

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA CAMPANIA Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Informatica

Teoria dei Segnali
IIa Prova Intracorso
Prof. Francesco A. N. Palmieri
giovedì 28 novembre 2019

1. [11pt] Si consideri il seguente segnale

$$Y(t) = X(t) + X(t - \Delta) + X(t - 2\Delta), \quad (1)$$

dove $X(t)$ è un processo aleatorio SSL avente spettro di potenza $P_X(f) = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ con $\Delta \ll (1/B)$.

- (a) Calcolare media, autocorrelazione e spettro di potenza di $Y(t)$.
- (b) Schizzare al meglio lo spettro di potenza di $Y(t)$ (ricordare che $\Delta \ll (1/B)$).

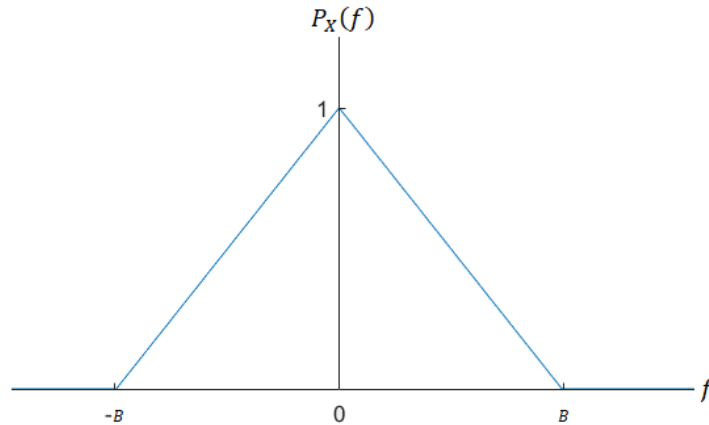
2. [11pt] Un segnale $s(t)$ aleatorio SSL con spettro di potenza $P_X(f) = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ è contaminato da un rumore additivo passa-basso avente spettro di potenza piatto pari a η_0 fino a $2B$. Tale segnale $Y(t)$ è trasmesso su un canale lineare distorcente avente risposta di energia pari a $|H_c(f)|^2 = \Lambda\left(\frac{f}{3B}\right)$. Il canale introduce un ulteriore rumore additivo a spettro piatto pari a η_1 fino alla frequenza $B/2$.

- (a) Valutare il rapporto segnale/rumore in uscita al sistema.
- (b) Proporre una espressione analitica dei filtri di enfasi e de-enfasi nelle varie bande.

3. [11pt] Si consideri un sistema lineare tempo-discreto avente risposta impulsiva $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 2]$.

- (a) Calcolare la risposta armonica $H(\nu)$ e schizzare l'andamento di modulo e fase.
- (b) Calcolare la risposta del sistema alla sequenza 'ingresso $\{x[n]\} = \{2, 2, 1, 1, 2, 2\}$ (il primo campione è a $n = 0$; i valori non mostrati sono nulli).

1) Lo spettro di potenza di $X(t)$ può essere espresso graficamente come di seguito



a) Il calcolo della media di $Y(t)$ si può facilmente ricavare osservando che

$$\begin{aligned} E\{Y(t)\} &= E\{X(t) + X(t - \Delta) + X(t - 2\Delta)\} \\ &= \underbrace{E\{X(t)\}}_{=0} + \underbrace{E\{X(t - \Delta)\}}_{=0} + \underbrace{E\{X(t - 2\Delta)\}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

dove il fatto che la media di $X(t)$ sia nulla si desume semplicemente dall'osservazione dello spettro di potenza, ovvero dalla mancanza nello stesso di una delta in zero. Possiamo quindi calcolare l'autocorrelazione di $Y(t)$ ponendo

