TdS. II pI. ∅

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Teoria dei Segnali/Telecomunicazioni 2
IIa PROVA INTRACORSO
Prof. Francesco A. N. Palmieri
lunedí 28 Novembre 2016
(SOLUZIONI)

(1) Un segnale aleatorio $x(t)$ SSL avente autocorrelazione $R_X(\tau) = \Lambda(\tau)$ é posto all'ingresso di un sistema lineare avente risposta impulsiva $h(t) = u(t) - u(t-1)$. Valutare la mutua correlazione uscita-ingresso (si utilizzi il metodo grafico).

(2) Si consideri una cascata di 2 canali lineari rumorosi aventi funzioni di trasferimento di energia $|H_1(f)|^2 = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ e $|H_2(f)|^2 = \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)$ ($B = 10$ KHz) e rumore additivo alle uscite $n_1(t)$ e $n_2(t)$, di potenza pari a 9 mV^2 ognuno, e spettro piatto fino alle frequenze B e $2B$ rispettivamente. Si valuti il rapporto segnale(distorto)-rumore in uscita alla catena se all'ingresso é applicato un segnale a banda piatta fino a $\frac{3B}{2}$ con densitśpettrale pari a $8 \cdot 10^{-4}$ mV^2/Hz.

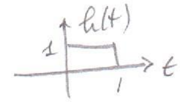
(3) Un segnale $s(t)$ passa-banda a spettro piatto tra $b = 20$ e $B = 20000$ Hz di valore efficace $P_s^{RMS} = 20$ mV é inviato su un canale distorcente avente risposta armonica di ampiezza $|H_c(f)| = \Lambda\left(\frac{f}{20000}\right)$. Successivamente il segnale é contaminato da rumore additivo avente spettro di potenza piatto da 0 a 20000 Hz e valore efficace di 5 mV. (a) Valutare il rapporto segnale(distorto)/rumore in dB alla fine della catena; (b) Proporre filtri di enfasi e de-enfasi schizzandone l'andamento approssimativo.

(4) Dimostrare la relazione tra lo spettro di potenza dell'uscita e quello dell'ingresso per un sistema lineare tempo invariante quando l'ingresso é un segnale deterministico di potenza.

(1)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

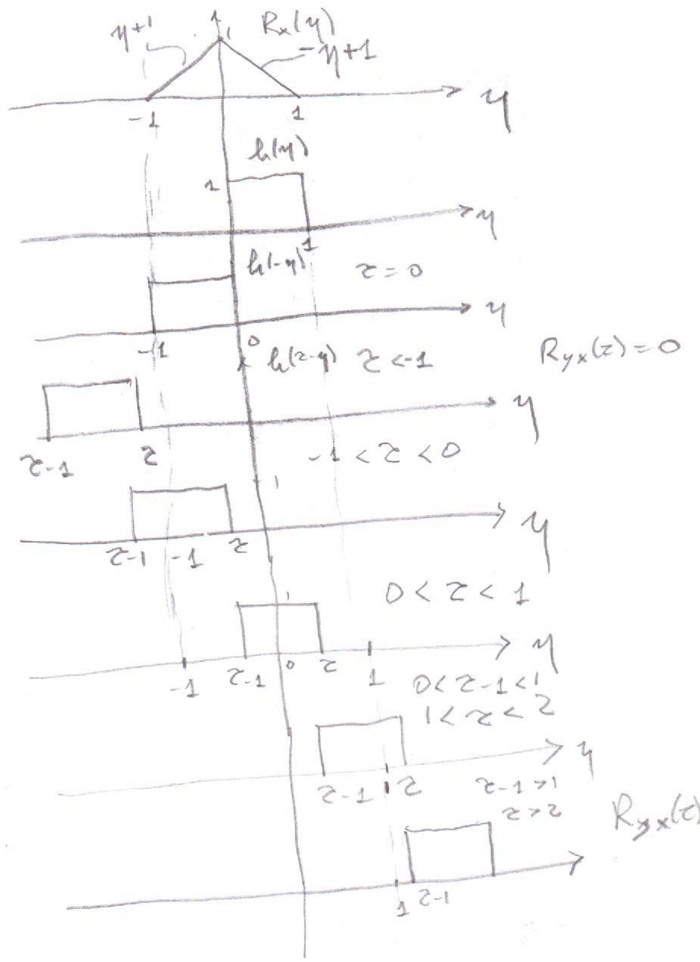
$R_x(\tau) = \Lambda(\tau)$ $\qquad$ $h(t) = u(t) - u(t-1)$



