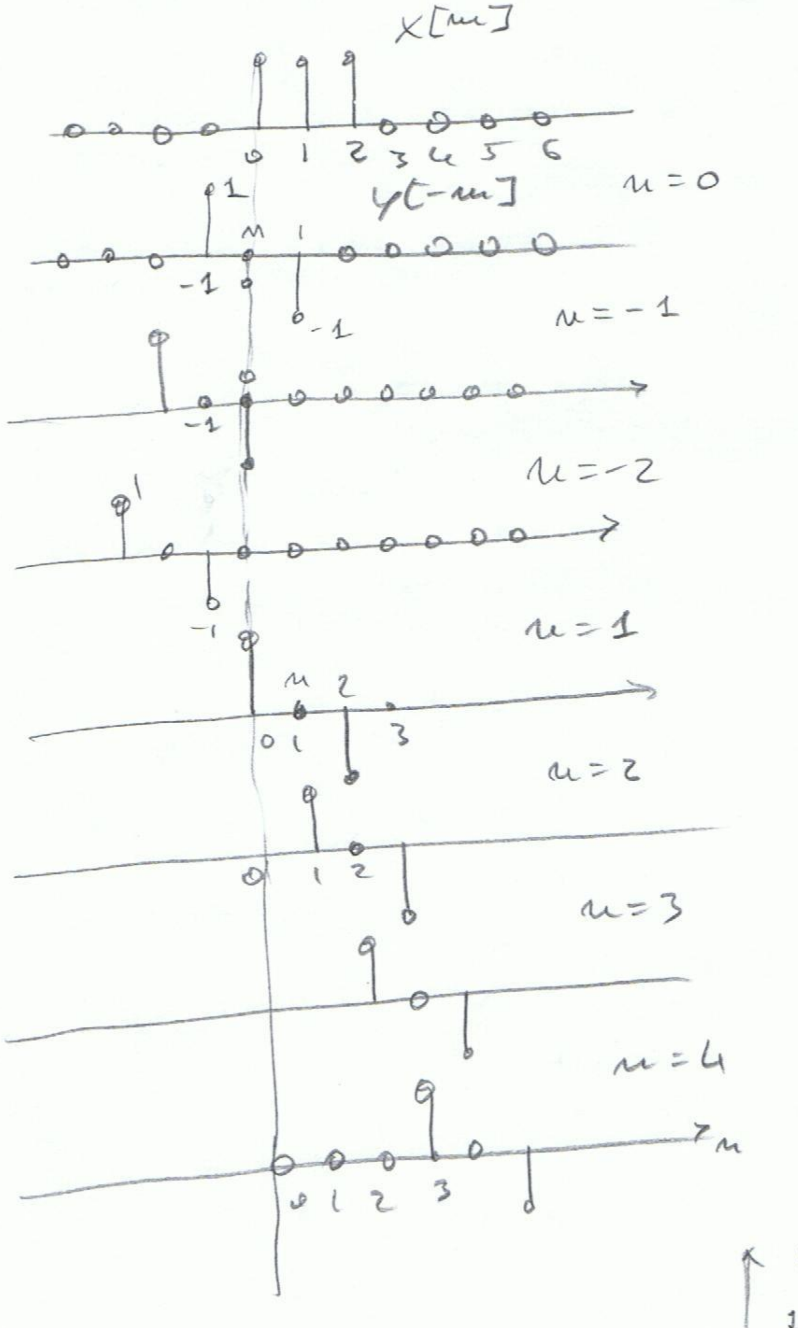
STD.