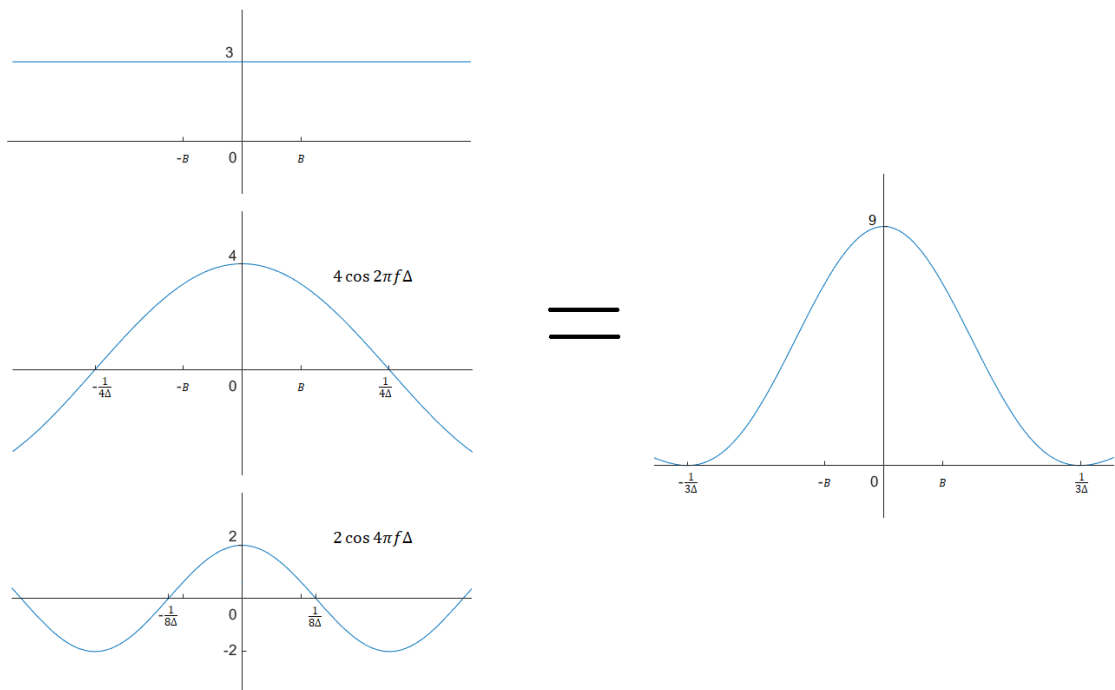
$$\begin{aligned} R_Y(t; \tau) &= E\{Y(t)Y(t - \tau)\} \\ &= E\{[X(t) + X(t - \Delta) + X(t - 2\Delta)] \\ &\quad [X(t - \tau) + X(t - \Delta - \tau) + X(t - 2\Delta - \tau)]\} \\ &= E\{X(t)X(t - \tau)\} + E\{X(t)X(t - \Delta - \tau)\} + E\{X(t)X(t - 2\Delta - \tau)\} \\ &\quad + E\{X(t - \Delta)X(t - \tau)\} + E\{X(t - \Delta)X(t - \Delta - \tau)\} \\ &\quad + E\{X(t - \Delta)X(t - 2\Delta - \tau)\} + E\{X(t - 2\Delta)X(t - \tau)\} \\ &\quad + E\{X(t - 2\Delta)X(t - \Delta - \tau)\} + E\{X(t - 2\Delta)X(t - 2\Delta - \tau)\} \\ &= R_X(\tau) + R_X(\tau + \Delta) + R_X(\tau + 2\Delta) + R_X(\tau - \Delta) + R_X(\tau) \\ &\quad + R_X(\tau + \Delta) + R_X(\tau - 2\Delta) + R_X(\tau - \Delta) + R_X(\tau) \\ &= 3R_X(\tau) + 2R_X(\tau + \Delta) + 2R_X(\tau - \Delta) + R_X(\tau + 2\Delta) + R_X(\tau - 2\Delta) \end{aligned}$$

Poiché l'autocorrelazione di $Y(t)$ non dipende da t il processo stesso risulta essere SSL.

b) A questo punto è possibile valutare lo spettro di potenza di $Y(t)$, ottenendo

$$\begin{aligned}
 P_Y(f) &= \mathcal{F}\{R_Y(\tau)\} \\
 &= 3P_X(f) + 2e^{j2\pi f\Delta}P_X(f) + 2e^{-j2\pi f\Delta}P_X(f) + e^{j4\pi f\Delta}P_X(f) + e^{-j4\pi f\Delta}P_X(f) \\
 &= P_X(f)[3 + 2e^{j2\pi f\Delta} + 2e^{-j2\pi f\Delta} + e^{j4\pi f\Delta} + e^{-j4\pi f\Delta}] \\
 &= P_X(f) \underbrace{[3 + 4 \cos 2\pi f\Delta + 2 \cos 4\pi f\Delta]}_{G(f)} \\
 &= P_X(f)G(f)
 \end{aligned}$$

