

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA CAMPANIA Luigi Vanvitelli  
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE  
Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione  
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

**Teoria dei Segnali**

Ila Prova Intracorso

Prof. Francesco A. N. Palmieri

giovedì 23 novembre 2017

1.[11pt] Si consideri il seguente processo aleatorio

$$Y(t) = X(t - 2) + X(t) \sin^2 8\pi f_0 t,$$

dove  $X(t)$  è un processo aleatorio SSL avente spettro di potenza  $P_X(f) = \Lambda\left(\frac{f-2}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{f+2}{2}\right)$  ( $f_0 \gg 4$ ). Calcolare e schizzare autocorrelazione e spettro di potenza di  $X(t)$ . Commentare sulla stazionarietà di  $Y(t)$  valutando e schizzando autocorrelazione e spettro di potenza.

2.[11pt] Siano  $x(t)$  e  $n(t)$  due processi aleatori incoerenti SSL aventi autocorrelazioni  $R_x(\tau)$  e  $R_n(\tau)$ . Valutare la autocorrelazione e lo spettro di potenza di

$$y(t) = (h_1 * x)(t) + (h_2 * x)(t) + n(t),$$

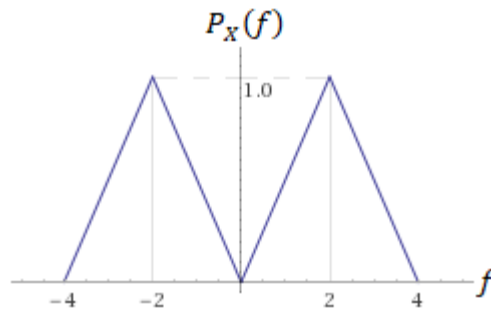
dove  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  sono le risposte impulsive di due sistemi lineari tempo-invarianti.

3.[11pt] Un segnale aleatorio avente spettro di potenza

$$P_s(f) = \alpha \left[ \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) - \Lambda\left(\frac{f}{B}\right) \right]$$

è trasmesso su un canale avente funzione di trasferimento dell'energia  $|H_c(f)|^2 = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$  e che introduce rumore additivo avente spettro  $P_n(f) = \frac{\eta_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{3B}\right)$ . Segnale e rumore sono incoerenti. Calcolare il rapporto segnale-rumore all'uscita del sistema (senza tener conto della distorsione). Proporre e schizzare filtri di enfasi e de-enfasi per il sistema.

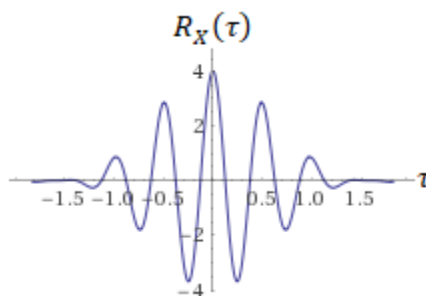
1) Lo spettro di potenza di  $X(t)$  fornito può essere espresso graficamente come di seguito



L'autocorrelazione di  $X(t)$ , che essendo SSL dipenderà da  $\tau$ , può invece essere valutata attraverso il calcolo dell'antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza, ossia ponendo

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{P_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Lambda\left(\frac{f-2}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{f+2}{2}\right)\right\} \\ &= 2e^{j4\pi\tau} \text{sinc}^2 2\tau + 2e^{-j4\pi\tau} \text{sinc}^2 2\tau = 4 \text{sinc}^2 2\tau \cos 4\pi\tau \end{aligned}$$

L'autocorrelazione si annullerà quindi ad ogni istante  $\tau$  multiplo del periodo del coseno (che è pari ad  $\frac{1}{2}$ ) potendo essere espressa graficamente come di seguito



Per ciò che concerne la stazionarietà di  $Y(t)$  cominciamo innanzitutto a valutarne la media

$$\begin{aligned} E\{Y(t)\} &= E\{X(t-2) + X(t) \sin^2 8\pi f_0 t\} \\ &= \underbrace{E\{X(t-2)\}}_{=0} + \underbrace{E\{X(t)\}}_{=0} \sin^2 8\pi f_0 t = 0 \end{aligned}$$

dove il fatto che la media di  $X(t)$  sia nulla si desume semplicemente dall'osservazione dello spettro di potenza, ovvero dalla mancanza nello stesso di una delta in zero.

