

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA CAMPANIA Luigi Vanvitelli  
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE  
Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione  
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

**Teoria dei Segnali**

IIa Prova Intracorso

Prof. Francesco A. N. Palmieri

giovedì 22 novembre 2018

1. Si consideri il seguente processo aleatorio

$$Y(t) = X(t) \cos 2\pi f_0 t - X(t - \Delta) \sin^2 2\pi f_0 t,$$

dove  $X(t)$  è un processo aleatorio SSL avente spettro di potenza  $P_X(f) = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$  ( $f_0 \gg 2B$ ).

(a) [10pt] Calcolare media, autocorrelazione e spettro di potenza di  $Y(t)$ . Commentare sulla stazionarietà di  $Y(t)$

(b) [3pt] Valutare la coerenza del risultato ottenuto in (a) calcolando la trasformata di Fourier di  $Y(t)$  nell'ipotesi in cui  $X(t)$  sia un segnale deterministico passa-basso sulla banda  $[-B, B]$ .

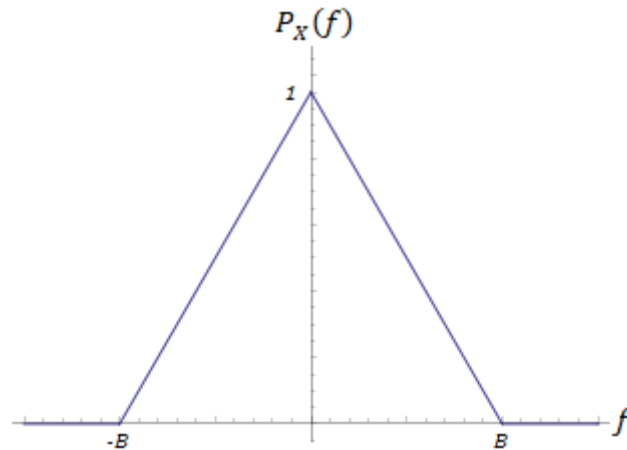
2. [10pt] Siano  $x(t)$  e  $n(t)$  due processi aleatori incoerenti SSL aventi autocorrelazioni  $R_x(\tau)$  e  $R_n(\tau)$  e si consideri il processo

$$z(t) = (h_e * x)(t) + n(t),$$

dove  $h_e(t) = h(t) + h(t - \Delta)$ , con  $\Delta$  un ritardo deterministico e  $h(t)$  una risposta impulsiva nota. Valutare una espressione per la autocorrelazione e lo spettro di potenza di  $z(t)$ . (Sugg.: Disegnare lo schema a blocchi del sistema con due rami paralleli).

3. [10pt] Un segnale aleatorio SSL  $s(t)$  ha autocorrelazione  $R_s(\tau) = e^{-a|\tau|}$ . Esso è trasmesso su un canale non distortore passa-basso ideale a guadagno unitario con frequenza di taglio pari a  $B$ . Il canale introduce rumore additivo bianco avente spettro di potenza pari a  $\eta_0/2$ . Proporre e schizzare filtri di enfasi e de-enfasi per il sistema.

1) Lo spettro di potenza di  $X(t)$  può essere espresso graficamente come di seguito



a) Il calcolo della media di  $Y(t)$  si può facilmente ricavare osservando che

$$\begin{aligned} E\{Y(t)\} &= E\{X(t) \cos 2\pi f_0 t - X(t - \Delta) \sin^2 2\pi f_0 t\} \\ &= \underbrace{E\{X(t)\}}_{=0} \cos 2\pi f_0 t - \underbrace{E\{X(t - \Delta)\}}_{=0} \sin^2 2\pi f_0 t = 0 \end{aligned}$$

dove il fatto che la media di  $X(t)$  sia nulla si desume semplicemente dall'osservazione dello spettro di potenza, ovvero dalla mancanza nello stesso di una delta in zero.