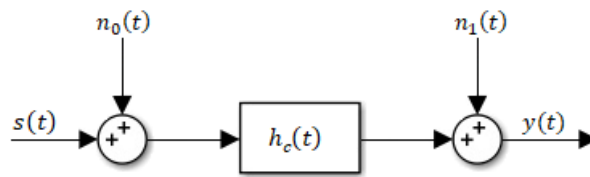
Osservando con attenzione l'andamento della $G(f)$ si nota però che, essendo $1/\Delta \gg B$, essa assume un andamento quasi costante nella banda d'interesse $f \in [-B; B]$



Poiché all'esterno dell'intervallo $[-B; B]$ lo spettro di potenza di $X(t)$ è nullo, e considerando pressoché costante e pari a 9 il valore di $G(f)$ in tale intervallo, si può quindi scrivere che

$$P_Y(f) \approx 9P_X(f)$$

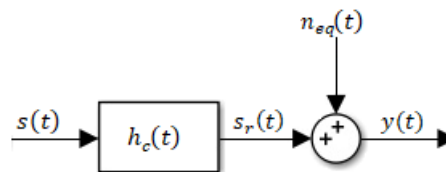
2) Rappresentando l'intero sistema nella forma seguente



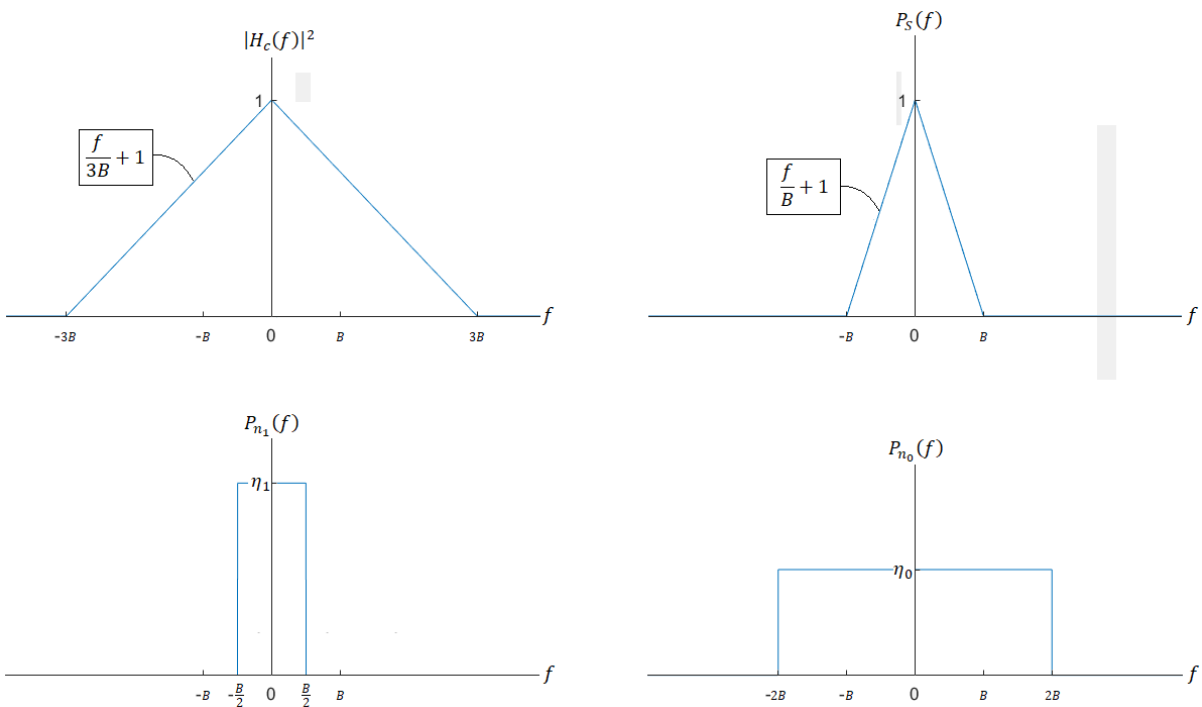
si ottiene che

$$y(t) = \underbrace{(h_c * s)(t)}_{s_r(t)} + \underbrace{(h_c * n_0)(t) + n_1(t)}_{n_{eq}(t)} = s_r(t) + n_{eq}(t)$$

e quindi lo schema di partenza può anche essere ridisegnato come nella figura sottostante



