0

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA CAMPANIA Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronia e Informatica

Prova scritta per il corso
Teoria dei Segnali/Telecomunicazioni 2
Prof. Francesco A. N. Palmieri
lunedí 15 luglio 2019

SOLUZIONI

1. Schizzare i seguenti segnali e valutarne l'energia, la potenza e la trasformata di Fourier. $s(t) = \Lambda(t) + 2\Pi\left(\frac{t}{2} - 1\right) + 2\Pi\left(\frac{t}{2} + 1\right)$; $s(t) = e^{-t}u(t+1)$; $s(t) = 1 + \cos^2 7\pi t$.

2. Usando il metodo grafico valutare la risposta nel dominio del tempo di un sistema lineare avente risposta impulsiva $h(t) = e^{-t}u(t-3)$ al cui ingresso é posto il segnale $s(t) = e^{t}u(-t)$.

3. Si consideri il seguente processo aleatorio

$$Y(t) = A + X(t)\cos^2 20\pi Bt, \tag{1}$$

dove $X(t)$ é un processo aleatorio SSL con autocorrelazione $R_X(\tau) = B\mathrm{sinc}B\tau$, e A é una variabile aleatoria gaussiana a media μ_A e varianza σ_A^2. (A e $X(t)$ sono indipendenti). Commentare sulla stazionarietá di $Y(t)$ e valutarne e schizzarne autocorrelazione e spettro di potenza.

4. Un segnale aleatorio avente spettro di potenza

$$P_S(f) = e^{-3|f|}\Pi\left(\frac{f}{6B}\right) \tag{2}$$

é trasmesso su un canale avente risposta armonica con $|H_c(f)|^2 = \Pi\left(\frac{f}{7B}\right)$, che introduce rumore additivo avente spettro $P_n(f) = \frac{\eta_0}{2}(0.1 + \Pi\left(\frac{f}{4B}\right))$. Proporre e schizzare filtri di enfasi e de-enfasi per il sistema.

5. Si progetti un filtro IIR con il metodo del piazzamento poli-zeri avente una caratteristica passa-banda stretta (quasi risonante) attorno alla frequenza di 6 KHz a frequenza di campionamento di $f_c = 22$ KHz.

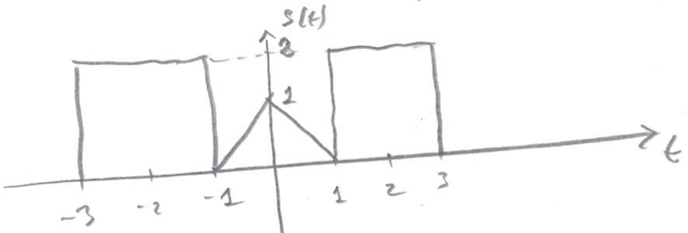
6. Il seguente segnale

$$x(t) = \cos 2\pi t - \frac{1}{2}\cos 3\pi t \tag{3}$$

é campionato alla frequenza di 2.2 Hz. Ricavare il risultato della ricostruzione cardinale.

1. $s(t) = \Lambda(t) + 2\Pi\left(\frac{t}{2}-1\right) + 2\Pi\left(\frac{t}{2}+1\right)$

$= \Lambda(t) + 2\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right) + 2\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right)$



Segnale di energia

$$\mathcal{E}_s = 2\int_{-3}^{-1} s^2(t)\,dt + 2\int_{-1}^{0} s^2(t)\,dt = 2\cdot 4\cdot 2 + 2\int_{-1}^{0}(t+1)^2\,dt$$

$$= 16 + 2\int_{-1}^{0}(t^2+2t+1)\,dt = 16 + 2\left[\left.\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left.\cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_{-1}^{0} + \left.t\right]_{-1}^{0}\right]$$

$$= 16 + 2\left[0 - \frac{(-1)^3}{3} + 0 - (-1)^2 + 0 - (-1)\right] =$$

$$= 16 + 2\left[\frac{1}{3} - 1 + 1\right] = 16 + \frac{2}{3} = \frac{48+2}{3} = \frac{50}{3}$$