Ricordando che

$$\sin^2 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\pi f_0 t$$

possiamo inoltre calcolare l'autocorrelazione di  $Y(t)$  ponendo

$$\begin{aligned} R_Y(t; \tau) &= E\{Y(t)Y(t - \tau)\} \\ &= E \left\{ \left[ X(t) \cos 2\pi f_0 t - \frac{X(t - \Delta)}{2} + \frac{X(t - \Delta)}{2} \cos 4\pi f_0 t \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ X(t - \tau) \cos 2\pi f_0(t - \tau) - \frac{X(t - \tau - \Delta)}{2} + \frac{X(t - \tau - \Delta)}{2} \cos 4\pi f_0(t - \tau) \right] \right\} \end{aligned}$$

Essendo  $X(t)$  un processo SSL, e ricordando la formula di Werner

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

unitamente al fatto che il coseno è una funzione pari ( $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ), la valutazione dell'autocorrelazione di  $Y(t)$  può essere svolta nella maniera seguente

$$\begin{aligned}
R_Y(t; \tau) &= E\{X(t)X(t-\tau)\} \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau) \\
&\quad - \frac{1}{2} E\{X(t)X(t-\tau-\Delta)\} \cos 2\pi f_0 t \\
&\quad + \frac{1}{2} E\{X(t)X(t-\tau-\Delta)\} \cos 2\pi f_0 t \cos 4\pi f_0(t-\tau) \\
&\quad - \frac{1}{2} E\{X(t-\Delta)X(t-\tau)\} \cos 2\pi f_0(t-\tau) + \frac{1}{4} E\{X(t-\Delta)X(t-\tau-\Delta)\} \\
&\quad - \frac{1}{4} E\{X(t-\Delta)X(t-\tau-\Delta)\} \cos 4\pi f_0(t-\tau) \\
&\quad + \frac{1}{2} E\{X(t-\Delta)X(t-\tau)\} \cos 4\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau) \\
&\quad - \frac{1}{4} E\{X(t-\Delta)X(t-\tau-\Delta)\} \cos 4\pi f_0 t \\
&\quad + \frac{1}{4} E\{X(t-\Delta)X(t-\tau-\Delta)\} \cos 4\pi f_0 t \cos 4\pi f_0(t-\tau) \\
&= \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_0(2t-\tau) + \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{1}{2} R_X(\tau+\Delta) \cos 2\pi f_0 t \\
&\quad + \frac{1}{4} R_X(\tau+\Delta) \cos 2\pi f_0(3t-2\tau) + \frac{1}{4} R_X(\tau+\Delta) \cos 2\pi f_0(t-2\tau) \\
&\quad - \frac{1}{2} R_X(\tau-\Delta) \cos 2\pi f_0(t-\tau) + \frac{1}{4} R_X(\tau) - \frac{1}{4} R_X(\tau) \cos 4\pi f_0(t-\tau) \\
&\quad + \frac{1}{4} R_X(\tau-\Delta) \cos 2\pi f_0(3t-\tau) + \frac{1}{4} R_X(\tau-\Delta) \cos 2\pi f_0(t+\tau) \\
&\quad - \frac{1}{4} R_X(\tau) \cos 4\pi f_0 t \\
&\quad + \frac{1}{8} R_X(\tau) \cos 4\pi f_0(2t-\tau) + \frac{1}{8} R_X(\tau) \cos 4\pi f_0 \tau
\end{aligned}$$