Ricordando che

$$\sin^2 8\pi f_0 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 16\pi f_0 t$$

possiamo calcolare l'autocorrelazione di  $Y(t)$  ponendo

$$\begin{aligned}
 R_Y(t; \tau) &= E\{Y(t)Y(t - \tau)\} \\
 &= E\left\{\left[X(t - 2) + \frac{X(t)}{2} - \frac{X(t)}{2} \cos 16\pi f_0 t\right] \right. \\
 &\quad \left. \left[X(t - 2 - \tau) + \frac{X(t - \tau)}{2} - \frac{X(t - \tau)}{2} \cos 16\pi f_0(t - \tau)\right]\right\} \\
 &= E\{X(t - 2)X(t - 2 - \tau)\} + E\left\{\frac{X(t - 2)X(t - \tau)}{2}\right\} \\
 &\quad - E\left\{\frac{X(t - 2)X(t - \tau)}{2}\right\} \cos 16\pi f_0(t - \tau) + E\left\{\frac{X(t)X(t - 2 - \tau)}{2}\right\} \\
 &\quad + E\left\{\frac{X(t)X(t - \tau)}{4}\right\} - E\left\{\frac{X(t)X(t - \tau)}{4}\right\} \cos 16\pi f_0(t - \tau) \\
 &\quad - E\left\{\frac{X(t)X(t - 2 - \tau)}{2}\right\} \cos 16\pi f_0 t - E\left\{\frac{X(t)X(t - \tau)}{4}\right\} \cos 16\pi f_0 t \\
 &\quad + E\left\{\frac{X(t)X(t - \tau)}{4}\right\} \cos 16\pi f_0 t \cos 16\pi f_0(t - \tau) \\
 &= R_X(\tau) + \frac{1}{2}R_X(\tau - 2) - \frac{1}{2}R_X(\tau - 2) \cos 16\pi f_0(t - \tau) + \frac{1}{2}R_X(\tau + 2) \\
 &\quad + \frac{1}{4}R_X(\tau) - \frac{1}{4}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0(t - \tau) - \frac{1}{2}R_X(\tau + 2) \cos 16\pi f_0 t \\
 &\quad - \frac{1}{4}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0 t + \frac{1}{4}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0 t \cos 16\pi f_0(t - \tau) \\
 &= \frac{5}{4}R_X(\tau) + \frac{1}{2}R_X(\tau - 2) - \frac{1}{2}R_X(\tau - 2) \cos 16\pi f_0(t - \tau) + \frac{1}{2}R_X(\tau + 2) \\
 &\quad - \frac{1}{4}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0(t - \tau) - \frac{1}{2}R_X(\tau + 2) \cos 16\pi f_0 t - \frac{1}{4}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0 t \\
 &\quad + \frac{1}{8}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0(2t - \tau) + \frac{1}{8}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0 t
 \end{aligned}$$

*formula di Werner*

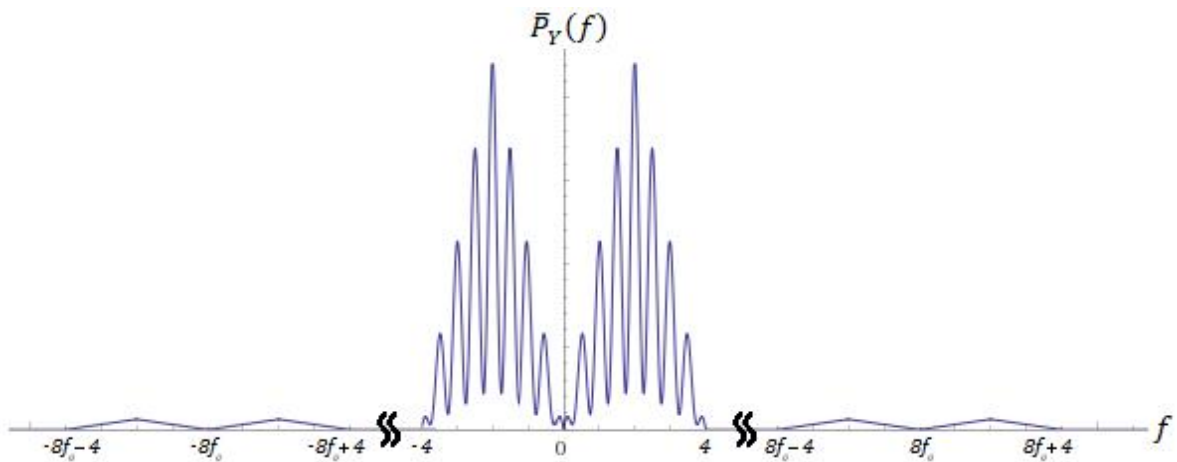
Poiché l'autocorrelazione di  $Y(t)$  dipende da  $t$  il processo stesso non risulta essere SSL. Tuttavia, è possibile osservare che tale dipendenza è periodica di periodo  $1/8f_0$ , rendendo  $Y(t)$  ciclostazionario. Il calcolo dell'autocorrelazione mediata su un periodo fornisce infatti

