Seconda Università di Napoli - Facoltà di Ingegneria

Teoria dei Segnali / Telecomunicazioni 2 - Prof. F. Palmieri - 09 Maggio 2011

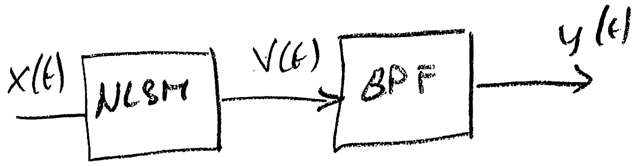
SOLUZIONI

1. Con riferimento allo schema in cascata mostrato in figura, sia il primo blocco una nonlinearità senza memoria caratterizzata dalla relazione I/O $v(t) = |x(t)|$, e sia il secondo blocco un filtro passa-banda ideale con guadagno unitario e banda monolatera $2f_0$ centrata in $10f_0$. Valutare l'uscita $y(t)$ assumendo come ingresso $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

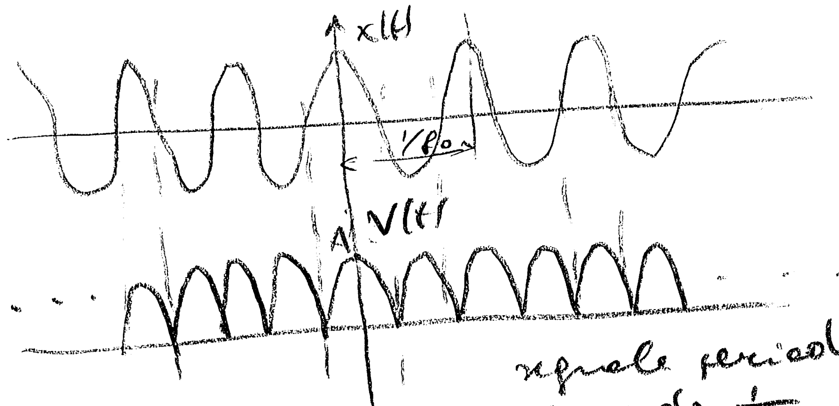
$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\text{ZMNL}} \xrightarrow{v(t)} \boxed{\text{BPF}} \xrightarrow{y(t)}$$

2. Si consideri il segnale aleatorio $Y(t) = X_1(t)\cos(2\pi f_0 t) + X_2(t)\sin(2\pi f_0 t)$ con f_0 parametro deterministico e con $X_1(t)$ ed $X_2(t)$ segnali aleatori congiuntamente SSL.
   - **(a)** Calcolare la media e l'autocorrelazione di $Y(t)$.
   - **(b)** Determinare le condizioni affinchè $Y(t)$ risulti SSL.
   - **(c)** Nelle ipotesi di cui al punto (b), calcolare potenza e densità spettrale di potenza di $Y(t)$.

1



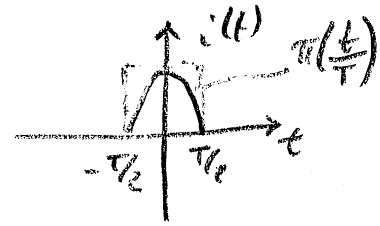
$v(t) = A\,|\cos 2\pi f_0 t|$



segnale periodico con periodo $\frac{1}{2f_0}$

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i(t-kT) \qquad T = \frac{1}{2f_0}$$