Interpretazione e calcolo grafico della convoluzione

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, \underbrace{y[-(m-n)]}_{\text{seq. ribaltata traslata di } n}$$

ESEMPIO





$z[0]=-1$

$z[-1]=-1$

$z[-2]=0$

$z[n]=0 \quad n\leq -2$

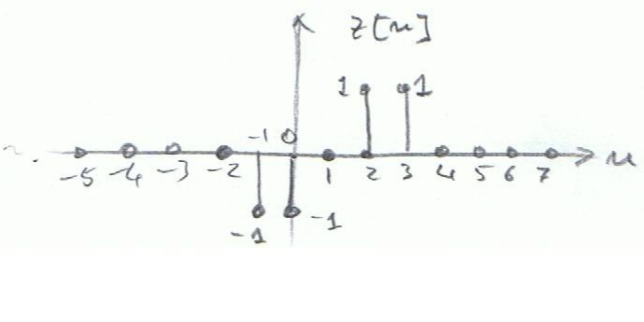
$z[1]=0$

$z[2]=1$

$z[3]=1$

$z[4]=0$

$z[n]=0 \quad n\geq 4$



TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

(o DTFT DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM)

$$X(\nu) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n} \qquad (1)$$

ν = frequenza discreta normalizzata.

$X(\nu)$ è periodica con periodo 1, perché

$$X(\nu+k) = X(\nu) \qquad \forall\, \nu, k$$

$$\begin{cases} |X(\nu)| & \text{modulo della T. di Fourier di } x[n] \\ \angle X(\nu) & \text{fase della T. di Fourier di } x[n] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(X(\nu)) & \text{parte reale della T. di Fourier di } x[n] \\ \mathrm{Im}(X(\nu)) & \text{parte immaginaria della T. di Fourier di } x[n] \end{cases}$$

Poiché $X(\nu)$ è periodica con periodo 1, espressione (1) rappresenta lo sviluppo in serie di Fourier esponenziale di $X(\nu)$. I "coefficienti" (campioni della sequenza) possono pertanto essere ottenuti come

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu \qquad (2)$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER DELLA SEQUENZA

È espressione (2), che rappresenta la versione discreta dell'integrale di Fourier, mostra come sia possibile pensare a $x[n]$ come la sovrapposizione di infiniti contributi sinusoidali a varie frequenze ν.

Si noti che ν è adimensionale.

Definizione equivalente della T.F. della sequenza basata su una pulsazione normalizzata ω, è

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

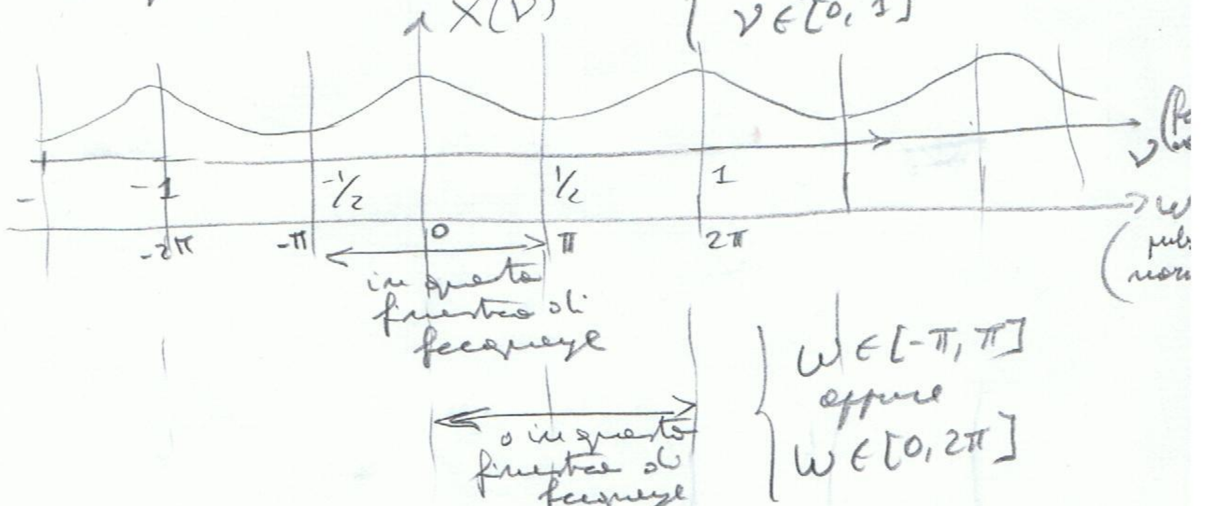
- $X(\omega)$ è periodica di periodo 2π.
- ω si esprime in radianti

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

Nel seguito preferiremo usare la variabile ν, e ω solo occasionalmente.

