TEORIA DEI SEGNALI / TELECOMUNICAZIONI 2

Prova scritta del 21/02/2011

1. Le sequenze $x[n]$ ed $y[n]$ sono ottenute campionando, con frequenza di campionamento $f_c = (2N+1)/T$, rispettivamente i seguenti segnali periodici

$$x_a(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \exp\left(j\frac{2\pi k}{T}t\right), \qquad y_a(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k \exp\left(j\frac{2\pi k}{T}t\right),$$

con T reale positivo ed N intero positivo.

(a) Verificare che entrambe le sequenze $x[n]$ ed $y[n]$ sono periodiche ed individuarne il periodo.

(b) Calcolare l'espressione dei coefficienti della serie di Fourier della sequenza $z[n] = x[n]y[n]$ in funzione dei termini a_k e b_k.

2. Si consideri il segnale aleatorio $X(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta)$ con $\theta \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ e con A ed F_0 variabili aleatorie arbitrarie. Assumendo che A, F_0 e θ sono statisticamente indipendenti:

(a) determinare le statistiche di A ed F_0 affinchè il segnale $X(t)$ risulti SSL, a media nulla e con densità spettrale di potenza pari a $P_X(f) = \exp\left(-f^2\right)$;

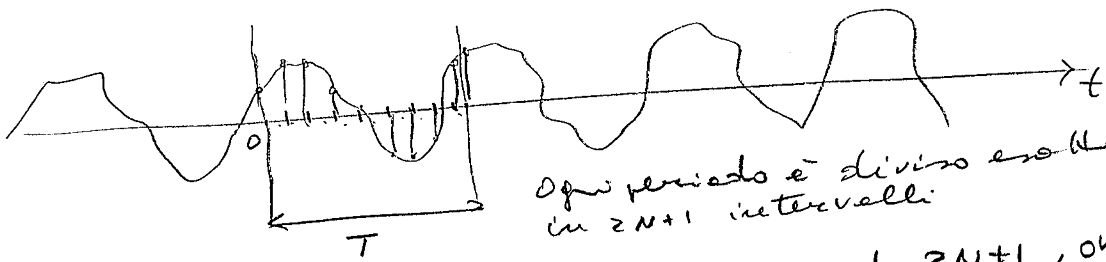
(b) calcolare la potenza di $X(t)$.

SOLUZIONI

$$x_a(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \qquad y_a(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

Segnali periodici di periodo T

(a) $f_c = \frac{2N+1}{T}$ $\qquad T_c = \frac{T}{2N+1}$ Intervallo di campionamento



Ogni periodo è diviso esattamente in $2N+1$ intervalli

$x[n]$ e $y[n]$ sono periodici con periodo $2N+1$, ovvero

$$\begin{cases} x[n+l(2N+1)] = x[n] \\ y[n+l(2N+1)] = y[n] \end{cases} \quad \forall l$$

Questo è evidente anche dall'espressione

$$x[n] = x_a(t)\Big|_{t=\frac{n}{f_c}} = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}\frac{n}{(2N+1)}T} = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\frac{2\pi kn}{2N+1}}$$

$$y[n] = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{j\frac{2\pi kn}{2N+1}}$$

Le coppie $x[n]$, $n = -N, \ldots, 0, \ldots N$, e a_k, $k = -N, \ldots, 0, \ldots, N$
$y[n]$, $n =$ e b_k,
costituiscono DFT e DFT^{-1}. Infatti:

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}nk} \\ b_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} y[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}nk} \end{cases}$$

(*) prova sotto, ma è la stessa per il caso $k = 0, \ldots, N-1$

Pertanto per le proprietà della DFT

$$x[n] \cdot y[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{j\frac{2\pi}{2N+1}kn}$$

dove $c_k = a_k \otimes b_k$ (convoluzione circolare)

(*) prova

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{+j\frac{2\pi}{2N+1}kn}$$

moltiplico per ambo i membri

$$e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}\ell n} x[n] = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\frac{2\pi}{2N+1}kn} e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}\ell n}$$

somma su n

$$\sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}\ell n} = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N} a_k e^{j\frac{2\pi n}{2N+1}(k-\ell)}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}\ell n} = \sum_{k=-N}^{N} a_k \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{j\frac{2\pi}{2N+1}n(k-\ell)}}$$