Poiché $\quad v(t) = i(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

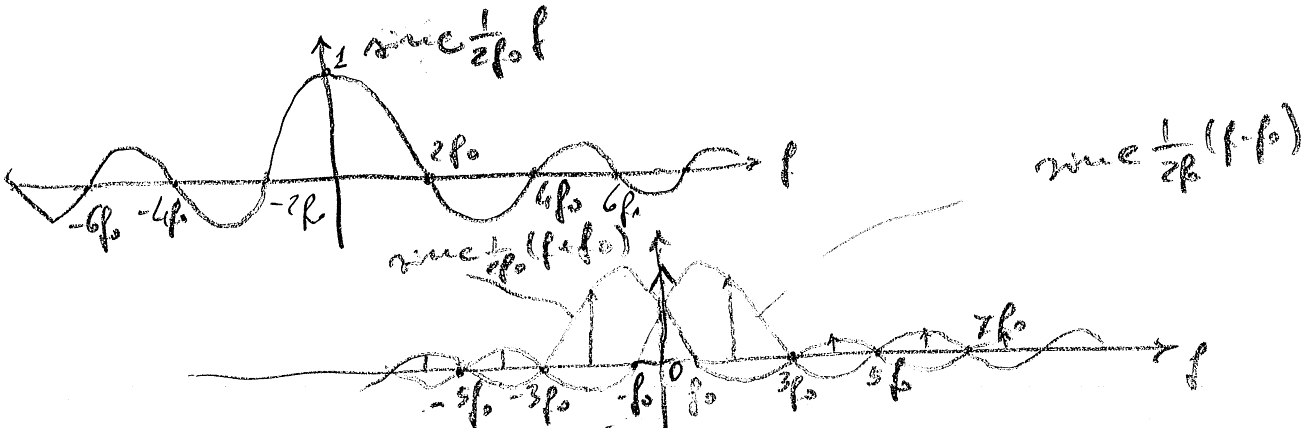


$$V(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$i(t) = A\cos 2\pi f_0 t\ \Pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2f_0}}\right)$$

$$I(f) = \frac{1}{2f_0}\,\mathrm{sinc}\,\frac{1}{2f_0}f * \left[\frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

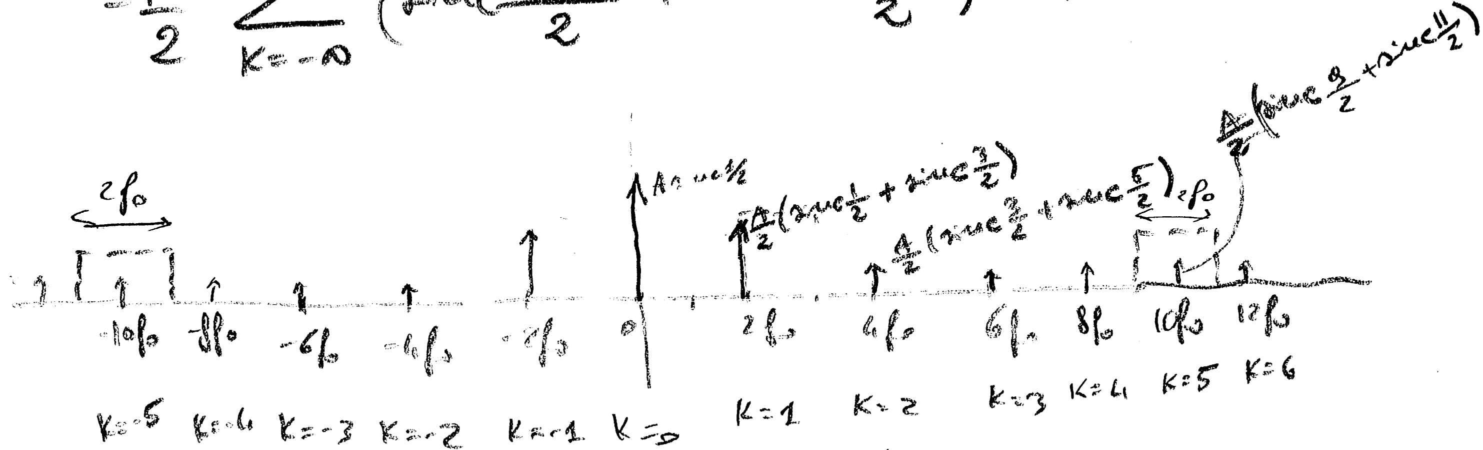
$$= \frac{A}{4f_0}\,\mathrm{sinc}\,\frac{1}{2f_0}(f-f_0) + \frac{A}{4f_0}\,\mathrm{sinc}\,\frac{1}{2f_0}(f+f_0)$$



$$V(f) = \frac{8 \cancel{f_0} A}{2 \cdot 4 \cancel{f_0}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\text{sinc}\, \frac{f - f_0}{2 f_0} + \text{sinc}\, \frac{f + f_0}{2 f_0} \right) \delta(f - 2 f_0 k)$$

$$= \frac{A}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\text{sinc}\, \frac{2 \cancel{f_0} k - \cancel{f_0}}{2 \cancel{f_0}} + \text{sinc}\, \frac{2 \cancel{f_0} k + \cancel{f_0}}{2 \cancel{f_0}} \right) \delta(f - 2 f_0 k)$$

$$= \frac{A}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\text{sinc}\, \frac{2k-1}{2} + \text{sinc}\, \frac{2k+1}{2} \right) \delta(f - 2 f_0 k)$$