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_Y(\tau) &= 8f_0 \int_{-\frac{1}{16f_0}}^{\frac{1}{16f_0}} R_Y(t; \tau) dt \\
 &= \frac{5}{4}R_X(\tau) + \frac{1}{2}R_X(\tau - 2) + \frac{1}{2}R_X(\tau + 2) + \frac{1}{8}R_X(\tau) \cos 16\pi f_0 \tau
 \end{aligned}$$

A questo punto è possibile valutare lo spettro di potenza (medio) di  $Y(t)$ , ottenendo

$$\begin{aligned}\bar{P}_Y(f) &= \mathcal{F}\{\bar{R}_Y(\tau)\} = \frac{5}{4}P_X(f) + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}P_X(f) + \frac{1}{2}e^{j4\pi f}P_X(f) \\ &\quad + \frac{1}{16}[P_X(f - 8f_0) + P_X(f + 8f_0)] \\ &= \left(\frac{5}{4} + \cos 4\pi f\right)P_X(f) + \frac{1}{16}P_X(f - 8f_0) + \frac{1}{16}P_X(f + 8f_0)\end{aligned}$$

che è rappresentato graficamente di seguito



2) Le regole della convoluzione permettono di scrivere

$$\begin{aligned}y(t) &= (h_1 * x)(t) + (h_2 * x)(t) + n(t) \\ &= ((h_1 + h_2) * x)(t) + n(t) = (h * x)(t) + n(t)\end{aligned}$$

pertanto, avendo posto  $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ , otteniamo che

$$R_z(\tau) = (r_h * R_x)(\tau) \quad \text{ed} \quad P_z(f) = |H(f)|^2 P_x(f)$$

dove  $z(t) = (h * x)(t)$  mentre

$$\begin{aligned}r_h(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [h_1(t) + h_2(t)][h_1(t - \tau) + h_2(t - \tau)] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)h_1(t - \tau) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)h_2(t - \tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t)h_1(t - \tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t)h_2(t - \tau) dt \\ &= r_{h_1}(\tau) + r_{h_1 h_2}(\tau) + r_{h_2 h_1}(\tau) + r_{h_2}(\tau)\end{aligned}$$

Quindi otteniamo che

$$R_y(\tau) = R_z(\tau) + R_n(\tau) = [r_{h_1}(\tau) + r_{h_1 h_2}(\tau) + r_{h_2 h_1}(\tau) + r_{h_2}(\tau)] * R_x(\tau) + R_n(\tau)$$

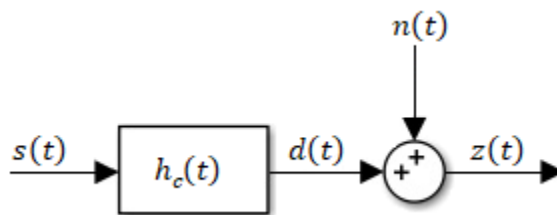
mentre in frequenza

$$\begin{aligned} P_y(f) &= P_z(f) + P_n(f) = |H(f)|^2 P_x(f) + P_n(f) \\ &= [|H_1(f)|^2 + H_1(f)H_2^*(f) + H_2(f)H_1^*(f) + |H_2(f)|^2] P_x(f) + P_n(f) \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si perviene osservando che