$= 2N+1$
per $k=\ell$

per $k \neq \ell$ $\quad m = n+N$

$$\sum_{m=0}^{2N} e^{j\frac{2\pi}{2N+1}(m-N)(k-\ell)} = e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}N(k-\ell)} \sum_{m=0}^{2N} e^{j\frac{2\pi}{2N+1}m(k-\ell)}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}N(k-\ell)} \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{\cancel{2N+1}}(k-\ell)\cancel{(2N+1)}}}{1-e^{j\frac{2\pi}{2N+1}(k-\ell)}} = 0$$

Quindi il II membro è

$$(2N+1)\sum_{k=-N}^{N} a_k \,\delta[k-\ell] = a_\ell(2N+1)$$

$$a_\ell = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}\ell n} \qquad \square$$

2

$$X(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) \qquad \Theta \propto \mathcal{U}(-\pi,\pi)$$

A, F_0 v.a indipendenti.

$E[X(t)] = E[A]\, E[\cos(2\pi F_0 t + \theta)]$

(a) $R_x(t;\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = E[A^2 \cos(2\pi F_0 t + \theta)\cos(2\pi F_0(t-\tau)+\theta)]$

$$= E[A^2]\left(\frac{1}{2}E[\cos 2\pi F_0 \tau] + \frac{1}{2}E[\cos(2\pi F_0(2t-\tau)+2\theta)]\right)$$

Affinché sia SSL, sia $E[X(t)]$ che $R_x(t;\tau)$ non devono dipendere da t. Analizziamo il termine

$$E[\cos(2\pi F_0(2t-\tau)+2\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\Theta} \cos(2\pi \xi(t-\tau)+2\theta)\, p_\Theta(\theta)\, p_{F_0}(\xi)\, d\theta\, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{F_0}(\xi) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi\xi(t-\tau)+2\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta\, d\xi = 0$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{\sin(2\pi\xi(t-\tau)+2\theta)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Analogamente

$$E[\cos(2\pi F_0 t + \theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi\xi t + \theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta}_{=0}\, p_{F_0}(\xi)\, d\xi = 0$$

Quindi il processo è SSL poiché

$E[X(t)] = 0 \quad ; \quad R_x(t;\tau) = R_x(\tau) = \dfrac{E[A^2]}{2} E[\cos 2\pi F_0 \tau]$

$$E[\cos 2\pi F_0 \tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\xi\tau\, p_{F_0}(\xi)\, d\xi$$

$$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \frac{E[A^2]}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} E[\cos 2\pi F_0 \tau]\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{E[A^2]}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\xi\tau\, p_{F_0}(\xi)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau\, d\xi$$

$$= \frac{E[A^2]}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{F_0}(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\xi\tau \, e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau \right) d\xi$$

$$= \frac{E[A^2]}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{F_0}(\xi) \left(\frac{1}{2} \delta(f-\xi) + \frac{1}{2} \delta(f+\xi) \right) d\xi$$

$$= \frac{E[A^2]}{2} \left(\frac{1}{2} P_{F_0}(f) + \frac{1}{2} P_{F_0}(-f) \right)$$

Imponiamo che $P_X(f) = e^{-f^2}$

$$\frac{E[A^2]}{2} \left(\frac{1}{2} P_{F_0}(f) + \frac{1}{2} P_{F_0}(-f) \right) = e^{-f^2}$$

$$\frac{E[A^2]}{4} \left(P_{F_0}(f) + P_{F_0}(-f) \right) = e^{-f^2}$$

Assumendo simmetria per la distr. di F_0, $P_{F_0}(f) = P_{F_0}(-f)$,

$$\frac{E[A^2]}{2} P_{F_0}(f) = e^{-f^2}$$

$$P_{F_0}(f) = \frac{e^{-f^2} \, 2}{E[A^2]}$$

La distr. di F_0 deve essere gaussiana a media nulla con $\sigma^2 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \frac{2}{E[A^2]}$

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{E[A^2]}, \quad E[A^2] = 2\sqrt{\pi}.$$

(b) $P_X = R_X(0) = \frac{E[A^2]}{2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$