Tol. 5092011. 1

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TEORIA DEI SEGNALI/TELECOMUNICAZIONI 2
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
5 settembre 2011

SOLUZIONI

1. Si consideri il seguente segnale

$$x(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) + \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right) + \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right) \tag{1}$$

(a) Schizzare il segnale;
(b) Calcolare energia e potenza;
(c) Valutare la trasformata di Fourier e schizzarne l'andamento approssimativo;
(d) Considerare la sequenza $x[n]$ risultato del campionamento ideale di $x(t)$ a frequenza di campionamento $f_c = 1/2$ e valutarne la Trasformata di Fourier (si assuma che l'impulso rettangolare sia continuo a destra sulle discontinuitá).
(e) Valutare il risultato della convoluzione lineare di $x[n]$ con la sequenza $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$ (si consiglia il metodo grafico).

2. Si consideri il processo aleatorio

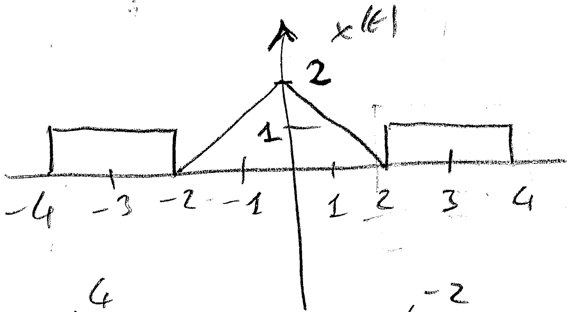
$$X(t) = A\cos^2(2\pi f_0(t + T_0)), \tag{2}$$

dove A e T_0 sono due variabili aleatorie indipendenti.
(a) Studiare stazionarietá, autocorrelazione e spettro di potenza per variabili A e T_0 distribuite rispettivamente secondo le pdf $f_A(b) = N(a; 0, \sigma_A^2)$, $f_{T_0}(t_0) = U(-\frac{1}{2f_0}, \frac{1}{2f_0})$.
(b) Ripetere parte (a) per variabile A distribuita secondo la pdf $f_A(a) = U(0, M)$ e T_0 costante.

fols. 5092011. 2

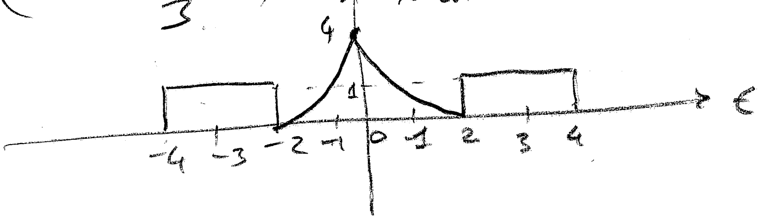
(1)

$$x(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) + \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right) + \Pi\left(\frac{t+3}{2}\right)$$



$$\mathcal{E}_x = \int_{-4}^{4} x^2(t)\,dt = \int_{-4}^{-2} x^2(t)\,dt + \int_{-2}^{0} x^2(t)\,dt + \int_{0}^{2} x^2(t)\,dt + \int_{2}^{4} x^2(t)\,dt$$

$$= \left(2 + \frac{2\cdot 4}{3}\right)2 = 2\left(\frac{6+8}{3}\right) = \frac{28}{3} = \cancel{}$$

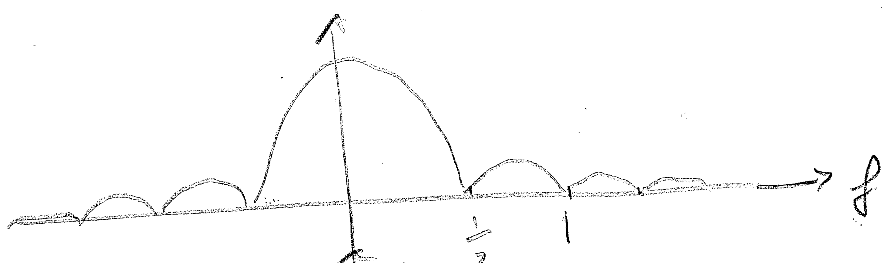


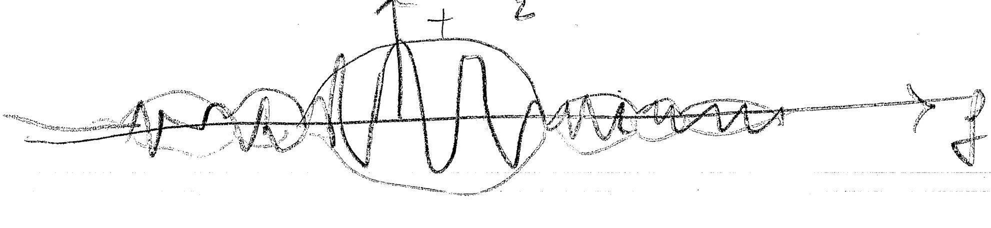
$$P_x = 0$$

$$X(f) = 4\,\mathrm{sinc}^2 2f + e^{-j2\pi f3}\, 2\,\mathrm{sinc}\, 2f$$

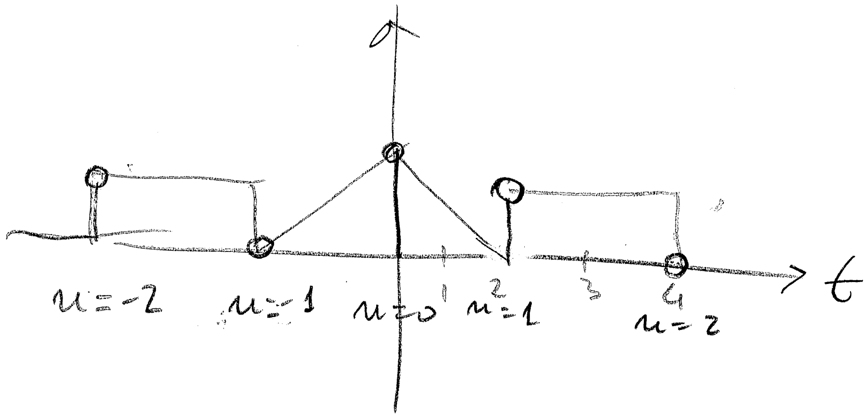
$$+ e^{+j2\pi f3}\, 2\,\mathrm{sinc}\, 2f$$