Il passa-banda centrato su $10 f_0$ recupera

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left(\text{sinc}\frac{9}{2} + \text{sinc}\frac{11}{2}\right)\delta(f - 10 f_0) + \frac{A}{2}\left(\text{sinc}\frac{9}{2} + \text{sinc}\frac{11}{2}\right)\delta(f + 10 f_0)$$

$$y(t) = A\left(\text{sinc}\frac{9}{2} + \text{sinc}\frac{11}{2}\right)\cos 20\pi f_0 t$$

(2) $Y(t) = X_1(t)\cos 2\pi f_0 t + X_2(t)\sin 2\pi f_0 t$

$$E[Y(t)] = E[X_1(t)]\cos 2\pi f_0 t + E[X_2(t)]\sin 2\pi f_0 t$$

Media non stazionaria a meno che $E[X_1(t)] = E[X_2(t)] = 0$

In tal caso $E[Y(t)] = \text{cost} = 0$

$$R_Y(t;\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)]$$

$$= E\big[\big(X_1(t)\cos 2\pi f_0 t + X_2(t)\sin 2\pi f_0 t\big)\big(X_1(t-\tau)\cos 2\pi f_0(t-\tau) + X_2(t-\tau)\sin 2\pi f_0(t-\tau)\big)\big]$$

singolarmente e congiuntamente SSL

$$= R_{X_1}(\cancel{t};\tau)\cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau)$$
$$+ R_{X_2}(\cancel{t};\tau)\sin 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0(t-\tau)$$
$$+ R_{X_1X_2}(\cancel{t};\tau)\cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0(t-\tau)$$
$$+ R_{X_2X_1}(\cancel{t};\tau)\sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau)$$

se $\boxed{R_{X_1}(\tau) = R_{X_2}(\tau) = R_X(\tau)}$ (1)

$$= \cancel{\frac{R_{X_1}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0(2t-\tau)} + \frac{R_{X_1}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0\tau$$

$$- \cancel{\frac{R_{X_2}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0(2t-\tau)} + \frac{R_{X_2}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0\tau$$

$$+ \frac{R_{X_1X_2}(\tau)}{2}\sin 2\pi f_0(2t-\tau) - \frac{R_{X_1X_2}(\tau)}{2}\sin 2\pi f_0\tau$$

$$+ \frac{R_{X_2X_1}(\tau)}{2}\sin 2\pi f_0(2t-\tau) + \frac{R_{X_2X_1}(\tau)}{2}\sin 2\pi f_0\tau$$

Poiché $R_{X_1X_2}(\tau) = R_{X_2X_1}(-\tau)$

$$= \frac{R_{X_1}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0\tau + \frac{R_{X_2}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0 \tau$$

$$+ \frac{R_{X_1X_2}(\tau)+R_{X_1X_2}(-\tau)}{2}\sin 2\pi f_0(2t-\tau)$$

$$- \frac{R_{X_1X_2}(\tau)-R_{X_1X_2}(-\tau)}{2}\sin 2\pi f_0\tau$$

Per eliminare il termine dipendente da t bisogna avere

$$(2)\quad \boxed{R_{X_1X_2}(\tau) = -R_{X_1X_2}(-\tau)} \quad \text{funzione dispari}$$

Se (1) e (2) sono soddisfatte

$$R_Y(t,\tau) = R_Y(\tau) = \frac{R_{X_1}(\tau)+R_{X_2}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0 \tau$$

$$- \frac{R_{X_1X_2}(\tau)-R_{X_1X_2}(-\tau)}{2}\sin 2\pi f_0\tau$$

$$= R_X(\tau)\cos 2\pi f_0 \tau - R_{X_1X_2}(\tau)\sin 2\pi f_0 \tau$$

$$P_Y(f) = \frac{1}{2}P_X(f-f_0) + \frac{1}{2}P_X(f+f_0) - \frac{P_{X_1X_2}(f-f_0)}{2j} + \frac{P_{X_1X_2}(f+f_0)}{2j}$$

dove $P_{X_1X_2}(f) = \mathcal{F}[R_{X_1X_2}(\tau)]$.

Nel caso più restrittivo in cui $X_1(t)$ e $X_2(t)$ sono indipendenti (in effetti basta che siano a media nulla e incoerenti), $R_{X_1X_2}(\tau)=0 \ \forall \tau$ e

$$P_Y(f) = \frac{1}{2}P_X(f-f_0) + \frac{1}{2}P_X(f+f_0).$$