Quindi la descrizione nel dominio della frequenza numerica di $x[n]$ può essere confinata ad un solo periodo

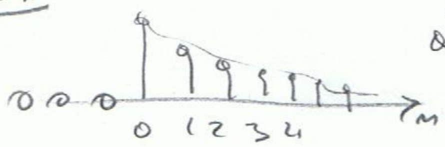
$\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ oppure $\nu \in [0, 1]$



$\omega \in [-\pi, \pi]$ oppure $\omega \in [0, 2\pi]$

$X(\nu)$ ovviamente è complesso e va disegnato e descritto per entrambi modulo e fase, o parte reale e parte immaginaria.

ESEMPIO 1



$a^n u[n]$, $0<a<1$

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j2\pi\nu}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi\nu}}$$

$$= \frac{1}{1 - a\cos 2\pi\nu + j a \sin 2\pi\nu}$$

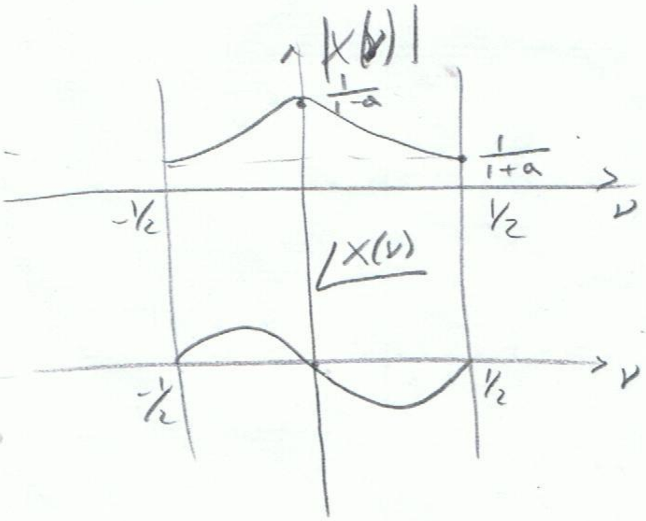
$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1-x^N}{1-x}$$

se $|x|<1$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

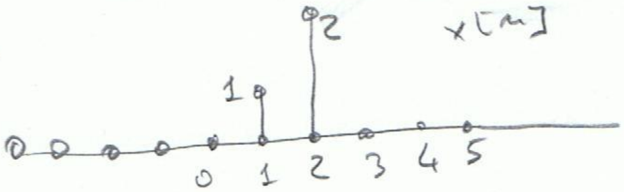
$$|X(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos 2\pi\nu)^2 + a^2 \sin^2 2\pi\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos 2\pi\nu}}$$

$$\angle X(\nu) = -\mathrm{tg}^{-1} \frac{a \sin 2\pi\nu}{1 - a\cos 2\pi\nu}$$



ESEMPIO 2



$$X(\nu) = e^{-j2\pi\nu} + 2\, e^{-j2\pi\nu 2}$$

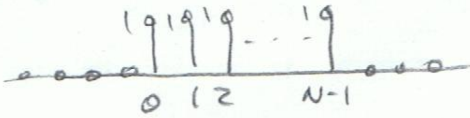
Valuto modulo e fase

$$X(\nu) = \cos 2\pi\nu - j \sin 2\pi\nu + 2 \cos 4\pi\nu - j\, 2 \sin 4\pi\nu$$

$$\begin{cases} |X(\nu)| = \sqrt{(\cos 2\pi\nu + 2\cos 4\pi\nu)^2 + (\sin 2\pi\nu + 2 \sin 4\pi\nu)^2} \\ \angle X(\nu) = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{-\sin 2\pi\nu - 2\sin 4\pi\nu}{\cos 2\pi\nu + 2\cos 4\pi\nu} \end{cases}$$

Uso una calcolatrice o MATLAB per fare il grafico per $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ o per $0 < \nu < 1$.