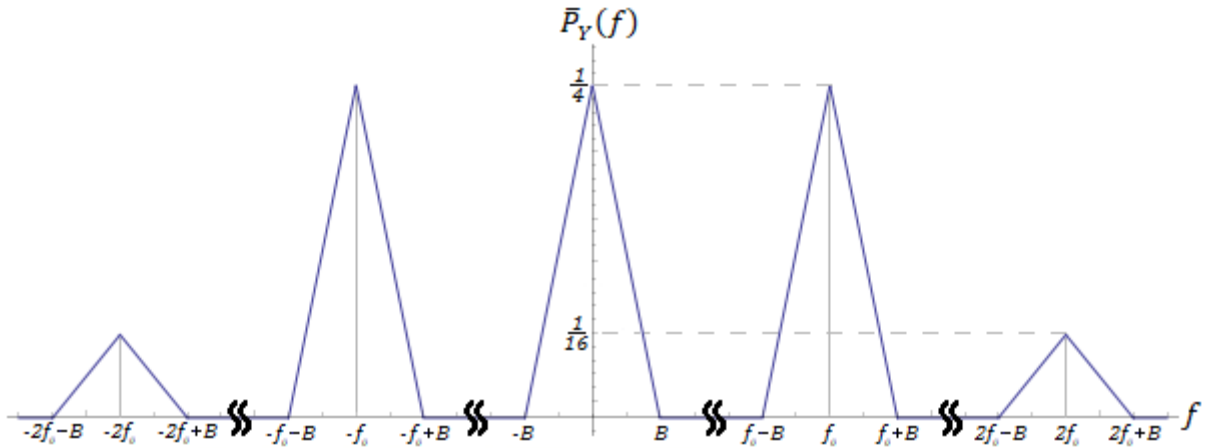
Poiché l'autocorrelazione di  $Y(t)$  dipende da  $t$  il processo stesso non risulta essere SSL. Tuttavia, è possibile osservare che tale tipo di dipendenza è periodica di periodo  $1/f_0$ , e pertanto  $Y(t)$  risulta essere ciclostazionario. Il calcolo dell'autocorrelazione mediata su un periodo fornisce infatti

$$\bar{R}_Y(\tau) = f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} R_Y(t; \tau) dt = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{1}{4} R_X(\tau) + \frac{1}{8} R_X(\tau) \cos 4\pi f_0 \tau$$

A questo punto è possibile valutare lo spettro di potenza (medio) di  $Y(t)$ , ottenendo

$$\begin{aligned}
\bar{P}_Y(f) &= \mathcal{F}\{\bar{R}_Y(\tau)\} \\
&= \frac{1}{4} [P_X(f-f_0) + P_X(f+f_0)] + \frac{1}{4} P_X(f) + \frac{1}{16} [P_X(f-2f_0) + P_X(f+2f_0)]
\end{aligned}$$

che è rappresentato graficamente di seguito



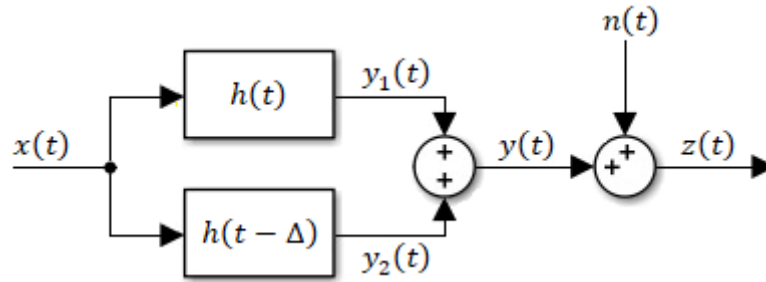
b) Considerando il processo deterministico

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cos 2\pi f_0 t - x(t - \Delta) \sin^2 2\pi f_0 t \\ &= x(t) \cos 2\pi f_0 t - \frac{1}{2}x(t - \Delta) + \frac{1}{2}x(t - \Delta) \cos 4\pi f_0 t \end{aligned}$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} Y(f) &= \mathcal{F}\{y(t)\} \\ &= X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] - \frac{1}{2}X(f)e^{-j2\pi f\Delta} \\ &\quad + \frac{1}{2}X(f)e^{-j2\pi f\Delta} * \frac{1}{2}[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)] \\ &= \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)] - \frac{1}{2}X(f)e^{-j2\pi f\Delta} \\ &\quad + \frac{1}{4}[X(f - 2f_0)e^{-j2\pi(f-2f_0)\Delta} + X(f + 2f_0)e^{-j2\pi(f+2f_0)\Delta}] \\ &= \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)] - \frac{1}{2}X(f)e^{-j2\pi f\Delta} \\ &\quad + \frac{1}{4}[X(f - 2f_0)e^{j4\pi f_0\Delta} + X(f + 2f_0)e^{-j4\pi f_0\Delta}]e^{-j2\pi f\Delta} \end{aligned}$$

Poiché quindi, per ipotesi, il segnale deterministico  $x(t)$  è un passa-basso nella banda  $[-B; B]$ , si può notare che lo spettro  $Y(f)$  assume effettivamente una forma coerente col precedente risultato ottenuto per il processo aleatorio.