$16 \times 3 = 48$

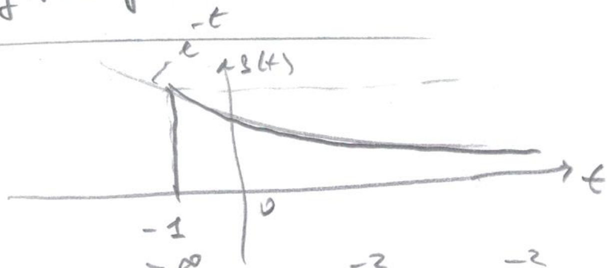
$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \mathrm{sinc}^2 f + 2e^{-j2\pi f 2}\,2\,\mathrm{sinc}\,2f + 2e^{j2\pi f 2}\,2\,\mathrm{sinc}\,2f$$

$$= \mathrm{sinc}^2 f + 4\,\mathrm{sinc}\,2f\left(e^{-j4\pi f} + e^{j4\pi f}\right)$$

$$= \mathrm{sinc}^2 f + 8\cos 4\pi f\,\mathrm{sinc}\,2f$$

$s(t) = e^{-t}u(t+1)$

Segnale di energia



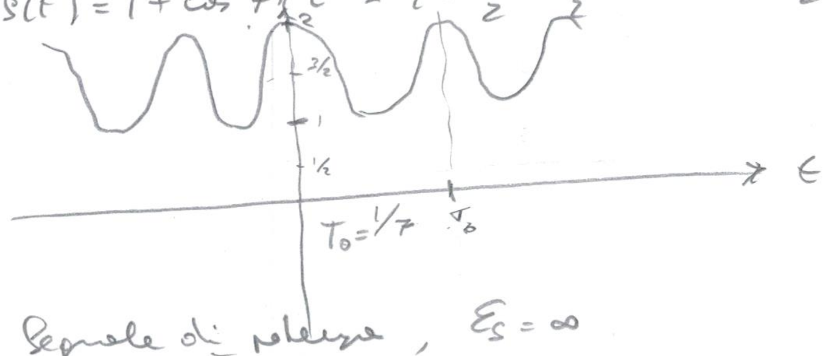
$$\mathcal{E}_s = \int_{-1}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-2t}\,dt = \left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_{-1}^{\infty} = \frac{0 - e^{-2}}{-2} = \frac{e^{-2}}{2}$$

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-1}^{\infty} e^{-t}e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-(1+j2\pi f)t}\,dt \rightarrow$$

$$= \left. \frac{e^{-(1+j2\pi f)t}}{-(1+j2\pi f)} \right]_{-1}^{\infty} = \frac{0 - e^{1+j2\pi f}}{-(1+j2\pi f)} = \frac{e^{1+j2\pi f}}{1+j2\pi f}$$

$$s(t) = 1 + \cos^2 7\pi t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 14\pi t = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 14\pi t$$

$f_0 = 7$



Segnale di potenza, $E_s = \infty$

$$P_s = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 14\pi t\right)^2 dt = \dots\dots$$

oppure

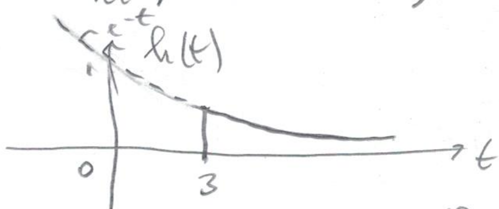
$$P_s = \text{Potenza di}\left(\frac{3}{2}\right) + \text{Potenza di}\left(\frac{1}{2}\cos 14\pi t\right)$$

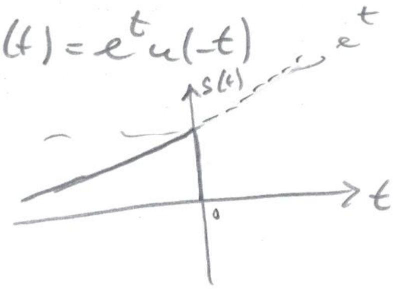
$$= \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{8} = \frac{18+1}{8} = \frac{19}{8}$$

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \frac{3}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f-7) + \frac{1}{4}\delta(f+7)$$

