FILTRO A MINIMA DISTORSIONE

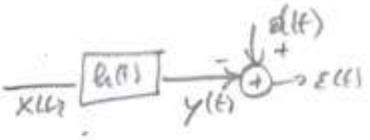
Appunti delle lezioni del
Corso di Teoria dei Segnali

Università della Campania
"Luigi Vanvitelli"

AA. 2023-24

Prof. FRANCESCO A. N. PALMIERI

La progettazione di un sistema lineare seguendo il paradigma "supervisionato", si formalizza come segue.



$x(t)$ è il segnale osservato, $d(t)$ è il segnale "desiderato", e si vuole minimizzare una misura della differenza $\varepsilon(t)$ tra $d(t)$ e $x(t)$.
Ovviamente nell'utilizzo del filtro $d(t)$ non è disponibile e la progettazione di $h(t)$ dovrà seguire una procedura probabilistica (model-based) o essere appreso dai dati (data-driven).
Non ci occuperemo qui di una eventuale procedura data-driven, ma piuttosto di una tecnica basata nel modello. Le assunzioni sono che $x(t)$ e $d(t)$ sono processi aleatori stazionari e congiuntamente stazionari. È evidente che $x(t)$ e $d(t)$ non possono essere indipendenti altrimenti la stima di uno dall'altro non avrebbe alcun senso.
Assumiamo per semplicità che sia $d(t)$ che $x(t)$ siano a media nulla.
Il processo differenza è:

$$\varepsilon(t) = d(t) - (h * x)(t)$$

ed è un processo aleatorio stazionario. Il nostro obiettivo è

$$h^o(t) = \arg\min_{h(t)} E[\varepsilon^2(t)]$$

ovvero minimizzare l'errore quadratico medio. La soluzione seguendo quella vista è abbastanza semplice.

La funzione di "costo" da minimizzare è

$$\mathcal{E}(h) = E[\varepsilon^2(t)] = E[(d(t) - (h*x)(t))^2]$$

$$= E\left[\left(d(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi\right)^2\right]$$

$\mathcal{E}(h)$ è una funzione quadratica di $h(t)$. Vediamo:

$$\mathcal{E}(h) = E[d^2(t)] - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, E[d(t)\, x(t-\xi)]\, d\xi + E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi\right)^2\right]$$

$$= \sigma_d^2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) R_{dx}(\xi)\, d\xi + E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1)\, x(t-\xi_1)\, d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2)\, x(t-\xi_2)\, d\xi_2\right]$$

$$= \sigma_d^2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) R_{dx}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) h(\xi_2) \underbrace{E[x(t-\xi_1)\, x(t-\xi_2)]}_{R_x(\xi_2-\xi_1)}\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$= \sigma_d^2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) R_{dx}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) R_x(\xi_2-\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2 \quad (**)$$

Ora calcoliamo la derivata di $\mathcal{E}(h)$ rispetto ad $h(t)$.

[Questa è una derivata che si definisce nel "Calcolo delle variazioni" (derivata di Frechet). Non serve qui ricordare tutta la teoria, basta pensare all'integrale come a una combinazione lineare.]

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h(\tau)} = \frac{\partial}{\partial h(\tau)} E\left[\left(d(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{\partial}{\partial h(\tau)}\left(d(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi\right)^2\right]$$

$$= E\left[2\left(d(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi\right)\left(-x(t-\tau)\right)\right]$$

$$= -2R_{dx}(\tau) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, E[x(t-\xi)\, x(t-\tau)]\, d\xi$$

$$= -2R_{dx}(\tau) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) R_x(\tau-\xi)\, d\xi \quad (*)$$

La soluzione $h^o(t)$ si ottiene ponendo la derivata uguale a zero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^o(\xi) R_x(\tau-\xi)\,d\xi = R_{dx}(\tau)$$

EQUAZIONE NORMALE.

Essendo la funzione di costo quadratica (a meno di singolarità) la soluzione è unica. Si tratta di un punto di minimo. Per verificare possiamo valutare la derivata seconda (derivando (*))

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2} = 2 R_x(\tau-\tau) = 2 R_x(0) > 0$$

L'equazione normale è più facilmente risolta nel dominio della frequenza

$$H^o(f)\, P_x(f) = P_{dx}(f)$$

$$\boxed{H^o(f) = \frac{P_{dx}(f)}{P_x(f)}}$$

FILTRO DI WIENER (NON CAUSALE)

La soluzione ottenuta è semplice ed è stata ottenuta senza imporre alcun vincolo. Infatti, come vedremo dagli esempi non è teoricamente fisicamente realizzabile ($h(t) \neq 0 \ \forall t$, ovvero non causale). Nella letteratura ci sono soluzioni più articolate in cui viene posto il vincolo di causalità. Tralasciamo queste estensioni qui visto la natura introduttiva di queste note. Tra l'altro come vedremo negli esempi, e come abbiamo visto anche in altri casi, una risposta causale approssimata può essere ottenuta troncando e traslando $h^o(t)$.