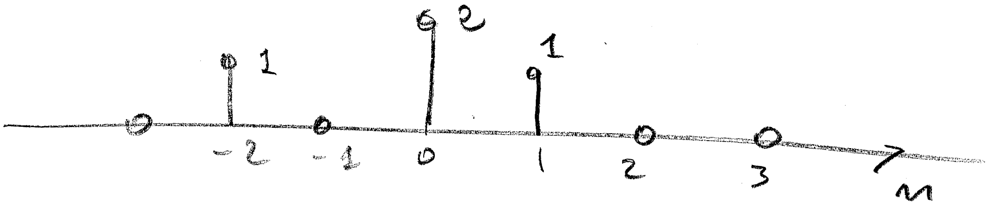
$$= 4\,\mathrm{sinc}^2 2f + 4\,\mathrm{sinc}\, 2f \cos 6\pi f$$





Tols. 509 2011 . 3





$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi\nu n}$$

$$= x[-2]\, e^{j2\pi\nu 2} + x[0] + x[1]\, e^{-j2\pi\nu}$$

$$= e^{j4\pi\nu} + 2 + e^{-j2\pi\nu}$$

(2) fols.5092011.4

$$x(t) = A\cos^2(2\pi f_0(t+T_0))$$

(A, T_0) v.a. indipendenti.

$$X(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 4\pi f_0(t+T_0)$$

(a) $$E[X(t)] = \frac{1}{2}\underbrace{E[\cancel{A}]}_{0} + \frac{1}{2}E[\cancel{A}]\,\underbrace{E[\cos 2\pi f_0(t+T_0)]}_{0}$$

$$R_X(t;\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$$

$$= E\left[\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 4\pi f_0(t+T_0)\right)\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0)\right)\right]$$

$$= E\left[\frac{A^2}{4}\right] + E\left[\frac{A^2}{4}\cos 4\pi f_0(t+T_0)\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0)\right]$$

$$+ E\left[\frac{A^2}{4}\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0)\right] + E\left[\frac{A^2}{4}\cos 4\pi f_0(t+T_0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}E[A^2] + \frac{1}{4}E[A^2]\,E[\cos 4\pi f_0(t+T_0)\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0)]$$

$$+ \frac{1}{4}E[A^2]\,\underbrace{E[\cancel{\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0)}]}_{0} + \frac{1}{4}E[A^2]\,\underbrace{E[\cancel{\cos 4\pi f_0(t+T_0)}]}_{0}$$

poiché T_0 uniforme.

$$= \frac{1}{4}E[A^2] + \frac{1}{4}E[A^2]\left(\frac{1}{2}\underbrace{E[\cancel{\cos 4\pi f_0(2t-\tau+2T_0)}]}_{0}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}E[\cos 4\pi f_0\tau]\right)$$

processo SSL.

$A \propto N(a; 0, \sigma_A^2)$

$$= \frac{1}{4}E[A^2] + \frac{1}{8}E[A^2]\cos 4\pi f_0\tau$$

$$= \frac{1}{4}\sigma_A^2 + \frac{1}{8}\sigma_A^2\cos 4\pi f_0\tau$$

$$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \frac{1}{4}\sigma_A^2\delta(f) + \frac{\sigma_A^2}{16}\left(\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)\right)$$

(b)

$A \propto U(0,M)$; T_0 costante

$$E[A] = \frac{M}{2}, \quad \sigma_A^2 = \frac{M^2}{12}, \quad E[A^2] = \frac{M^2}{3}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 4\pi f_0(t+T_0)$$

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \frac{1}{2}E[A] + \frac{1}{2}E[A]\cos 4\pi f_0(t+T_0)$$

Processo non stazionario, ma ciclostazionario nella media

$$R_x(t;\tau) = \frac{1}{4}E[A^2] + \frac{1}{4}E[A^2]\cos 4\pi f_0(t+T_0)\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0)$$
$$+ \frac{1}{4}E[A^2]\cos 4\pi f_0(t-\tau+T_0) + \frac{1}{4}E[A^2]\cos 4\pi f_0(t+T_0)$$

Processo non stazionario nella autocorrelazione ma ciclostazionario.

Considerando la autocorrelazione mediata sul periodo (periodo $\frac{1}{2f_0}$)

$$\overline{R_x(\tau)} = 2f_0\int_{-\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{4f_0}} R_x(\tau;t)\,dt$$

Nell'operazione di media si cancellano i termini in coseno ottenendo

$$\overline{R_x}(\tau) = \frac{1}{4}E[A^2] + \frac{1}{4}E[A^2]\,\frac{1}{2}\cos 4\pi f_0\tau$$

Anche la media si media

$$\overline{\mu_x} = \frac{1}{2}E[A] = \frac{M}{4}$$

$$\overline{P_x}(f) = \frac{M^2}{12}\delta(f) + \frac{M^2}{48}\left(\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)\right)$$