- 2) Rappresentando l'intero sistema attraverso lo schema a blocchi in figura, in cui (come da suggerimento) si è scelto di rappresentare la funzione di trasferimento separandone i contributi su due rami paralleli, si può valutare l'autocorrelazione di  $z(t)$  osservando che

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= E\{y(t)y(t-\tau)\} = E\{[y_1(t) + y_2(t)][y_1(t-\tau) + y_2(t-\tau)]\} \\
 &= R_{y_1}(\tau) + R_{y_2}(\tau) + R_{y_1y_2}(\tau) + R_{y_2y_1}(\tau) \\
 &= R_{y_1}(\tau) + R_{y_2}(\tau) + R_{y_1y_2}(\tau) + R_{y_1y_2}(-\tau) \\
 &= (r_{h(t)} * R_x)(\tau) + (r_{h(t-\Delta)} * R_x)(\tau) + [r_{h(t)h(t-\Delta)}(\tau) + r_{h(t)h(t-\Delta)}(-\tau)] * R_x(\tau)
 \end{aligned}$$

Analizzando attentamente i singoli contributi deterministici si può tuttavia notare che

$$\begin{aligned}
 r_{h(t-\Delta)}(\tau) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\Delta)h(t-\tau-\Delta) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)h(\eta-\tau) dt = r_{h(t)}(\tau) \\
 r_{h(t)h(t-\Delta)}(\tau) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t-\tau-\Delta) dt = r_{h(t)}(\tau + \Delta) \\
 r_{h(t)h(t-\Delta)}(-\tau) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t+\tau-\Delta) dt = r_{h(t)}(-\tau + \Delta) = r_{h(t)}(\tau - \Delta)
 \end{aligned}$$

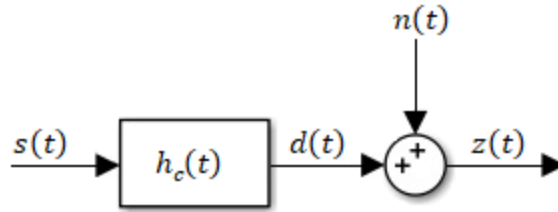
dove l'ultima equivalenza deriva dal fatto che l'autocorrelazione è per definizione una funzione a simmetria hermitiana. Infine, essendo  $x(t)$  ed  $n(t)$  incoerenti, otteniamo

$$\begin{aligned}
 R_z(\tau) &= R_y(\tau) + R_n(\tau) \\
 &= [2r_{h(t)}(\tau) + r_{h(t)}(\tau + \Delta) + r_{h(t)}(\tau - \Delta)] * R_x(\tau) + R_n(\tau)
 \end{aligned}$$

attraverso cui è immediata anche la valutazione dello spettro di potenza

$$\begin{aligned}
 P_z(f) &= \mathcal{F}\{R_z(\tau)\} \\
 &= [2|H(f)|^2 + |H(f)|^2 e^{j2\pi f\Delta} + |H(f)|^2 e^{-j2\pi f\Delta}] P_x(f) + P_n(f) \\
 &= 2|H(f)|^2 \left[ 1 + \frac{e^{j2\pi f\Delta} + e^{-j2\pi f\Delta}}{2} \right] P_x(f) + P_n(f) \\
 &= 2|H(f)|^2 [1 + \cos 2\pi f\Delta] P_x(f) + P_n(f)
 \end{aligned}$$

