CARATTERIZZAZIONE SPETTRALE DEI SEGNALI DETERMINISTICI DI ENERGIA (TEMPO-DISCRETO)

$x[n]$

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n}$$

; Dato un segnale di energia tempo-discreto, analogamente ai segnali di energia tempo-continuo si definisce

$$\boxed{\mathcal{E}_x(\nu) = |X(\nu)|^2}$$ Spettro di energia della seq. $x[n]$

Infatti
$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

Simile è anche la definizione di autocorrelazione.

$$\boxed{r_x[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-m]}$$ AUTOCORRELAZIONE DI $x[n]$.

Si tratta ovviamente di una sequenza in m (time-lag)

Proprietà della autocorrelazione.

1. $r_x[m]$ è una seq. Hermitiana.

$$\boxed{r_x[m] = r_x^*[-m]}$$

Prova:
$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-m]\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\, x[n-m] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x^*[l+m]\, x[l]$$
$l = n-m$

$$= r_x[-m].$$

2. $r_x[0] = \mathcal{E}_x$ La autocorrelazione in 0 è proprio l'energia PROVA: immediata dalla definizione.

3. La autocorrelazione ha il suo massimo in zero

$$|r_x[m]| \leq r_x[0] \quad \forall m$$

PROVA

Usando la dis. di Schwartz

$$\left|\sum_n a_n b_n\right| < \left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_n |b_n|^2\right)^{1/2}$$

dove $\sum_n |a_n|^2 < \infty$, $\sum |b_n|^2 < \infty$ (seq. di energia)

otteniamo

$$|r_x[m]| \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n-m]|^2\right)^{1/2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = r_x[0]$$

$\blacksquare$

4. T. DI WIENER-KHINCHIN

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_x[m]\, e^{-j2\pi\nu m} = |X(\nu)|^2}$$

Prova

$$X(\nu) X^*(\nu) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} x[n_1] e^{-j2\pi n_1 \nu} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x^*[n_2] e^{j2\pi n_2 \nu}$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x[n_1] x^*[n_2] e^{-j2\pi(n_1-n_2)\nu}$$

$n_1 = n \qquad m = n_1 - n_2$

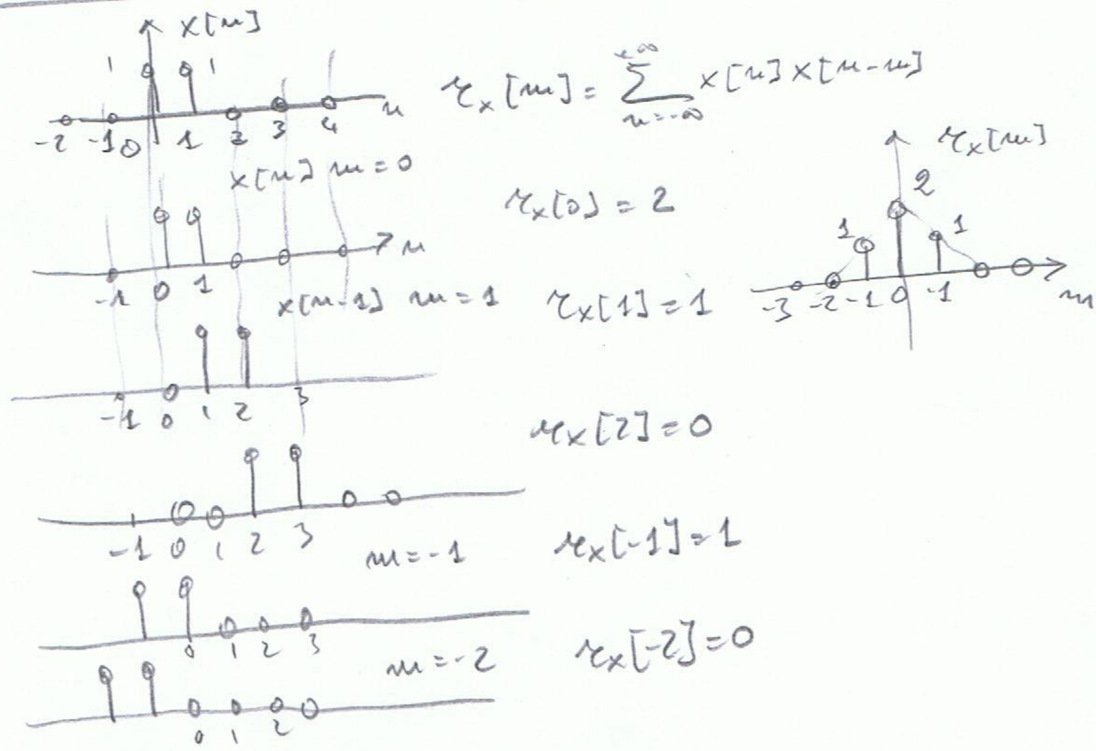
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n] x^*[n-m] e^{-j2\pi m\nu}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x^*[n-m]}_{r_x[m]} e^{-j2\pi m\nu} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_x[m] e^{-j2\pi m\nu}$$

