SOL. PI2. 27.11.2023

. 1

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA CAMPANIA Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronia e Informatica

IIa Prova Intracorso AA 2023-24
Teoria dei Segnali
Prof. Francesco A. N. Palmieri
lunedí 27 novembre 2023

SOLUZIONI

1. [34pt] Un segnale audio $x(t)$ si propaga in un ambiente riflettente ed é ricevuto come la sovrapposizione

$$y(t) = \frac{1}{3}x(t - \Delta_1) + \frac{1}{9}x(t - \Delta_2) + n(t) \tag{1}$$

dove $x(t)$ é un processo aleatorio SSL avente spettro di potenza

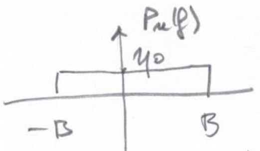
$$P_x(f) = \alpha_x \left(\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) - \Pi\left(\frac{f}{2b}\right) \right) \tag{2}$$

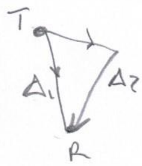
(b = 20Hz, B = 10 KHz) e $n(t)$ é rumore additivo piatto nella banda [0, B] con spettro di potenza η_0. Calcolare: (a) la risposta armonica del sistema di propagazione; (b) autocorrelazione e spettro di potenza del segnale ricevuto; (c) il rapporto segnale-rumore .

2.[33 pt] Un segnale $s(t)$ aleatorio SSL con spettro di potenza $P_s(f) = \alpha\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ modula in AM una portante di ampiezza A a frequenza $f_0 >> B$ con indice di modulazione k. Al ricevitore al segnale si è aggiunto rumore passa-banda piatto nella banda del segnale modulato avente potenza P_n. Calcolare autocorrelazione e spettro di potenza del segnale ricevuto.

3. [33 pt] Un segnale elettromagnetico ricevuto da una antenna ha uno spettro di potenza passa-banda piatto in $[B_1 B_1]$ e potenza P_s. L'antenna ha guadagno lineare g_A ed è trasparente al segnale. L'antenna preleva dall'ambiente rumore additivo piatto nella banda $[b_1 b_2]$ con $b_1 < B_1$ e $b_2 > B_2$ e potenza P_n, sovrapposto ad una interferenza passa-banda a banda piatta in $[b_3 b_4]$, con $B_1 < b_3 < b_4 < B_2$ e potenza P_i. Proporre un filtro ricevente e calcolare il rapporto segnale-rumore all'uscita del filtro.

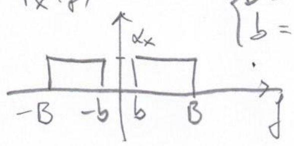
1.





$$y(t)=\underbrace{\frac{1}{3}x(t-\Delta_1)+\frac{1}{9}x(t-\Delta_2)}_{x_R(t)}+\underbrace{n(t)}_{n_R(t)}$$

$P_x(f)$



$\begin{cases} B = 10\,KHz \\ b = 20\,Hz \end{cases}$ $\quad P_x = (B-b)\alpha_x 2$ (potenza di $x(t)$)

$$R_x(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[P_x(f)]=\mathcal{F}^{-1}\left[\alpha_x\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)-\alpha_x\Pi\left(\frac{f}{2b}\right)\right]$$

$$=\alpha_x 2B\,\mathrm{sinc}\,2B\tau-\alpha_x 2b\,\mathrm{sinc}\,2b\tau$$

$$R_n(\tau)=\eta_0 2B\,\mathrm{sinc}\,2B\tau$$

$$h(t)=\frac{1}{3}\delta(t-\Delta_1)+\frac{1}{9}\delta(t-\Delta_2)$$

(a) $H(f)=\frac{1}{3}e^{-j2\pi f\Delta_1}+\frac{1}{9}e^{-j2\pi f\Delta_2}$

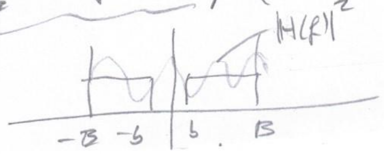
(b) $|H(f)|^2=H(f)H^*(f)=\left(\frac{1}{3}e^{-j2\pi f\Delta_1}+\frac{1}{9}e^{-j2\pi f\Delta_2}\right)\left(\frac{1}{3}e^{j2\pi f\Delta_1}+\frac{1}{9}e^{j2\pi f\Delta_2}\right)$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}e^{-j2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)}+\frac{1}{27}e^{j2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)}+\frac{1}{81}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{2}{27}\cos 2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)=\frac{10}{81}+\frac{2}{27}\cos 2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$P_{x_R}(f)=|H(f)|^2P_x(f)=\left(\frac{10}{81}+\frac{2}{27}\cos 2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)\right)\alpha_x\left(\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)-\Pi\left(\frac{f}{2b}\right)\right)$$