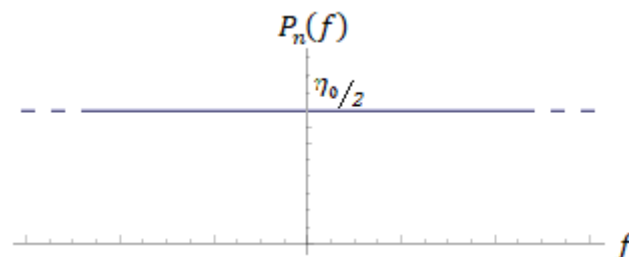
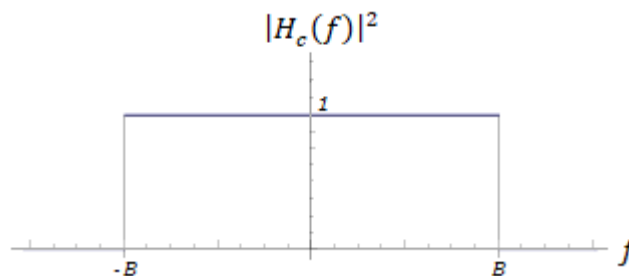
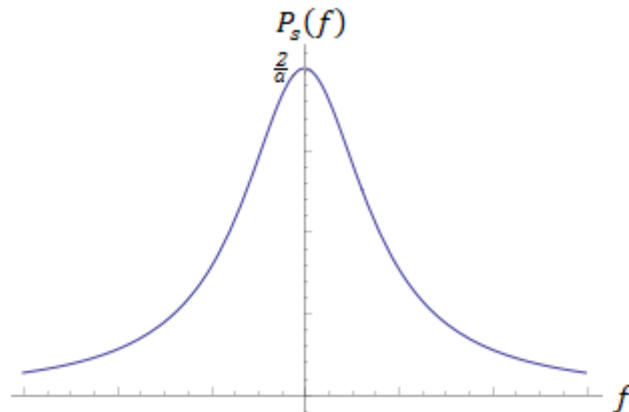
3) L'intero sistema può essere rappresentato nella forma seguente



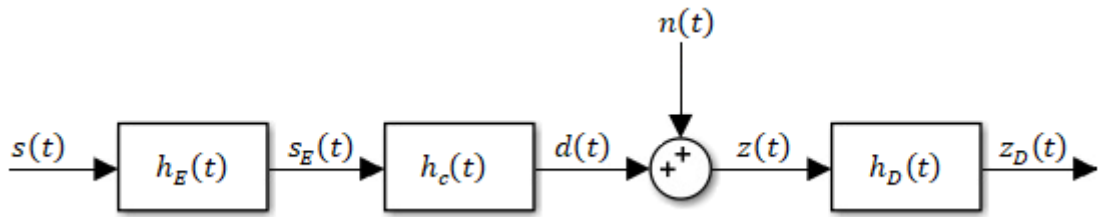
Dall'autocorrelazione di  $s(t)$  è possibile valutarne lo spettro di potenza ponendo

$$\begin{aligned}
 P_s(f) &= \mathcal{F}\{R_s(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-a\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)\tau} d\tau = \frac{e^{(a-j2\pi f)\tau}}{a-j2\pi f} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(a+j2\pi f)\tau}}{-(a+j2\pi f)} \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}
 \end{aligned}$$

Graficamente abbiamo



L'applicazione di filtri di enfasi e de-enfasi, rispettivamente sul lato trasmittente e ricevente, è realizzata ponendo il sistema nella forma presentata di seguito



La soluzione per la risposta dei filtri, relativamente alla banda d'interesse, è quindi

$$|H_E(f)|^2 = \frac{\alpha K}{|H_C(f)|} \frac{\sqrt{P_n(f)}}{\sqrt{P_s(f)}} = \frac{\alpha K}{\sqrt{1}} \frac{\sqrt{\frac{\eta_0}{2}}}{\sqrt{\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}}} = \alpha K \sqrt{\frac{\eta_0}{4a}} \sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad f \in [-B; B]$$

$$|H_D(f)|^2 = \frac{K}{\alpha |H_C(f)|} \frac{\sqrt{P_s(f)}}{\sqrt{P_n(f)}} = \frac{K}{\alpha \sqrt{1}} \frac{\sqrt{\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}}}{\sqrt{\frac{\eta_0}{2}}} = \frac{K}{\alpha} \sqrt{\frac{4a}{\eta_0}} \sqrt{\frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad f \in [-B; B]$$

la cui rappresentazione grafica è la seguente