Inoltre, lo spettro dei vari segnali può essere rappresentato come di seguito



a) Il calcolo della potenza per il segnale $s_r(t)$ può quindi essere effettuato ponendo

$$\begin{aligned} P_{S_r} &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_c(f)|^2 P_s(f) df = \int_{-B}^B \Lambda\left(\frac{f}{3B}\right) \Lambda\left(\frac{f}{B}\right) df = 2 \int_{-B}^0 \left(\frac{f}{3B} + 1\right) \left(\frac{f}{B} + 1\right) df \\ &= 2 \int_{-B}^0 \left(\frac{f^2}{3B^2} + \frac{4f}{3B} + 1\right) df = 2 \left[\frac{f^3}{9B^2} + \frac{2f^2}{3B} + f \right]_{-B}^0 = \frac{2B}{9} - \frac{4B}{3} + 2B = \frac{8B}{9} \end{aligned}$$

mentre la potenza dei rumori in ricezione può essere calcolata come segue

$$P_{n_{0,r}} = \int_{-\infty}^{\infty} |H_c(f)|^2 P_{n_0}(f) df = \eta_0 \int_{-2B}^{2B} \Lambda\left(\frac{f}{3B}\right) df = 2\eta_0 \int_{-2B}^0 \left(\frac{f}{3B} + 1\right) df$$

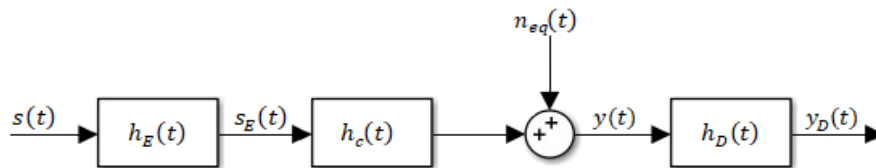
$$= 2\eta_0 \left[\frac{f^2}{6B} + f \right]_{-2B}^0 = -\frac{4\eta_0 B}{3} + 4\eta_0 B = \frac{8\eta_0 B}{3}$$

$$P_{n_1} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_1}(f) df = \eta_1 \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} df = \eta_1 \left[f \right]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = \eta_1 B$$

Il rapporto segnale-rumore all'uscita del sistema sarà quindi

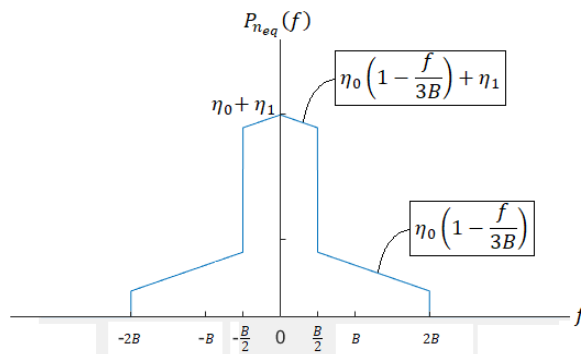
$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{P_{s_r}}{P_{n_{eq}}} = \frac{P_{s_r}}{P_{n_{0,r}} + P_{n_1}} = \frac{\frac{8B}{9}}{\frac{8\eta_0 B}{3} + \eta_1 B} = \frac{1}{3\left(\eta_0 + \frac{3\eta_1}{8}\right)}$$

- b) L'applicazione di filtri di enfasi e de-enfasi, rispettivamente sul lato trasmettente e ricevente, è realizzata ponendo il sistema nella forma presentata di seguito



Dove il rumore equivalente a valle del canale ha ovviamente spettro di potenza pari ad