$\blacksquare$

Esempio

$$r_x[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x[n-m]$$



$r_x[0] = 2$

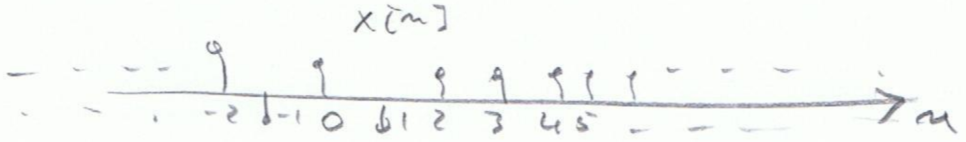
$r_x[1] = 1$

$r_x[2] = 0$

$r_x[-1] = 1$

$r_x[-2] = 0$

RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DEI SEGNALI DETERMINISTICI DI POTENZA (TEMPO DISCRETO)



Analogamente ai segnali tempo continuo di potenza, per una sequenza di potenza, si definisce spettro di potenza il limite della media del periodogramma tempo-variante. Definito

$$P_x(\nu; n_0, N) = \frac{1}{2N+1}\left|\sum_{n=n_0-N}^{n_0+N} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n}\right|^2$$

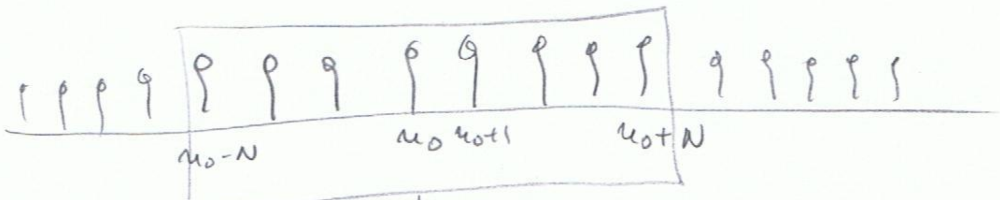
PERIODOGRAMMA TEMPO VARIANTE SU FINESTRA DI LUNGHEZZA 2N+1 CENTRATA A n_0.

Il periodogramma medio si ottiene mediando $P_N(\nu;n_0)$ su n_0, ovvero

$$P_x(\nu;N) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n_0=-M}^{M} P_N(\nu;n_0) .$$