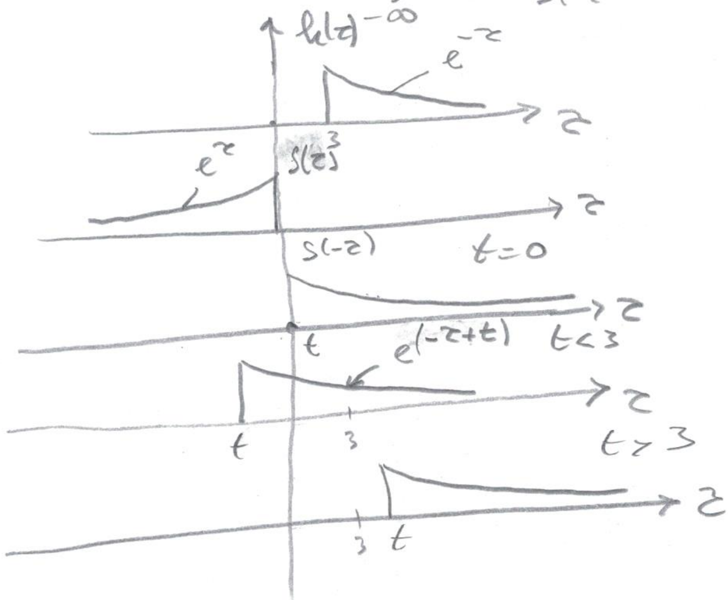
③

2. $h(t) = e^{-t}u(t-3)$ $\qquad$ $s(t) = e^{t}u(-t)$





$$y(t) = (h*s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\underbrace{s(t-\tau)}_{s(-(\tau-t))}\,d\tau$$



$t<3$

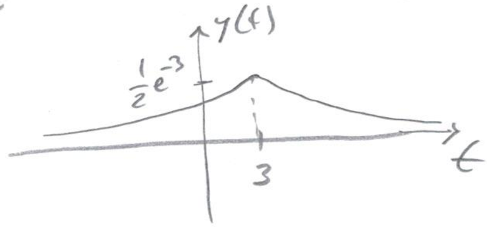
$$y(t) = \int_3^{\infty} e^{-\tau+t}e^{-\tau}\,d\tau = e^{t}\int_3^{\infty} e^{-2\tau}\,d\tau = e^{t}\left.\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_3^{\infty}$$

$$= e^{t}\,\frac{0-e^{-6}}{-2} = \frac{1}{2}e^{-6}e^{t}$$

$t>3$

$$y(t) = \int_t^{\infty} e^{-\tau+t}e^{-\tau}\,d\tau = e^{t}\int_t^{\infty} e^{-2\tau}\,d\tau = e^{t}\left.\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_t^{\infty}$$

$$= e^{t}\,\frac{0-e^{-2t}}{-2} = \frac{1}{2}e^{-t}$$



3. $$Y(t) = A + X(t)\cos^2 20\pi Bt = A + \frac{X(t)}{2} + \frac{X(t)}{2}\cos 40\pi Bt$$ (4)

$$R_X(\tau) = B\,\text{sinc}\,B\tau \qquad A \propto N(\cdot;\mu_A,\sigma_A^2)$$

$$R_Y(t,\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)] = E\left[\left(A + \frac{X(t)}{2} + \frac{X(t)}{2}\cos 40\pi Bt\right)\right.$$
$$\left.\left(A + \frac{X(t-\tau)}{2} + \frac{X(t-\tau)}{2}\cos 40\pi B(t-\tau)\right)\right] =$$

$$= E\left[A^2 + \frac{A}{2}X(t-\tau) + \frac{A\,X(t-\tau)}{2}\cos 40\pi B(t-\tau)\right.$$
$$+ \frac{A\,X(t)}{2} + \frac{1}{4}X(t)X(t-\tau) + \frac{1}{4}X(t)X(t-\tau)\cos 40\pi B(t-\tau)$$
$$+ \frac{A}{2}X(t)\cos 40\pi Bt + \frac{1}{4}X(t)X(t-\tau)\cos 40\pi Bt +$$
$$\left.+ \frac{1}{4}X(t)X(t-\tau)\cos 40\pi Bt\cos 40\pi B(t-\tau)\right]$$