$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t-\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)\, x(t-\eta)\, d\eta\; x(t-\tau)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)\, E[x(t-\eta)x(t-\tau)]\, d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)\, R_x(\tau-\eta)\, d\eta$$

$$= (h * R_x)(\tau) = (R_x * h)(\tau)$$



$$-1<\tau<0 \qquad R_{yx}(\tau)=\int_{-1}^{\tau}(y+1)\,dy = \frac{y^2}{2}\Big]_{-1}^{\tau} + \tau+1 = \frac{\tau^2}{2}-\frac{1}{2}+\tau+1$$

$$= \frac{\tau^2}{2}+\tau+\frac{1}{2}$$

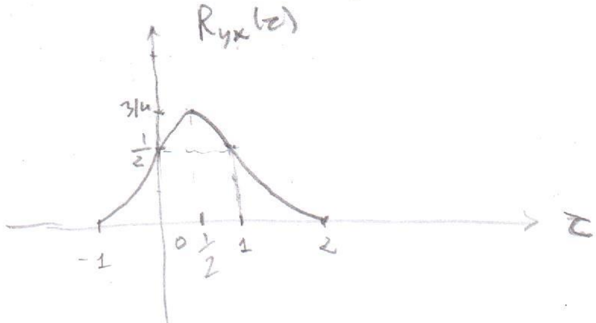
$$0<\tau<1 \qquad R_{yx}(\tau)=\int_{\tau-1}^{0}(y+1)\,dy + \int_{0}^{\tau}(-y+1)\,dy = +\frac{y^2}{2}\Big]_{\tau-1}^{0} + y\Big]_{\tau-1}^{0} - \frac{y^2}{2}\Big]_{0}^{\tau} + y\Big]_{0}^{\tau}$$

$$= -\frac{(\tau-1)^2}{2} - \cancel{\tau}+1 - \frac{\tau^2}{2} + \cancel{\tau} = -\frac{\tau^2}{2}-\frac{1}{2}+\tau+1-\frac{\tau^2}{2} = -\tau^2+\tau+\frac{1}{2}$$

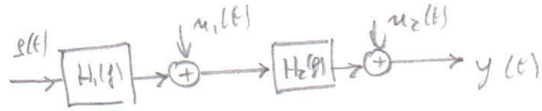
$$1<\tau<2 \qquad R_{yx}(\tau)=\int_{\tau-1}^{1}(-y+1)\,dy = -\frac{y^2}{2}\Big]_{\tau-1}^{1} + y\Big]_{\tau-1}^{1} = -\frac{1}{2}+\frac{(\tau-1)^2}{2}$$

$$+1-\tau+1 = -\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{\tau^2}{2}+\cancel{\frac{1}{2}}-\tau+2-\tau$$

$$= \frac{\tau^2}{2}-2\tau+2$$



(2)