Pertanto lo spettro di potenza è

$$P_x(\nu) = \lim_{N\to\infty} P_x(\nu;N) .$$



$\downarrow$ DTFT

$$\underbrace{P_x(\nu;n_0,N) = \frac{1}{2N+1}\,|\cdot|^2}$$

$\downarrow$

$$\langle\, \cdot \,\rangle_{n_0}$$

$\downarrow$ $N\to\infty$

$$P_x(\nu)$$

NOTA:
Spesso erroneamente viene definito lo spettro di potenza come

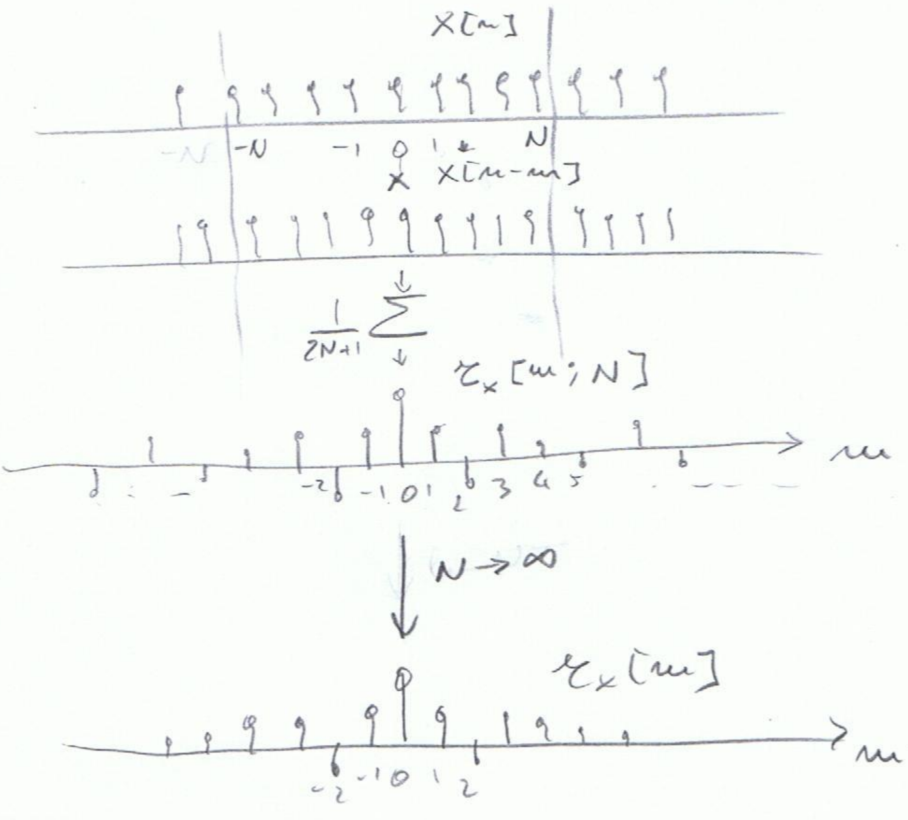
$$P_x(\nu) = \lim_{N\to\infty} P_x(\nu;0,N) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left|\sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j2\pi\nu n}\right|^2$$

Senza la media rispetto al ensemble delle funzioni, $P_x(\nu;0,N)$ diventa progressivamente più complessa al crescere di N e la convergenza non è assicurata in generale.

Ancora in analogia ai segnali tempo-continui, lo spettro di potenza viene più facilmente definito tramite la autocorrelazione.

Per una seq. di potenza, si definisce autocorrelazione deterministica l'espressione

$$r_x[m] \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]\, x^*[n-m]$$



Vale anche qui il T. di Wiener-Khinchin, ovvero che

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_x[m]\, e^{-j2\pi\nu m} = P_x(\nu)}$$

La dimostrazione è del tutto analoga al caso tempo-continuo e si tralascia per brevità.

Alcune proprietà immediate sono

1. $r_x[0] = P_x$ la autocorrelazione in $m=0$ è proprio la potenza.

   Prova: banale conseguenza delle definizioni di $r_x[m]$ e di P_x.

2. $r_x[m] = r_x^*[-m]$ la autocorrelazione è Hermitiana.

   Prova: banale conseguenza della definizione.