$$P_{n_{eq}}(f) = |H_c(f)|^2 P_{n_0}(f) + P_{n_1}(f)$$



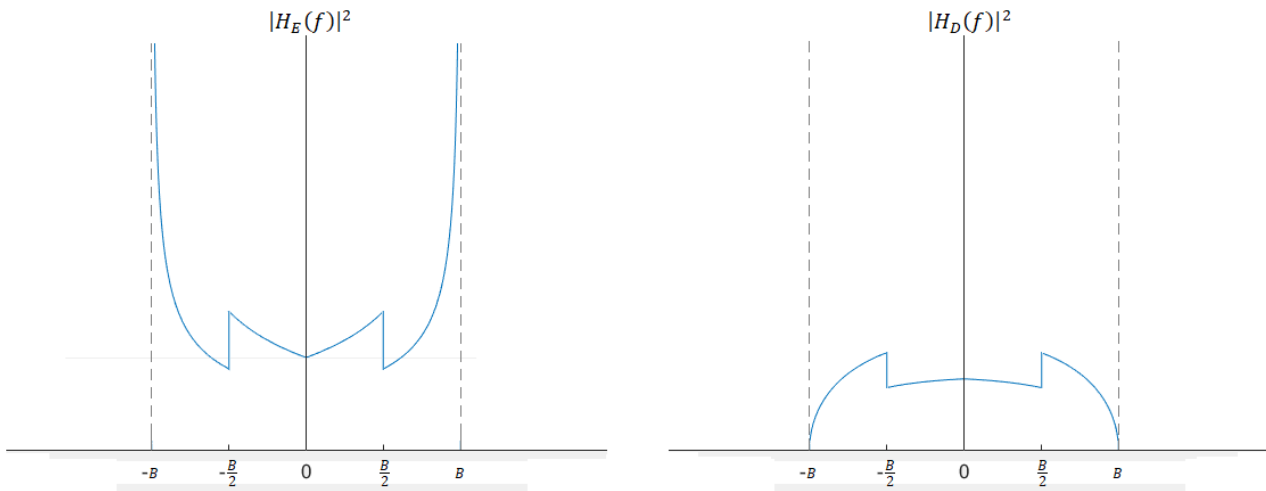
La soluzione per la risposta dei filtri dovrà tuttavia essere valutata solo relativamente alla banda d'interesse, ossia considerando $f \in [-B; B]$ ed eliminando tutto ciò che è all'esterno (che rappresenterà solo rumore).

Analiticamente avremo

$$|H_E(f)|^2 = \frac{\alpha K \sqrt{P_{neq}(f)}}{|H_C(f)| \sqrt{P_s(f)}} = \begin{cases} \frac{\alpha K \sqrt{\eta_0 \left(1 - \frac{f}{3B}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{f}{3B}} \sqrt{1 - \frac{f}{B}}} & f \in \left] \frac{B}{2}; B \right[\\ \frac{\alpha K \sqrt{\eta_0 \left(1 - \frac{f}{3B}\right) + \eta_1}}{\sqrt{1 - \frac{f}{3B}} \sqrt{1 - \frac{f}{B}}} & f \in \left] 0; \frac{B}{2} \right[\\ \frac{\alpha K \sqrt{\eta_0 \left(\frac{f}{3B} + 1\right) + \eta_1}}{\sqrt{\frac{f}{3B} + 1} \sqrt{\frac{f}{B} + 1}} & f \in \left] -\frac{B}{2}; 0 \right[\\ \frac{\alpha K \sqrt{\eta_0 \left(\frac{f}{3B} + 1\right)}}{\sqrt{\frac{f}{3B} + 1} \sqrt{\frac{f}{B} + 1}} & f \in \left] -B; -\frac{B}{2} \right[\end{cases} = \begin{cases} \frac{\alpha K \sqrt{\eta_0}}{\sqrt{1 - \frac{|f|}{B}}} & f \in \left] -B; -\frac{B}{2} \right[\cup \left] \frac{B}{2}; B \right[\\ \alpha K \sqrt{\eta_0 + \frac{3B\eta_1}{3B - |f|}} & f \in \left] -\frac{B}{2}; \frac{B}{2} \right[\end{cases}$$