E' utile valutare anche l'errore quadratico medio risultante dal filtraggio ottimo. Da (**)

$$\mathcal{E}(h^\circ) = \sigma_d^2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} h^\circ(\xi) R_{dx}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} h^\circ(\xi_2) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h^\circ(\xi_1) R_x(\xi_2-\xi_1)\, d\xi_1}_{R_{dx}(\xi_2)}\, d\xi_2$$

$$\mathcal{E}(h^\circ) = \sigma_d^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} h^\circ(\xi) R_{dx}(\xi)\, d\xi$$

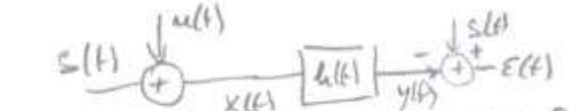
che si può scrivere usando $H^\circ(f)$ e $P_{dx}(f)$ come

$$\mathcal{E}(h^\circ) = \sigma_d^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} H^\circ(f)\, P_{dx}(f)\, df$$

$$= \sigma_d^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{dx}^2(f)}{P_x(f)}\, df$$

SEGNALE + RUMORE

La applicazione tipica del filtraggio di Wiener è ad un segnale ricevuto in presenza di rumore additivo



Qui il segnale senza rumore $s(t)$ è il "desiderato". Assumiamo come al solito processi a media nulla e stazionari e $s(t)$ e $n(t)$ incoerenti. La autocorrelazione di $x(t)$ è quindi

$$R_x(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau)$$

e la mutua correlazione

$$R_{sx}(\tau) = E[s(t)x(t-\tau)] = E[s(t)(s(t-\tau)+n(t-\tau))] = R_s(\tau)$$

Quindi

$$\boxed{H^o(f) = \frac{P_s(f)}{P_s(f)+P_n(f)}}$$

Definendo il rapporto segnale-rumore "spot"

$SNR(f) = \frac{P_s(f)}{P_n(f)}$, possiamo riscrivere la soluzione come

$$\boxed{H^o(f) = \frac{1}{1+\frac{1}{SNR(f)}}}$$

Per capire meglio cosa suggerisce la soluzione ottima, consideriamo due frequenze f_1 e f_2. Il guadagno a f_1 sarà maggiore di quello a f_2

$$\frac{1}{1+\frac{1}{SNR(f_1)}} > \frac{1}{1+SNR(f_2)}$$

se

$$1+\frac{1}{SNR(f_1)} < 1+\frac{1}{SNR(f_2)}$$

$$SNR(f_1) > SNR(f_2)$$

Quindi il filtro "segue" l'SNR(f), ovvero enfatizza le bande dove c'è più segnale.

Una soluzione fisicamente realizzabile di $H^0(f)$, osservando prima di tutto che $H^0(f)$ è reale e positiva, può essere usato come specifica di ampiezza, ignorando la fase.

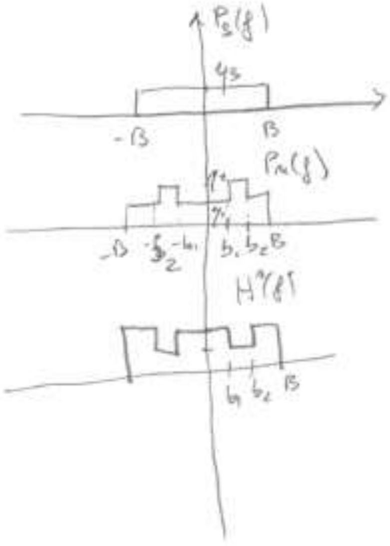
La distorsione in condizioni di ottimalità è

$$\mathcal{E}(h^0) = \sigma_s^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_s^2(f)}{P_s(f)+P_n(f)}\, df$$

Da notare che la distorsione è una misura più opportuna che il rapporto segnale-rumore in uscita in quanto il segnale è distorto ed è correlato al rumore residuo.

$$y(t) = \underbrace{(h^0 * s)(t)}_{s_R(t)} + \underbrace{(h^0 * n)(t)}_{n_R(t)}$$

ESEMPIO



Rumore piatto ma con una maggiore varianza nella banda $[b_1, b_2]$.

$$H^\circ(f) = \frac{P_s(f)}{P_s(f)+P_n(f)}$$

$$H^\circ(f) = \begin{cases} \dfrac{\eta_s}{\eta_s+\eta_1} & |f| \in [0,B] \sim [b_1,b_2] \\ \dfrac{\eta_s}{\eta_s+\eta_2} & |f| \in [b_1,b_2] \end{cases}$$

Nota che il guadagno è più piccolo nella banda $[b_1,b_2]$. Il filtro tende ad attenuare segnale e rumore nella banda più rumorosa. Il risultato è un compromesso tra distorsione del segnale e attenuazione del rumore.

Scalando tutto secondo il guadagno del filtro su η_1

$$H^\circ(f)_{\text{scalato}} = \begin{cases} 1 & |f| \in [0,B] \sim [b_1,b_2] \\ \dfrac{\eta_s+\eta_1}{\eta_s+\eta_2} < 1 & f \in [b_1,b_2] \end{cases}$$

La distorsione in condizioni di ottimalità è

$$\mathcal{E}(h^\circ) = P_s - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_s(f)^2}{P_s(f)+P_n(f)}\,df = 2B\eta_s - 2\int_0^{b_1} \frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_1}\,df - 2\int_{b_1}^{b_2} \frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_2}\,df - 2\int_{b_2}^{B} \frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_1}\,df$$

$$= 2B\eta_s - 2\frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_1} b_1 - 2\frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_2}(b_2-b_1) - 2\frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_1}(B-b_2)$$

$$= 2B\eta_s - 2\frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_1}(B-b_2+b_1) - 2\frac{\eta_s^2}{\eta_s+\eta_2}(b_2-b_1)$$

Da confrontare con quella prima del filtro

$$E[(s(t)-x(t))^2] = E[n^2(t)] = P_n = 2\eta_1(B-b_2+b_1) + 2\eta_2(b_2-b_1)$$