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= H(f)H^*(f) = [H_1(f) + H_2(f)][H_1^*(f) + H_2^*(f)] \\ &= |H_1(f)|^2 + H_1(f)H_2^*(f) + H_2(f)H_1^*(f) + |H_2(f)|^2 \end{aligned}$$

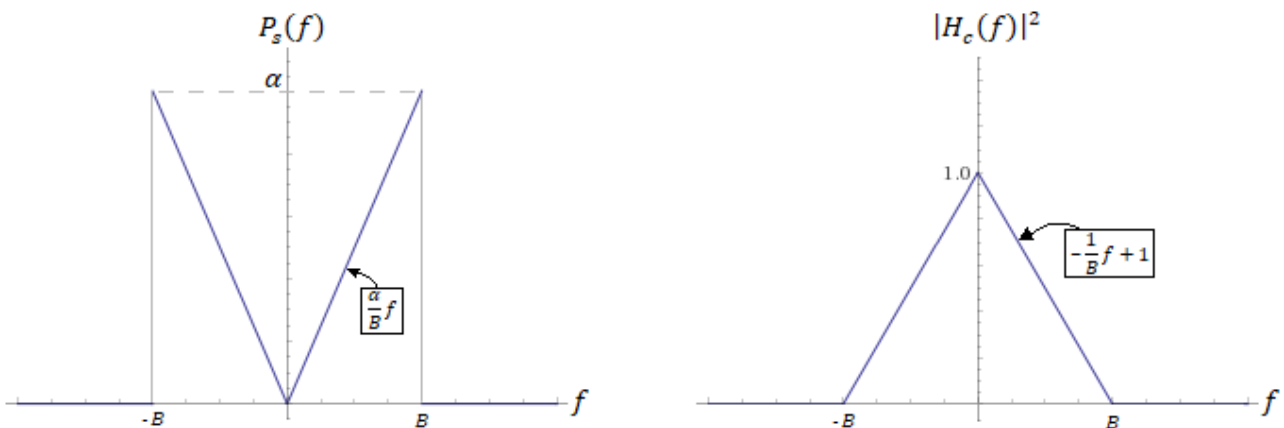
3) Rappresentando l'intero sistema nella forma seguente

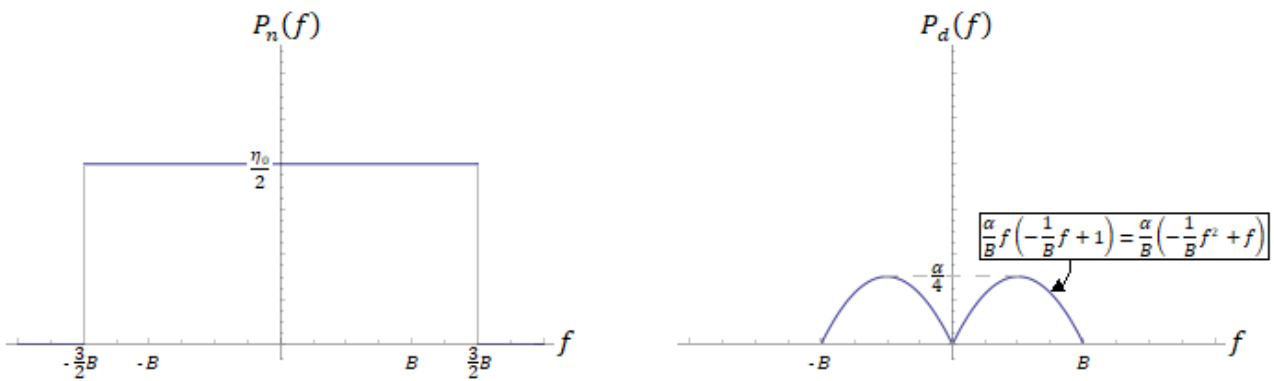


si ottiene che

$$z(t) = \underbrace{(h_c * s)(t)}_{d(t)} + n(t) \quad \text{e pertanto} \quad P_z(f) = \underbrace{|H_c(f)|^2 P_s(f)}_{P_d(f)} + P_n(f)$$