$$P_{n_R}(f)=P_n(f)$$



La autocorrelazione di $x_R(t)$ possiamo calcolarla direttamente come $R_{x_R}(\tau)=E[x_R(t)x_R(t-\tau)]$ oppure come anti-trasformata di $P_{x_R}(f)$:

$$R_{x_R}(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[|H(f)|^2P_x(f)]=\mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{10}{81}+\frac{1}{27}e^{-j2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)}+\frac{1}{27}e^{+j2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)}\right)P_x(f)\right]$$

$$=R_x(\tau)*\left[\frac{10}{81}\delta(\tau)+\frac{1}{27}\delta(\tau-(\Delta_1-\Delta_2))+\frac{1}{27}\delta(\tau+(\Delta_1-\Delta_2))\right]$$

$$=\frac{10}{81}R_x(\tau)+\frac{1}{27}R_x(\tau-(\Delta_1-\Delta_2))+\frac{1}{27}R_x(\tau+(\Delta_1-\Delta_2))$$

= sostituisci $R_x(\tau)$ calcolata sopra.

SOC.PI2.27112023

3e

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) + P_n(f)$$

$$R_y(\tau) = R_{x_R}(\tau) + R_n(\tau)$$

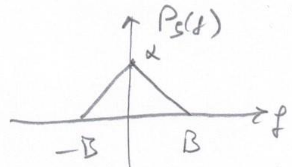
(c) $$\frac{S}{N} = \frac{P_{x_R}}{P_{n_R}} = \frac{2\int_b^B \alpha_x\left(\frac{10}{81} + \frac{2}{27}\cos 2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)\right)df}{2B\eta_0}$$

$$= \frac{\alpha_x}{B\eta_0}\left[\frac{10}{81}(B-b) + \frac{2}{27}\left.\frac{\sin 2\pi f(\Delta_1-\Delta_2)}{2\pi(\Delta_1-\Delta_2)}\right|_b^B\right]$$

$$= \frac{\alpha_x}{B\eta_0}\left[\frac{10}{81}(B-b) + \frac{\sin 2\pi B(\Delta_1-\Delta_2) - \sin 2\pi b(\Delta_1-\Delta_2)}{27\pi(\Delta_1-\Delta_2)}\right]$$

2.

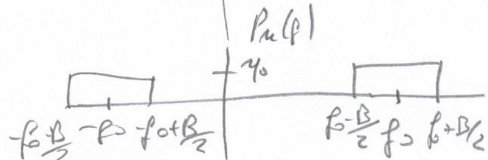
$s(t)$ SSL $\quad P_s(f) = \alpha\, \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$



$$R_s(\tau) = \alpha B \,\mathrm{sinc}^2 B\tau$$

$$z(t) = A(1+Ks(t))\cos 2\pi f_0 t$$

$$r(t) = z(t) + n(t)$$



$R_r(\tau) = R_z(\tau) + R_n(\tau)$ poiché incoerenti

$$P_n = 2B\eta_0$$

$$\eta_0 = \frac{P_n}{2B}$$

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_n(f)]$$
$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\eta_0\left(\Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right)+\Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right)\right]$$
$$= \eta_0 B\,\mathrm{sinc} B\tau\, e^{j2\pi f_0\tau} + \eta_0 B\,\mathrm{sinc} B\tau\, e^{-j2\pi f_0\tau}$$
$$= \eta_0 2B\,\mathrm{sinc} B\tau \cos 2\pi f_0\tau$$

$$R_z(t,\tau) = E\big[A(1+Ks(t))\cos 2\pi f_0 t \;\; A(1+Ks(t-\tau))\cos 2\pi f_0(t-\tau)\big]$$

$$= A^2 E\left[1 + K^2 s(t)s(t-\tau) + Ks(t) + Ks(t-\tau)\right] \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau)$$

le medie $E[s(t)]$ e $E[s(t-\tau)]$ sono nulle quindi

$$= A^2\left(1 + K^2 R_s(\tau)\right)\cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau)$$

Il processo è ciclostazionario con periodo $\frac{1}{f_0}$

$$= A^2\left(1+K^2R_s(\tau)\right)\left(\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0\tau + \cancel{\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0(2t-\tau)}\right)$$

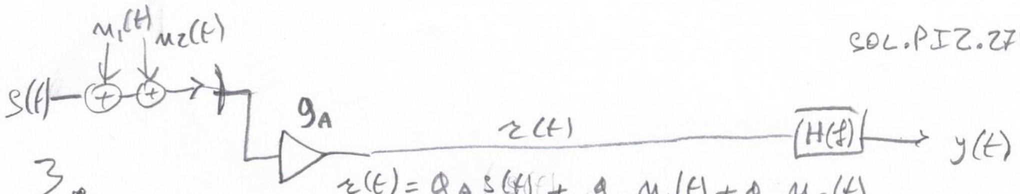
scompare mediante integrazione nel periodo

$$\overline{R}_z(\tau) = \frac{A^2}{2}\left(1+K^2R_s(\tau)\right)\cos 2\pi f_0\tau$$

$$\overline{P}_z(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f+f_0) + \frac{K^2}{2}P_s(f-f_0) + \frac{K^2}{2}P_s(f+f_0)$$