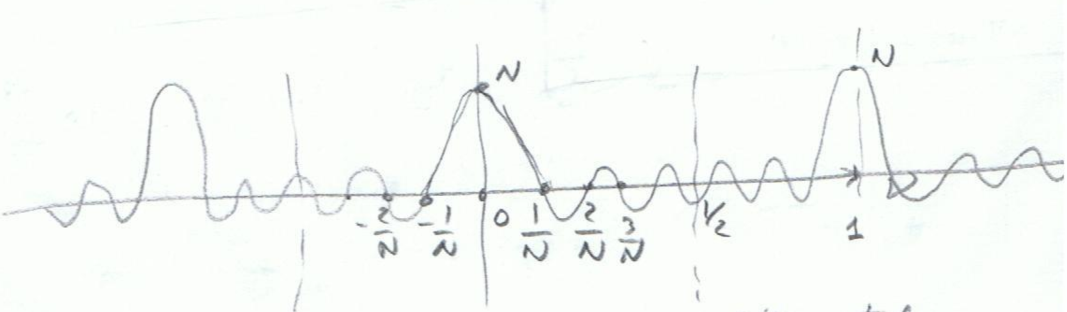
ESEMPIO 3



$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}} = \frac{e^{-j\pi\nu N}\left(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}\right)}{e^{-j\pi\nu}\left(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right)}$$

$$= e^{-j\pi\nu(N-1)} \frac{\sin \pi N\nu}{\sin \pi\nu}$$

$\dfrac{\sin \pi N\nu}{\sin \pi\nu}$ FUNZIONE DI DIRICHELET (Una specie di sinc discreto)

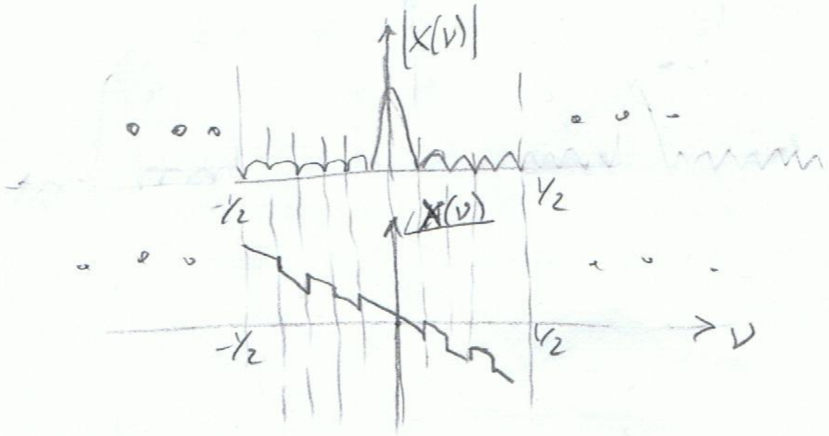


Noto che per ν = intero, applicando l'Hopital si ottiene

$$\left.\frac{\pi N \cos \pi N\nu}{\pi \cos \pi\nu}\right|_{\nu \text{ intero}} = N$$

Quindi $|X(\nu)| = \left|\dfrac{\sin \pi N \nu}{\sin \pi \nu}\right|$;

$$\angle X(\nu) = -\pi(N-1)\,\nu \pm \pi\, u\left(-\frac{\sin \pi N \nu}{\sin \pi \nu}\right)$$



PROPRIETA' DELLA DTFT

1. LINEARITA'

$$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(\nu)$$
$$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(\nu)$$

$$y[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] \longleftrightarrow Y(\nu) = c_1 X_1(\nu) + c_2 X_2(\nu)$$

PROVA: banale conseguenza della definizione

2. TRASLAZIONE

$$x[n] \longleftrightarrow X(\nu)$$
$$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j2\pi\nu n_0} X(\nu)$$

PROVA: Banale conseguenza della definizione.