$E[X(t)] = 0 \quad \forall t$

$$= E[A^2] + \frac{A}{2}\cancel{E[X(t-\tau)]}^{0} + \frac{A}{2}\cancel{E[X(t-\tau)]}^{0}\cos 40\pi B(t-\tau)$$
$$+ \frac{A}{2}\cancel{E[X(t)]}^{0} + \frac{1}{4}E[X(t)X(t-\tau)] + \frac{1}{4}E[X(t)X(t-\tau)]\cos 40\pi B(t-\tau)$$
$$+ \frac{A}{2}E[X(t)X(t-\tau)]\frac{1}{2}\left(\cos 40\pi B(2t-\tau) + \cos 40\pi B\tau\right)$$
$$= E[A^2] + \frac{1}{4}R_X(\tau) + \frac{1}{4}R_X(\tau)\cos 40\pi B(t-\tau)$$
$$+ \frac{A}{4}R_X(\tau)\cos 40\pi B(2t-\tau) + \frac{A}{4}R_X(\tau)\cos 40\pi B\tau$$

dipendono da t, ma in maniera periodica $\Rightarrow$ processo ciclostazionario

Valutiamo la autocorrelazione mediata su un periodo (periodo $T_0 = \frac{1}{20}$)

$$\overline{R_y}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{1}{2T_0}}^{\frac{1}{2T_0}} R_y(t,\tau)\,dt =$$ i termini con i coseni si annullano poiché integrano a zero

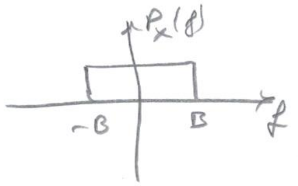
$$= \underbrace{E[A^2]} + \frac{1}{4}R_x(\tau) + \frac{A}{4}R_x(\tau)\cos 40\pi B\tau$$

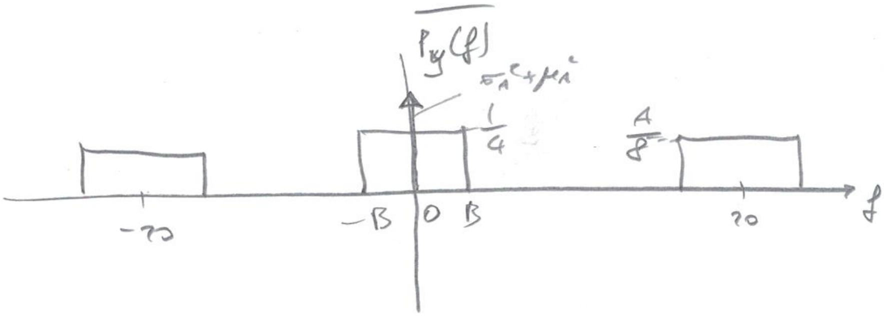
Poiché
$\sigma_A^2 = E[A^2] - \mu_A^2$

$$= \sigma_A^2 + \mu_A^2 + \frac{1}{4}R_x(\tau) + \frac{A}{4}R_x(\tau)\cos 40\pi B\tau$$

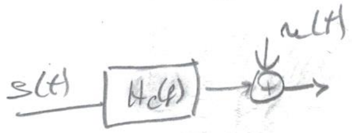
$$\overline{P_y}(f) = (\sigma_A^2 + \mu_A^2)\delta(f) + \frac{1}{4}P_x(f) + \frac{A}{8}P_x(f-20) + \frac{A}{8}P_x(f+20)$$