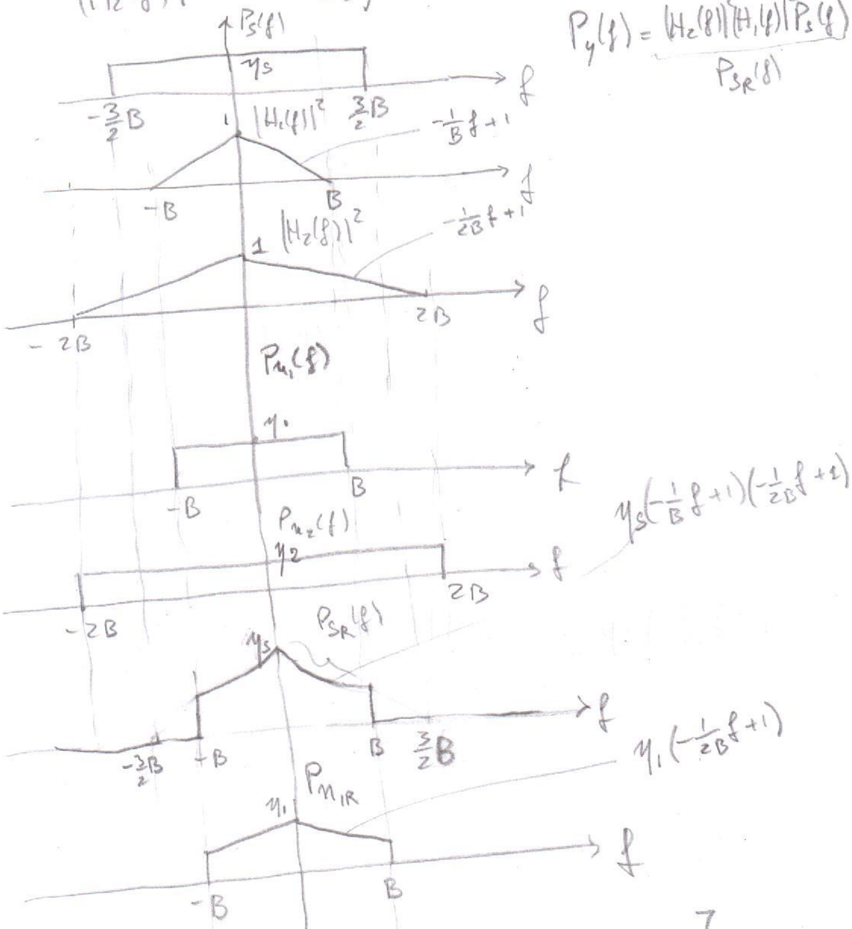


$$y(t) = \underbrace{(h_2 * h_1 * s)(t)}_{S_R(t)} + \underbrace{(h_2 * n_1)(t)}_{n_{1R}(t)} + n_2(t)$$

$$|H_1(f)|^2 = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$|H_2(f)|^2 = \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$P_y(f) = \underbrace{|H_2(f)|^2 |H_1(f)|^2 P_s(f)}_{P_{S_R}(f)} + \underbrace{|H_2(f)|^2 P_{n_1}(f)}_{P_{n_{1R}}(f)} + P_{n_2}(f)$$



$$P_{S_R} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{S_R}(f)\,df = 2\left[\int_0^B \eta_s\left(-\frac{1}{B}f+1\right)\left(-\frac{1}{2B}f+1\right)df\right]$$

$$= 2\eta_s\left[\int_0^B \left(+\frac{1}{2B^2}f^2 - \frac{1}{B}f - \frac{1}{2B}f + 1\right)df\right]$$

$$= 2\eta_s\left[\left[\frac{1}{2B^2}\frac{f^3}{3}\right]_0^B - \frac{3}{2B}\left[\frac{f^2}{2}\right]_0^B + B\right]$$

$$= 2\eta_s\left[\frac{B}{6} - \frac{3B}{4} + B\right]$$

$$= 2\eta_s B\left[\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1\right] = \cancel{2}\eta_s B \; \frac{2-9+12}{\cancel{12}6} = \eta_s B \frac{5}{6}$$

$$P_{SR} = \frac{5}{6}\eta_s B$$

$$P_{n_1R} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{n_1R}(f)\,df = 2\int_0^B \eta_1\left(-\frac{1}{2B}f + 1\right)df = 2\eta_1\left[-\frac{1}{2B}\frac{f^2}{2}\Big|_0^B + B\right]$$

$$= 2\eta_1\left[-\frac{B}{4} + B\right] = 2\eta_1 B\left[-\frac{1}{4} + 1\right] = 2\eta_1 B\,\frac{3}{\cancel{4}2}$$

$$P_{n_1R} = \frac{3}{2}\eta_1 B$$

$$P_{n_2} = 4B\eta_2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{P_{SR}}{P_{n_1R} + P_{n_2}} = \frac{\frac{11}{6}\eta_s \cancel{B}}{\frac{3}{2}\eta_1 \cancel{B} + 4\cancel{B}\eta_2} = \frac{\frac{5}{6}\eta_s}{\frac{3}{2}\eta_1 + 4\eta_2}$$

$$\eta_s = 8\cdot 10^{-4}\,(mV)^2/Hz$$

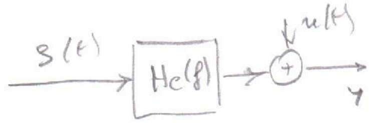
$$P_{n_1} = 2B\eta_1 \Rightarrow \eta_1 = \frac{P_{n_1}}{2B} = \frac{9}{20'000} = 4.5\cdot 10^{-4}\,(mV)^2/Hz.$$

$$P_{n_2} = 4B\eta_2 \Rightarrow \eta_2 = \frac{P_{n_2}}{4B} = \frac{9}{40'000} = 2.2\cdot 10^{-4}\,\frac{(mV)^2}{Hz}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{5}{6}\,8\cdot\cancel{10^{-4}}}{\frac{3}{2}\,4.5\cdot\cancel{10^{-4}} + 4\cdot 2.2\,\cancel{10^{-4}}} = 0.43$$