3. CONVOLUZIONE

$$x[n] \longleftrightarrow X(\nu)$$
$$y[n] \longleftrightarrow Y(\nu)$$

$$z[n] = (x * y)[n] \longleftrightarrow Z(\nu) = X(\nu)Y(\nu)$$

Prova:

$$z[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,y[n-m] \;;\; Z(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,y[n-m]\,e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-m]\,e^{-j2\pi\nu n}}_{e^{-j2\pi\nu m} Y(\nu)} = Y(\nu) \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,e^{-j2\pi\nu m}}_{X(\nu)}$$

4. PRODOTTO

$$z[n] = x[n]\cdot y[n] \longleftrightarrow Z(\nu) = \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} X(\eta)\, Y(\nu-\eta)\, d\eta}_{\text{convoluzione circol. tra } X(\nu) \text{ e } Y(\nu).}$$

PROVA

$$Z(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, y[n]\, e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha) e^{j2\pi\alpha n} d\alpha \int_{-1/2}^{1/2} Y(\eta) e^{j2\pi\eta n} d\eta\, e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha) \int_{-1/2}^{1/2} Y(\eta) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(\eta+\alpha-\nu)n}}_{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\eta+\alpha-\nu-k)} d\eta\, d\alpha$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha) \int_{-1/2}^{1/2} Y(\eta)\, \delta(\eta+\alpha-\nu)\, d\eta\, d\alpha$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(\alpha)\, Y(\nu-\alpha)\, d\alpha \quad \blacksquare$$

5. MODULAZIONE

$$e^{j2\pi\nu_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(\nu-\nu_0)$$

Prova:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu_0 n} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)n} = X(\nu-\nu_0)$$

6. SEQ. REALE

Per una sequenza reale $x[n]$, $X(\nu) = X^*(-\nu)$ (Hermit…

Prova $X^*(-\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{+j2\pi(-\nu)n} = X(\nu)$

$\begin{cases} |X(\nu)| & \text{pari} \\ \angle X(\nu) & \text{dispari} \end{cases}$

Quindi per una seq. reale possiamo rappresentare $X(\nu)$ solo per $\nu \in [0, \tfrac{1}{2}]$

$\begin{cases} Re(X(\nu)) & \text{pari} \\ Im(X(\nu)) & \text{dispari} \end{cases}$

7. <u>ENERGIA</u>

Per una sequenza di energia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

<u>Prova</u>:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n]\, e^{j2\pi\nu n}\Big|_{\nu=0}$$

Dal T. del prodotto

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{DTFT}(x[n])(\eta)\, \mathrm{DTFT}(x^*[n])(\nu-\eta)\, d\eta \Big|_{\nu=0} =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(\eta)\, X^*(\eta)\, d\eta = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\eta)|^2 d\eta$$

Si noti che $\mathrm{DTFT}(x^*[n])(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] e^{-j2\pi\nu n} = \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{j2\pi\nu n}$

$= X^*(-\nu)$.

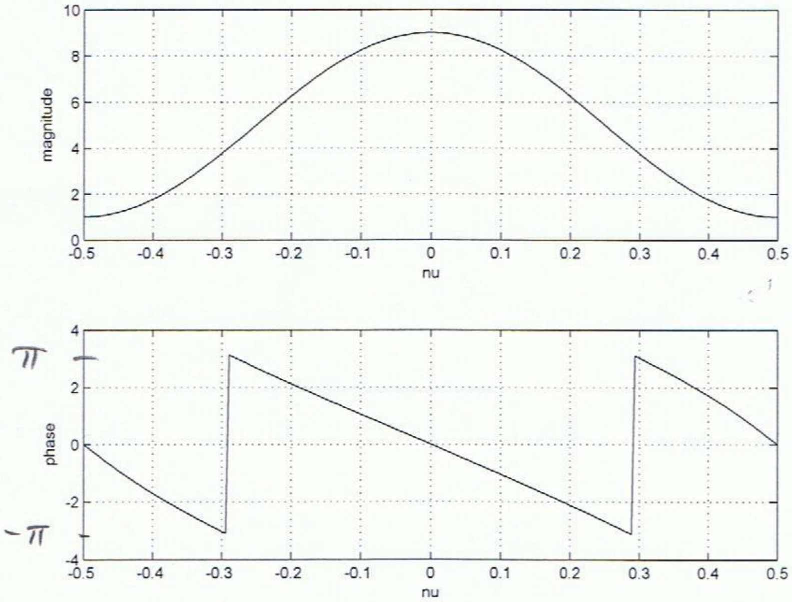
```
%calcolo della DTFT dalla formula
nu=linspace(-0.5,0.5,200);
mod=abs((cos(2*pi*nu)+2*cos(4*pi*nu)).^2+(sin(2*pi*nu)+2*sin(4*pi*nu)).^2);
ph=atan2(-sin(2*pi*nu)-2*sin(4*pi*nu),cos(2*pi*nu)+2*cos(4*pi*nu));
subplot(2,1,1);
plot(nu,mod)
grid on
ylabel('magnitude')
xlabel('nu')
subplot(2,1,2)
plot(nu,ph)
grid on
ylabel('phase')
xlabel('nu')
```