$$P_x(f) = \mathcal{F}[B\,\mathrm{sinc}\,B\tau] = \Pi\left(\frac{f}{B}\right)$$



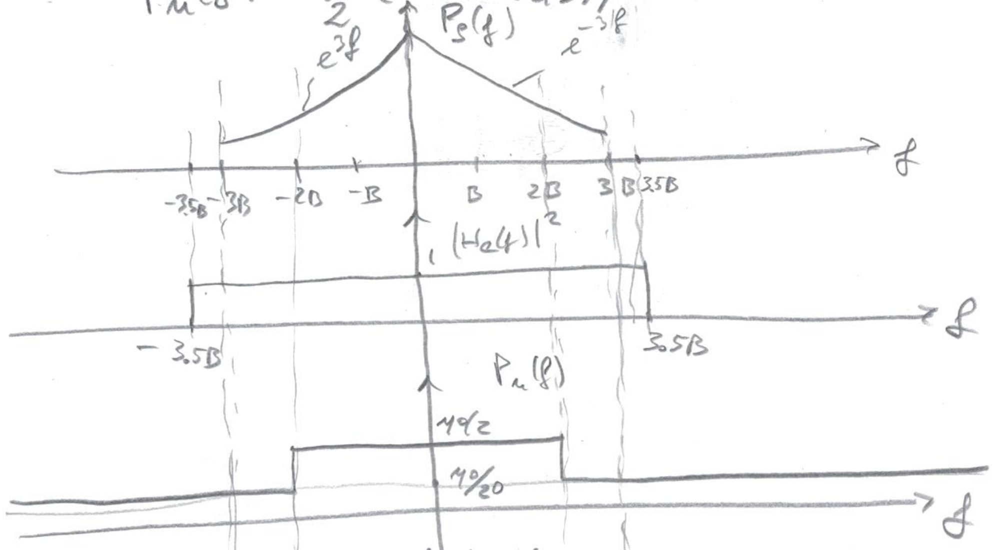


4e



$$P_s(f) = e^{-3|f|}\,\Pi\left(\frac{f}{6B}\right) \quad ; \quad |H_c(f)|^2 = \Pi\left(\frac{f}{7B}\right)$$

$$P_n(f) = \frac{\eta_0}{2}\left(0.1 + \Pi\left(\frac{f}{4B}\right)\right)$$



$$\begin{cases} |H_{T0}(f)|^2 = \dfrac{\alpha K}{|H_c(f)|}\,\dfrac{P_n^{1/2}(f)}{P_s^{1/2}(f)} \\[2ex] |H_{R0}(f)|^2 = \dfrac{K}{\alpha |H_c(f)|}\,\dfrac{P_s^{1/2}(f)}{P_n^{1/2}(f)} \end{cases}$$

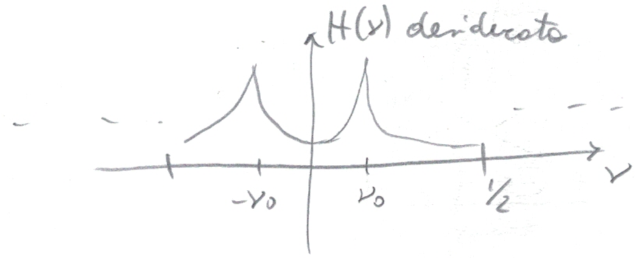
$-2B < f < 2B$

$$\begin{cases} |H_{T0}(f)|^2 \propto \sqrt{\dfrac{\eta_0}{2}}\, e^{\frac{3}{2}|f|} \\[2ex] |H_{R0}(f)| \propto \dfrac{1}{\sqrt{\eta_0/2}}\, e^{-\frac{3}{2}|f|} \end{cases}$$

$2B < |f| < 3B$

$$\begin{cases} |H_{T0}(f)|^2 \propto \sqrt{\dfrac{\eta_0}{20}}\, e^{\frac{3}{2}|f|} \\[2ex] |H_{R0}(f)|^2 \propto \dfrac{1}{\sqrt{\eta_0/20}}\, e^{-\frac{3}{2}|f|} \end{cases}$$

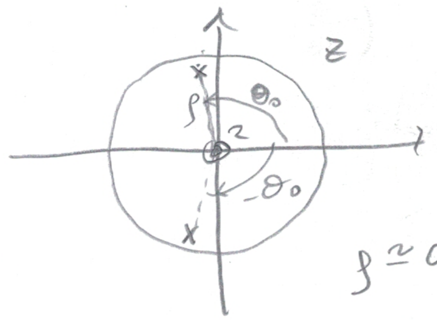
5.