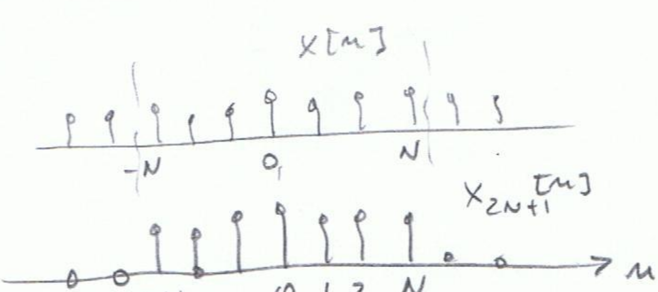
3. la autocorrelazione per un segnale di potenza può essere ottenuta come il limite del correlogramma

$$r_x[m] = \lim_{N\to\infty} r_{x_{2N+1}}[m],$$

dove $r_{x_N}[m]$ è la autocorrelazione della seq. (di energia) ottenuta da $x[n]$ troncando da $-N$ a N.

$$r_{x_{2N+1}}[m] = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x_{2N+1}[n]\, x^*_{2N+1}[n-m].$$

$$x_{2N+1}[n] = \begin{cases} x[n] & n=-N,\dots,N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



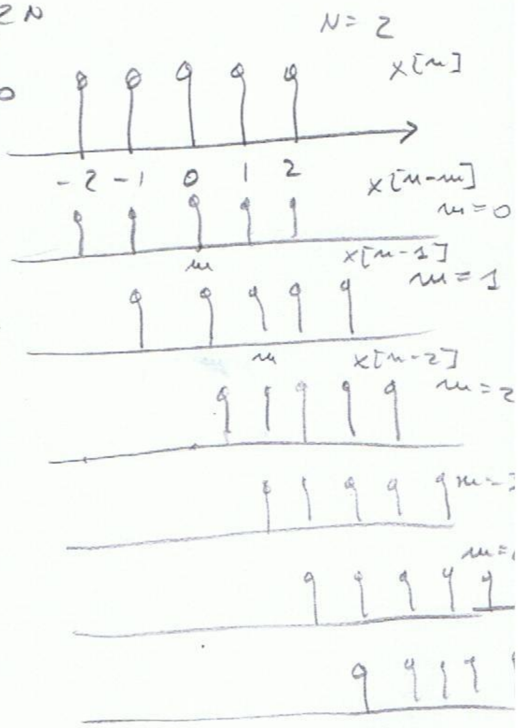
Prova: la prova è semplice poiché il correlogramma differisce di una quantità finita da $\sum_{m=-N}^{N} x[n]\,x^*[n-m]$. Pertanto al crescere di N questo diventa insignificante. Più in particolare.

$$r_{2N+1}[m] = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x_{2N+1}[n]\; x^*_{2N+1}[n-m]$$

$$= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]\,\Pi_{2N+1}[n]\;\; x^*[n-m]\,\Pi_{2N+1}[n-m]$$

$$= \frac{1}{2N+1}\begin{cases} \sum_{n=m-N}^{N} x[n]\,x^*[n-m] & 0 \le m \le 2N \\ \sum_{n=-N}^{m+N} x[n]\,x^*[n-m] & -2N \le m \le 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2N+1}\begin{cases} \sum_{n=-N}^{N} x[n]x^*[n-m] - \sum_{n=-N}^{-N+m-1} x[n]x^*[n-m] & 0 \le m \le 2N \\ \sum_{n=-N}^{N} x[n]x^*[n-m] - \sum_{n=N+m+1}^{N} x[n]x^*[n-m] & -2N \le m \le 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Per m finito il termine extra → 0 ∎

4. La autocorrelazione ha il suo massimo in zero

$$\left|r_x[m]\right| \leq r_x[0]$$

Prova:

Poiché la proprietà vale per i segnali di energia, applicandola al correlogramma otteniamo

$$\left|r_{x_{2N+1}}[m]\right| \leq r_{x_{2N+1}}[0]$$

Andando al limite per $N \to \infty$ otteniamo convergenza alla autocorrelazione e quindi la proprietà è dimostrata. $\boxtimes$