valutato su 200 valori di ν

DT

DTFT_dalla_form

CALCOLO DELLA DTFT dall'espressione analitica dell'Esempio 2

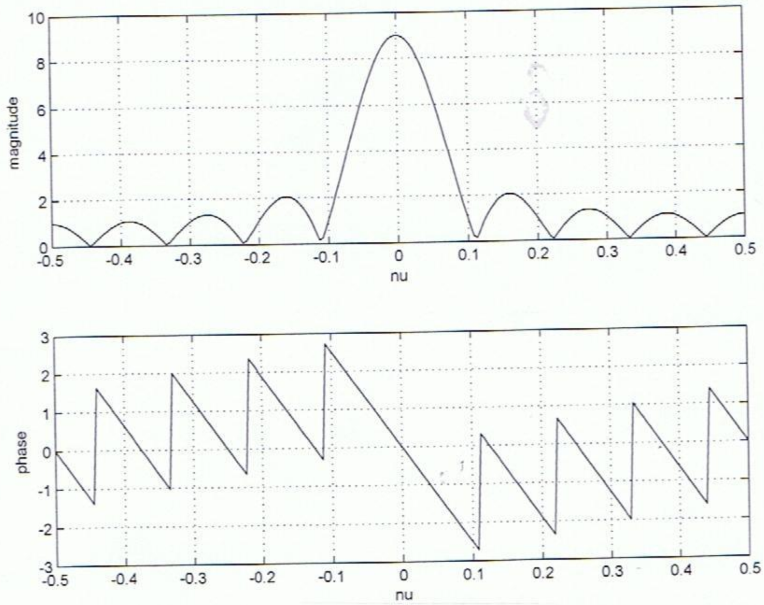


Fase "arrotolata" in $[-\pi, \pi]$

STD.1

DTFT_dei_campioni.

```
x=[0   0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  0  0    0   0  0]; %sequence
t=[-2 -1  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13]; %time axis
N=length(x);
nu=linspace(-0.5,0.5,200);
re=zeros(1,200);
im=zeros(1,200);
for n=1:N
    re=re+x(n)*cos(2*pi*nu*t(n));
    im=im-x(n)*sin(2*pi*nu*t(n));
end
mod=sqrt(re.^2+im.^2);
ph=atan2(im,re);
subplot(2,1,1);
plot(nu,mod)
grid on
ylabel('magnitude')
xlabel('nu')
subplot(2,1,2)
plot(nu,ph)
grid on
ylabel('phase')
xlabel('nu')
```



DTFT direttamente dai campioni (seq. reale)

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos 2\pi\nu n - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\sin 2\pi\nu n$$

$$|X(\nu)| = \sqrt{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos 2\pi\nu n\right)^2 + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin 2\pi\nu n\right)^2}$$

$$\angle X(\nu) = \mathrm{artan2}\left(-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin 2\pi\nu n,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos 2\pi\nu n\right)$$

Esistono algoritmi per il calcolo efficiente della DTFT. Ignoriamo questo aspetto e ci limitiamo per ora ad applicare la definizione.