$f_0 = 6\,KHz$

$f_c = 22\,KHz$

$\nu_0 = \frac{f_0}{f_c} = \frac{6}{22}$



$\rho \simeq 0.95$

Piazziamo un polo vicino al cerchio unitario a fase

$\theta_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{12\pi}{22} =$

e ovviamente uno a $\theta_0 = -\frac{12}{22}\pi$

Aggiungiamo anche 2 zeri nell'origine per compensare il ritardo di gruppo

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-\rho e^{j2\pi\nu_0})(z-\rho e^{-j2\pi\nu_0})}$$

$$= \frac{z^2}{z^2+\rho^2 - z\rho e^{j2\pi\nu_0} - z\rho e^{-j2\pi\nu_0}}$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, z + \rho^2} = \frac{1}{1-2\rho\cos 2\pi\nu_0\, z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$H(\nu) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi\nu}} = \frac{1}{1-2\rho\cos 2\pi\nu_0\, e^{-j2\pi\nu} + \rho^2 e^{-j2\pi\nu 2}}$$

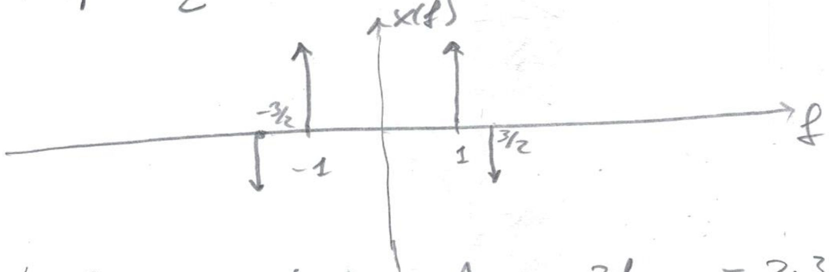
L'equazione alle differenze per realizzare il filtro è

$$y[n] = 2\rho\cos 2\pi\nu_0\, y[n-1] - \rho^2 y[n-2] + x[n]$$

6.

$x(t) = \cos 2\pi t - \frac{1}{2}\cos 3\pi t$ $f_c = 2.2$ Hz (8)

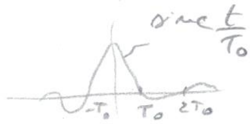
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-1) + \frac{1}{2}\delta(f+1) - \frac{1}{4}\delta\left(f-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}\delta\left(f+\frac{3}{2}\right)$$



La frequenza di Nyquist è $2f_{max} = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$

Il segnale è sottocampionato poiché $f_c < 3$ e ci sarà aliasing nella ricostruzione cardinale

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c)\,\mathrm{sinc}\,\frac{t-kT_c}{T_c}$$



Ma la ricostruzione cardinale nel dominio della frequenza si scrive

$$X_r(f) = \cancel{T}\,\Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)\,\underbrace{\frac{1}{\cancel{T}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T_c}\right)}_{\sum_k X(f-kf_c)}$$

Per vedere dove capitano le frequenze orientiamoci con una tabellina (o con un disegno accurato)

frequenze

k = 0	-1.5	-1	1	1.5	
k = 1	0.7	1.2	3.2	3.7	(+2.2)
k = -1	-3.7	-3.2	-1.2	-0.7	(-2.2)
k = 2	2.7	3.2	5.2	5.7	(+4.2)
k = -2	-5.7	-5.2	-3.2	-2.7	(-4.2)

Ora il filtro di ricostruzione prende
le frequenze tra $-\frac{1}{2f_c}$ e $\frac{1}{2f_c}$ (freq. di ripiegamento)
ovvero tra -1.1 e 1.1
Quindi restano solo le frequenze

-0.7 -1 1 0.7 $\Rightarrow X_r(f) = \frac{1}{2}\delta(f+1)+\frac{1}{2}\delta(f-1)-\frac{1}{4}\delta(f+0.7) - \frac{1}{4}\delta(f-0.7)$

$x_r(t) = \cos 2\pi t - \frac{1}{2}\cos 2\pi(0.7)t$

Dall'aliasing è scomparsa la frequenza 1.5
(poiché sottocampionata) ed è comparsa la
frequenza 0.7 (ghost)