Graficamente, supponendo  $\alpha > 1$ , si osserva quanto mostrato di seguito





Il calcolo della potenza per il segnale  $d(t)$  può quindi essere effettuato ponendo

$$P_d = 2 \int_0^B P_d(f) df = \frac{2\alpha}{B} \int_0^B \left( -\frac{1}{B} f^2 + f \right) df = \frac{2\alpha}{B} \left[ -\frac{1}{B} \frac{f^3}{3} + \frac{f^2}{2} \right]_0^B = \frac{2\alpha}{B} \frac{B^2}{6} = \frac{\alpha B}{3}$$

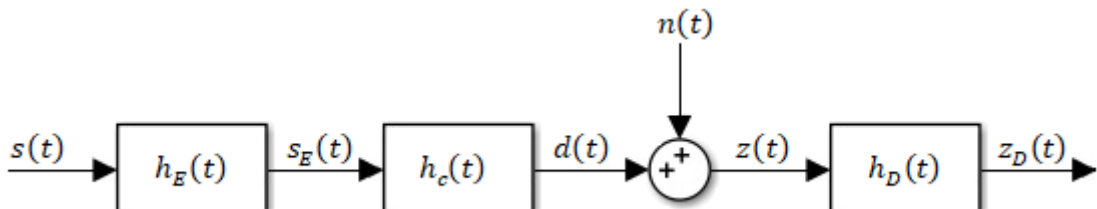
mentre la potenza del rumore è banalmente pari ad

$$P_n = 2 \frac{\eta_0}{2} \frac{3}{2} B = \frac{3}{2} \eta_0 B$$

Il rapporto segnale-rumore all'uscita del sistema (senza tener conto della distorsione, e pertanto considerando come segnale quello a valle della stessa) sarà quindi

$$\left( \frac{S}{N} \right) = \frac{P_d}{P_n} = \frac{\frac{\alpha B}{3}}{\frac{3}{2} \eta_0 B} = \frac{2\alpha}{9\eta_0}$$

L'applicazione di filtri di enfasi e de-enfasi, rispettivamente sul lato trasmittente e ricevente, è realizzata ponendo il sistema nella forma presentata di seguito



Le soluzioni per la risposta de filtri di enfasi e di de-enfasi, relativamente alla banda d'interesse, sono quindi ricavabili come segue

$$|H_E(f)|^2 = \frac{aK \sqrt{P_n(f)}}{|H_c(f)| \sqrt{P_s(f)}}$$

$$= \begin{cases} \frac{aK \sqrt{\frac{\eta_0}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{B}f + 1} \sqrt{\frac{\alpha}{B}f}} & f \in ]0; B[ \\ \frac{aK \sqrt{\frac{\eta_0}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{B}f + 1} \sqrt{-\frac{\alpha}{B}f}} & f \in ]-B; 0[ \end{cases} = \begin{cases} \frac{aK \sqrt{\frac{\eta_0 B}{2\alpha}}}{\sqrt{-\frac{1}{B}f^2 + f}} & f \in ]0; B[ \\ \frac{aK \sqrt{\frac{\eta_0 B}{2\alpha}}}{\sqrt{-\frac{1}{B}f^2 - f}} & f \in ]-B; 0[ \end{cases}$$

$$|H_D(f)|^2 = \frac{K \sqrt{P_s(f)}}{a|H_c(f)| \sqrt{P_n(f)}}$$

$$= \begin{cases} \frac{K \sqrt{\frac{\alpha}{B}f}}{a \sqrt{-\frac{1}{B}f + 1} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}}} & f \in ]0; B[ \\ \frac{K \sqrt{-\frac{\alpha}{B}f}}{a \sqrt{\frac{1}{B}f + 1} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}}} & f \in ]-B; 0[ \end{cases} = \begin{cases} \frac{\frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\alpha}{\eta_0 B}}}{\sqrt{-\frac{1}{B} + \frac{1}{f}}} & f \in ]0; B[ \\ \frac{\frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\alpha}{\eta_0 B}}}{\sqrt{-\frac{1}{B} - \frac{1}{f}}} & f \in ]-B; 0[ \end{cases}$$

le cui rappresentazioni grafiche (essendo i numeratori costanti) sono le seguenti