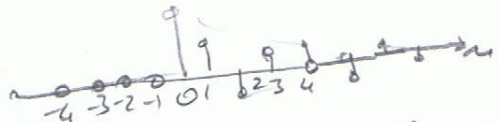
Sistemi lineari tempo discreto

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$h[n]$ risposta impulsiva

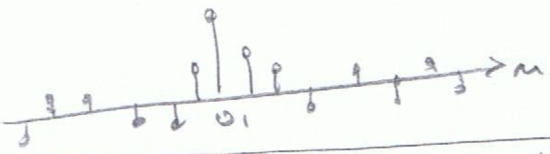
$x[n] = \delta[n] \longrightarrow y[n] = h[n]$ (cond. iniziali nulle)

Sistema causale: $h[n] = 0 \quad n < 0$



Sistema anti-causale: $h[n] = 0 \quad n > 0$

Sistema non causale: nessun vincolo



La risposta del sistema è data dalla convoluzione di $x[n]$ e $h[n]$

$$\boxed{y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]}$$

Poiché la conv. è commutativa, si può anche scrivere

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

Se il sistema è causale

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]\,h[n-m]$$

$n-k=m$

Se il sistema è anti-causale

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} h[k]\,x[n-k] = \sum_{m=n}^{+\infty} x[m]\,h[n-m]$$

$m=n-k$

La formula della convoluzione discende semplicemente dalla linearità e dalla invarianza temporale. La sequenza $x[n]$ può essere scritta come sovrapposizione di impulsi elementari, ovvero

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

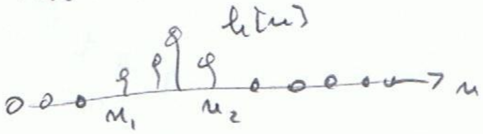
Poiché all'ingresso $x[k]\,\delta[n-k]$ corrisponde l'uscita $x[k]\,h[n-k]$, per sovrapposizione

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] .$$

Un sistema lineare si dice

<u>FIR</u> (FINITE IMPULSE RESPONSE) se

$h[n] \neq 0 \qquad n \in [n_1, n_2]$



$$y[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} h[k]\,x[n-k]$$

<u>IIR</u> (INFINITE IMPULSE RESPONSE)

$h[n] \neq 0 \qquad n \in [n_1, \infty[$

oppure

$n \in]-\infty, n_2]$

oppure

$n \in]-\infty, +\infty[$

La DTFT di $h[n]$ è la risposta armonica del sistema

$$H(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j2\pi\nu n}$$

$$\begin{cases} |H(\nu)| & \text{risposta armonica di ampiezza} \\ \angle H(\nu) & \text{risposta armonica di fase} \end{cases}$$

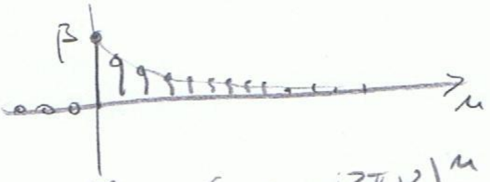
$$\begin{cases} Re(H(\nu)) & \text{parte reale della risposta armonica} \\ Im[H(\nu)) & \text{parte immaginaria della risposta armonica.} \end{cases}$$

$$X(\nu) \longrightarrow \boxed{H(\nu)} \longrightarrow Y(\nu)$$

$$Y(\nu) = H(\nu)\, X(\nu)$$

ESEMPIO

$$h[n] = \beta\, e^{-\alpha n} u[n] \qquad \alpha > 0$$

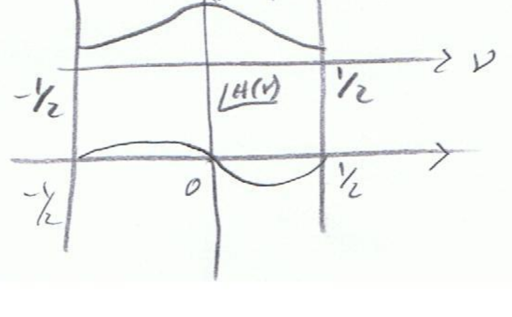


$$H(\nu) = \beta \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} e^{-j2\pi\nu n} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(e^{-\alpha} e^{-j2\pi\nu}\right)}_{|\cdot| < 1}{}^{n}$$