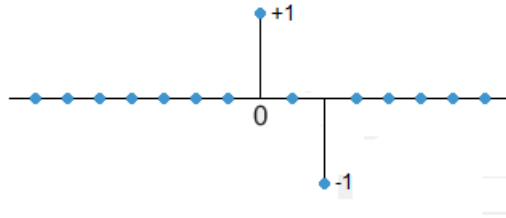
$$|H_D(f)|^2 = \frac{K \sqrt{P_s(f)}}{\alpha |H_C(f)| \sqrt{P_{neq}(f)}} = \begin{cases} \frac{K \sqrt{1 - \frac{f}{B}}}{\alpha \sqrt{1 - \frac{f}{3B}} \sqrt{\eta_0 \left(1 - \frac{f}{3B}\right)}} & f \in \left] \frac{B}{2}; B \right[\\ \frac{K \sqrt{1 - \frac{f}{B}}}{\alpha \sqrt{1 - \frac{f}{3B}} \sqrt{\eta_0 \left(1 - \frac{f}{3B}\right) + \eta_1}} & f \in \left] 0; \frac{B}{2} \right[\\ \frac{K \sqrt{\frac{f}{B} + 1}}{\alpha \sqrt{\frac{f}{3B} + 1} \sqrt{\eta_0 \left(\frac{f}{3B} + 1\right) + \eta_1}} & f \in \left] -\frac{B}{2}; 0 \right[\\ \frac{K \sqrt{\frac{f}{B} + 1}}{\alpha \sqrt{\frac{f}{3B} + 1} \sqrt{\eta_0 \left(\frac{f}{3B} + 1\right)}} & f \in \left] -B; -\frac{B}{2} \right[\end{cases} = \begin{cases} \frac{K \sqrt{1 - \frac{|f|}{B}}}{\alpha \left(1 - \frac{|f|}{3B}\right) \sqrt{\eta_0}} & f \in \left] -B; -\frac{B}{2} \right[\cup \left] \frac{B}{2}; B \right[\\ \frac{K \sqrt{1 - \frac{|f|}{B}}}{\alpha \left(1 - \frac{|f|}{3B}\right) \sqrt{\eta_0 + \frac{3B\eta_1}{3B - |f|}}} & f \in \left] -\frac{B}{2}; \frac{B}{2} \right[\end{cases}$$

le cui rappresentazioni grafiche (prescindendo dai valori costanti) sono le seguenti



3) La rappresentazione della risposta impulsiva del tempo è mostrata di seguito

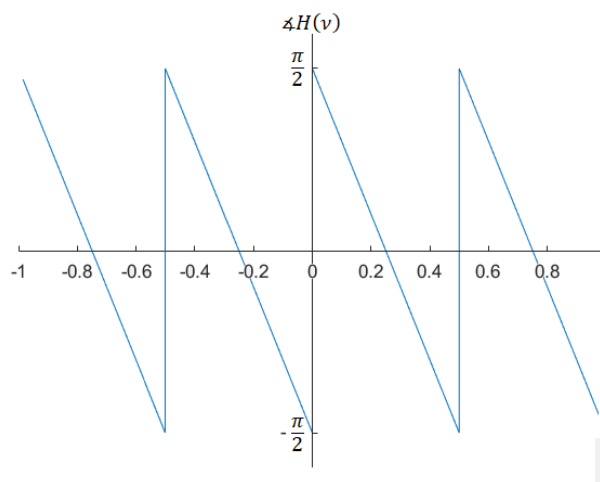
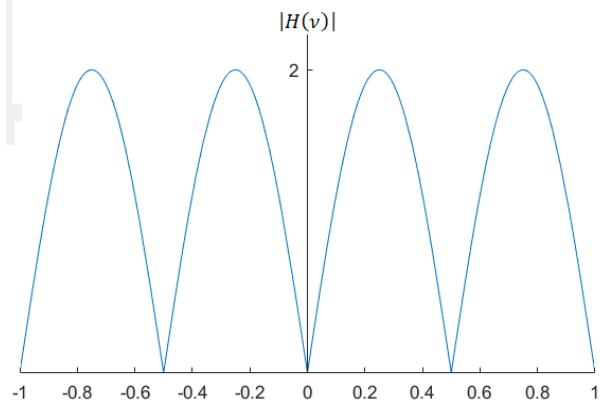
$$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 2]$$



a) La risposta armonica può essere valutata direttamente attraverso la trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT) della risposta impulsiva, ottenendo

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi\nu n} = 1 - e^{-j4\pi\nu} \\ &= 2je^{-j2\pi\nu} \left(\frac{e^{j2\pi\nu} - e^{-j2\pi\nu}}{2j} \right) = 2je^{-j2\pi\nu} \sin 2\pi\nu \end{aligned}$$

dove i diagrammi di modulo $|H(\nu)| = 2|\sin 2\pi\nu|$ e fase $\angle H(\nu) = \frac{\pi}{2} - 2\pi\nu + \angle \sin 2\pi\nu$ sono mostrati di seguito



b) Il calcolo della risposta del sistema $y[n]$ all'ingresso $x[n] = \{2, 2, 1, 1, 2, 2\}$ può essere ottenuto per convoluzione con la risposta impulsiva attraverso

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

L'analisi della risposta può quindi essere effettuato per via grafica, come mostrato successivamente, ottenendo l'uscita $y[n] = \{2, 2, -1, -1, 1, 1, -2, -2\}$