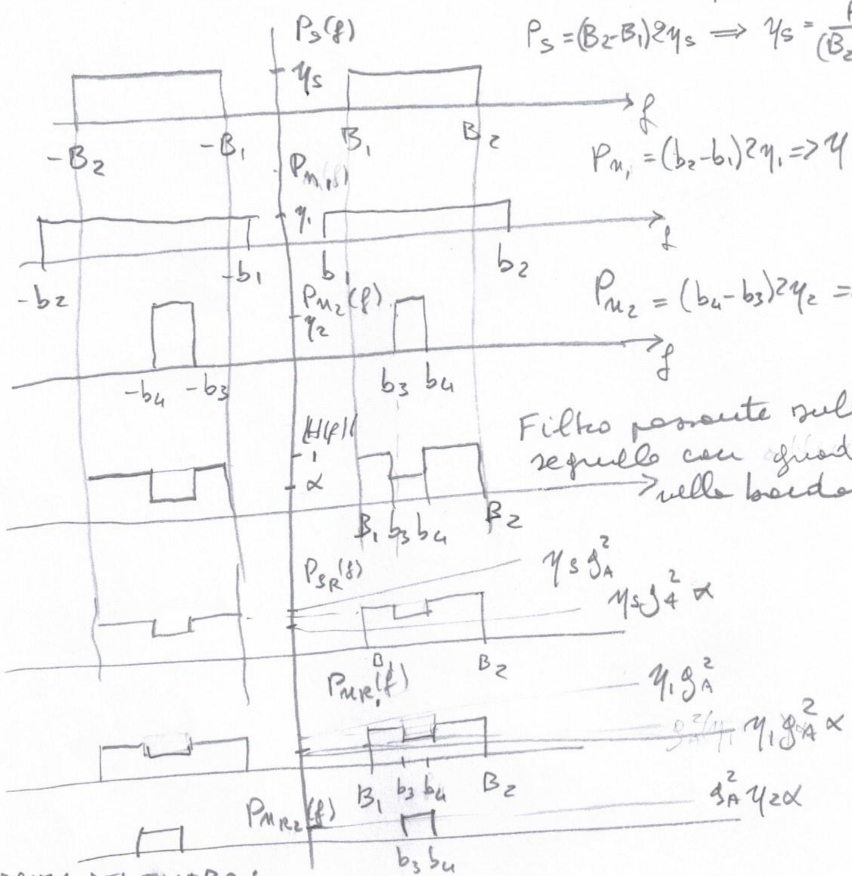
$$\overline{R}_r(\tau) = \overline{R}_z(\tau) + R_n(\tau)$$

3.



$$z(t) = g_A s(t) + g_A n_1(t) + g_A n_2(t)$$

$$y(t) = (h * z)(t) = \underbrace{g_A (h*s)(t)}_{s_R(t)} + \underbrace{g_A (h*n_1)(t) + g_A (h*n_2)(t)}_{n_R(t)}$$



$$P_s = (B_2 - B_1) 2\eta_s \Rightarrow \eta_s = \frac{P_s}{(B_2 - B_1)2}$$

$$P_{n_1} = (b_2 - b_1) 2\eta_1 \Rightarrow \eta_1 = \frac{P_{n_1}}{(b_2 - b_1)2}$$

$$P_{n_2} = (b_4 - b_3) 2\eta_2 \Rightarrow \eta_2 = \frac{P_{n_2}}{(b_4 - b_3)2}$$

Filtro passante sulla banda del segnale con guadagno $\alpha < 1$ nella banda $[b_3\ b_4]$.

PRIMA DEL FILTRO:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_s}{P_{n_1} + P_{n_2}} = \frac{\cancel{2}\eta_s (B_2 - B_1)}{\cancel{2}\eta_1 (b_2 - b_1) + \cancel{2}\eta_2 (b_4 - b_3)}$$

DOPO IL FILTRO:

$$P_y(f) = \underbrace{g_A^2 |H(f)|^2 P_s(f)}_{P_{s_R}(f)} + \underbrace{\overbrace{g_A^2 |H(f)|^2 P_{n_1}(f)}^{P_{n_{R1}}(f)} + \overbrace{g_A^2 |H(f)|^2 P_{n_2}(f)}^{P_{n_{R2}}(f)}}_{P_{n_R}(f)}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{\cancel{2}[\cancel{g_A^2}(B_2 - B_1)\eta_s - \cancel{g_A^2}(b_4 - b_3)\eta_s(1-\alpha)]}{\cancel{2}[\underbrace{\cancel{g_A^2}(B_2 - B_1)\eta_1 - \cancel{g_A^2}(b_4 - b_3)\eta_1(1-\alpha)}_{P_{n_{R1}}} + \underbrace{\cancel{g_A^2}(b_4 - b_3)\eta_2 \alpha}_{P_{n_{R2}}}]}$$