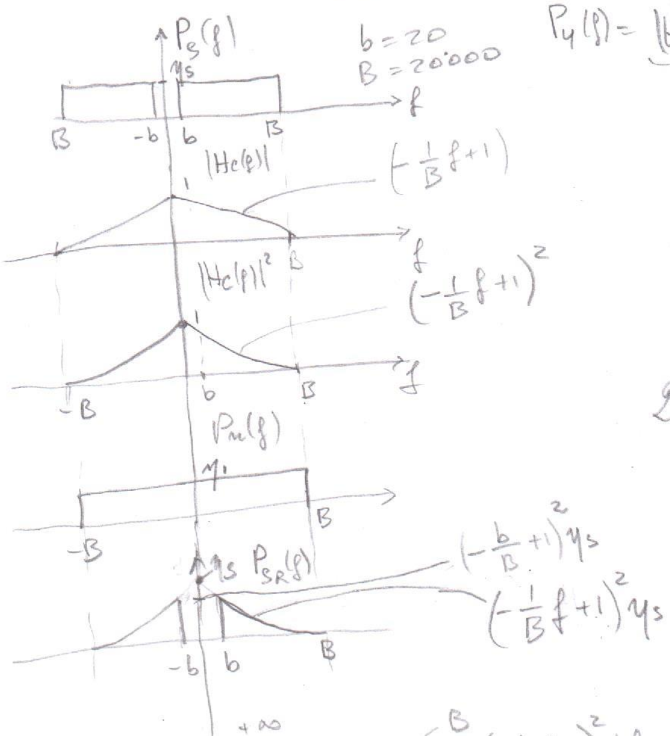
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log_{10} 0.43 = -3.67\ dB$$

(3)



$$y(t) = (h_e * s)(t) + n(t)$$

$$P_y(f) = \underbrace{|He(f)|^2 P_s(f)}_{P_{s_R}(f)} + P_n(f)$$



$$P_n^{RMS} = 5\ mV$$

$$P_s^{RMS} = 20\ mV$$

$$2\eta_s(B-b) = \left(P_s^{RMS}\right)^2$$

$$\eta_s = \frac{\left(P_s^{RMS}\right)^2}{2(B-b)}$$

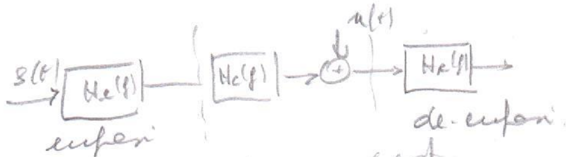
$$P_{SR} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{SR}(f)\,df = 2\int_b^B \eta_s\left(-\frac{1}{B}f+1\right)^2 df = 2\eta_s \frac{(B-b)\left(-\frac{b}{B}+1\right)^2}{3}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(P_s^{RMS}\right)^2}{\cancel{2(B-b)}} \frac{\cancel{(B-b)}\left(-\frac{b}{B}+1\right)^2}{3} = \frac{400\left(-\frac{20}{20000}+1\right)^2}{3} = 133$$

$$P_n = 25\ (mV)^2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{P_{SR}}{P_n} = \frac{133}{25} = 5.32 = 7.26\ dB$$

TdS.IIpi.6



$$\begin{cases} |H_e(f)|^2 = \dfrac{K\alpha}{|H_c(f)|}\left(\dfrac{P_n(f)}{P_s(f)}\right)^{1/2} \\ |H_d(f)|^2 = \dfrac{K}{\alpha}\dfrac{1}{|H_c(f)|}\left(\dfrac{P_s(f)}{P_n(f)}\right)^{1/2} \end{cases}$$

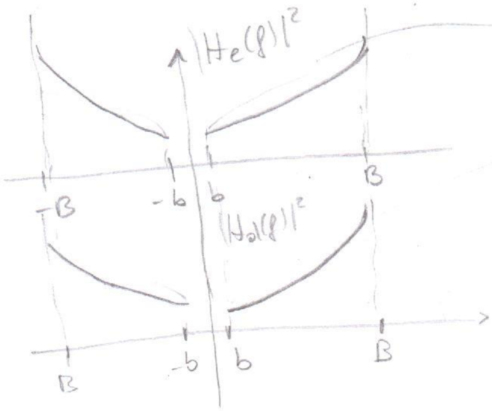
cost.

$|f| \in [b, B[$

cost

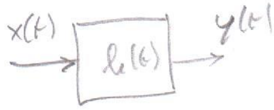
$= \dfrac{1}{-\frac{1}{B}f+1}$

"



4

Tds. II pi. 7



$$Y_T(f;t_0) = H(f)\, X_T(f;t_0)$$

$$P_y(f) = \lim_{T\to\infty}\lim_{U\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|Y_T(f;t_0)|^2\,dt_0$$

$$= \lim_{T\to\infty}\lim_{U\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|H(f)|^2\,|X_T(f;t_0)|^2\,dt_0$$

$$= |H(f)|^2\underbrace{\lim_{T\to\infty}\lim_{U\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U}|X_T(f;t_0)|^2\,dt_0}_{P_x(f)} = |H(f)|^2 P_x(f)$$