$$= \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha} e^{-j2\pi\nu}}$$

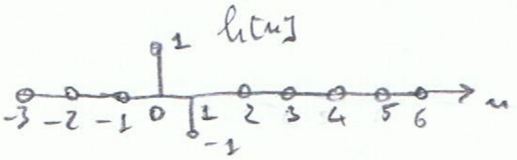
$$|H(\nu)| = \frac{\beta}{|1 - e^{-(\alpha + j2\pi)\nu}|} = \frac{\beta}{\sqrt{(1 - e^{-\alpha}\cos 2\pi\nu)^2 + (e^{-\alpha}\sin 2\pi\nu)^2}}$$

$$\angle H(\nu) = -\operatorname{atan2}\left(e^{-\alpha}\sin 2\pi\nu,\ 1 - e^{-\alpha}\cos 2\pi\nu\right)$$



caratteristica approssimativamente passa-basso.

ESEMPIO

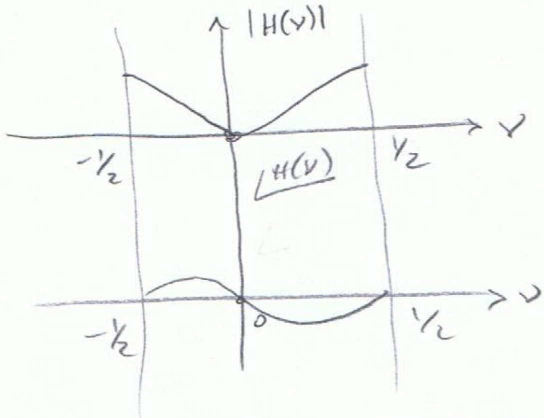


$$H(\nu) = 1 - e^{-j2\pi\nu} = 1 - \cos 2\pi\nu + j \sin 2\pi\nu$$

$$|H(\nu)| = \sqrt{(1-\cos 2\pi\nu)^2 + \sin^2 2\pi\nu} = \sqrt{1 + \cos^2 2\pi\nu - 2\cos 2\pi\nu + \sin^2 2\pi\nu}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos 2\pi\nu}$$

$$\angle H(\nu) = \operatorname{atan2}(\sin 2\pi\nu,\ 1 - \cos 2\pi\nu)$$

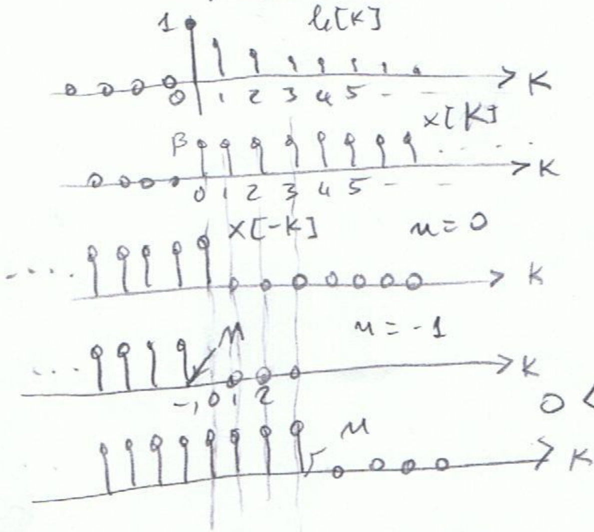


caratteristica approssimativamente high-pass.

ESERCIZIO: Calcolare l'uscita $y[n]$ del sistema con $h[n] = \alpha^n u[n]$ all'ingresso $x[n] = \beta u[n]$.

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$0 < \alpha < 1$



$y[n] = \beta$

$y[n] = 0 \quad n < 0$

$0 < n < \infty$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \beta \alpha^k = \beta \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$