Vols 28-11-2011 .1

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TEORIA DEI SEGNALI/TELECOMUNICAZIONI 2
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
28 novembre 2011

SOLUZIONI
(corr.)

1. Si consideri il seguente segnale

$$x(t) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda\,(3t - 5k) \qquad (1)$$

(a) Schizzare il segnale;
(b) Calcolare energia e potenza;
(c) Valutare la trasformata di Fourier e schizzarne l'andamento approssimativo;
(d) Considerare la sequenza $x[n]$ risultato del campionamento ideale di $x(t)$ a frequenza di campionamento $f_c = 9$ Hz Valutare il risultato della convoluzione lineare di $x[n]$ con la sequenza $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ (si consiglia il metodo grafico).

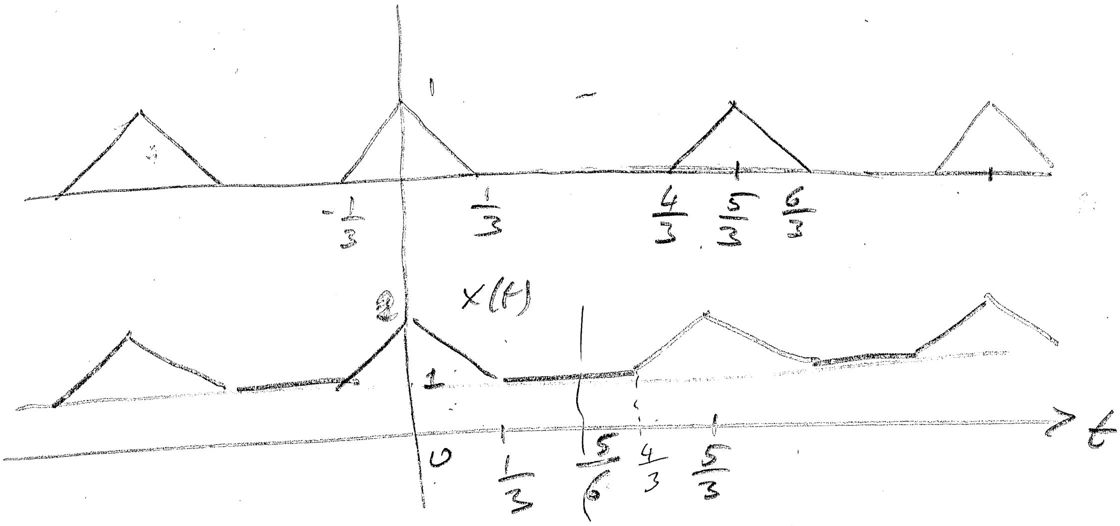
2. Si consideri il processo aleatorio

$$X(t) = S_1(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_1) + b + S_2(t)\cos(2\pi(f_0 + 2B)t + \theta_2), \qquad (2)$$

dove b é una costante deterministica, $S_1(t)$ e $S_2(t)$ sono due processi aleatori gaussiani indipendenti a media nulla e avente spettri di potenza rispettivamente pari a $P_1(f) = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ e $P_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$. Le variabili θ_1 e θ_2 sono uniformi in $[-\pi, \pi]$, mutuamente indipendenti e indipendenti da $S_1(t)$ e $S_2(t)$. Studiare stazionarietá, autocorrelazione e spettro di potenza per $X(t)$. La frequenza f_0 sia molto maggiore di B.

$$x(t) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda(3t-5k) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-\frac{5k}{3}}{1/3}\right)$$

(a)



(b)

Periodo $= T = \frac{5}{3}$

$$\mathcal{E}_x = \infty$$

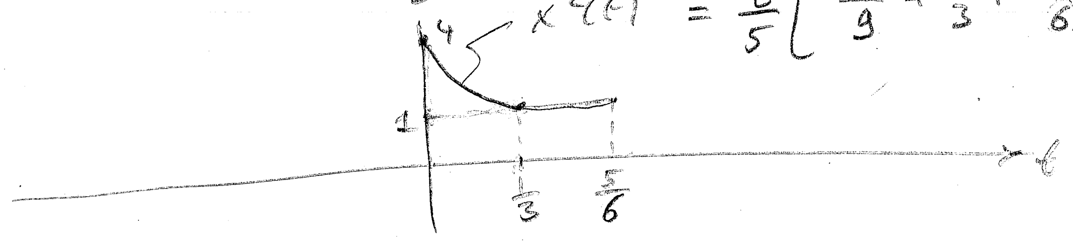
$$P_x = \frac{1}{\text{periodo}} \int_0^{\text{Periodo}} |x(t)|^2 dt \quad \text{per simmetria}$$

$$= \frac{1}{\text{Periodo}} 2\int_0^{\frac{\text{Periodo}}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{3}{5} \cdot 2 \int_0^{\frac{5}{6}} x^2(t)\, dt \quad (\text{corr})$$

$$= \frac{6}{5}\left[\int_0^{\frac{1}{3}} x^2(t)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{6}} x^2(t)\,dt\right] = \frac{6}{5}\left[\cancel{\cdots} + \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{3} + 2\frac{1}{3}\cdot 1$$

$$= \frac{6}{5}\left[\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + \frac{5-2}{6}\right]$$



$$= \frac{\cancel{6}}{5}\left[\frac{2+12+6}{\cancel{18}\,3}\right] = \frac{19}{15}$$

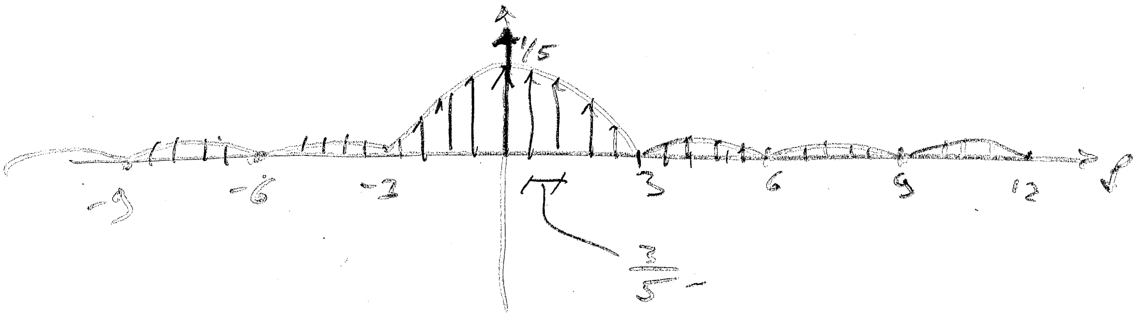
(c)

Per un segnale periodico $s(t) = i(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

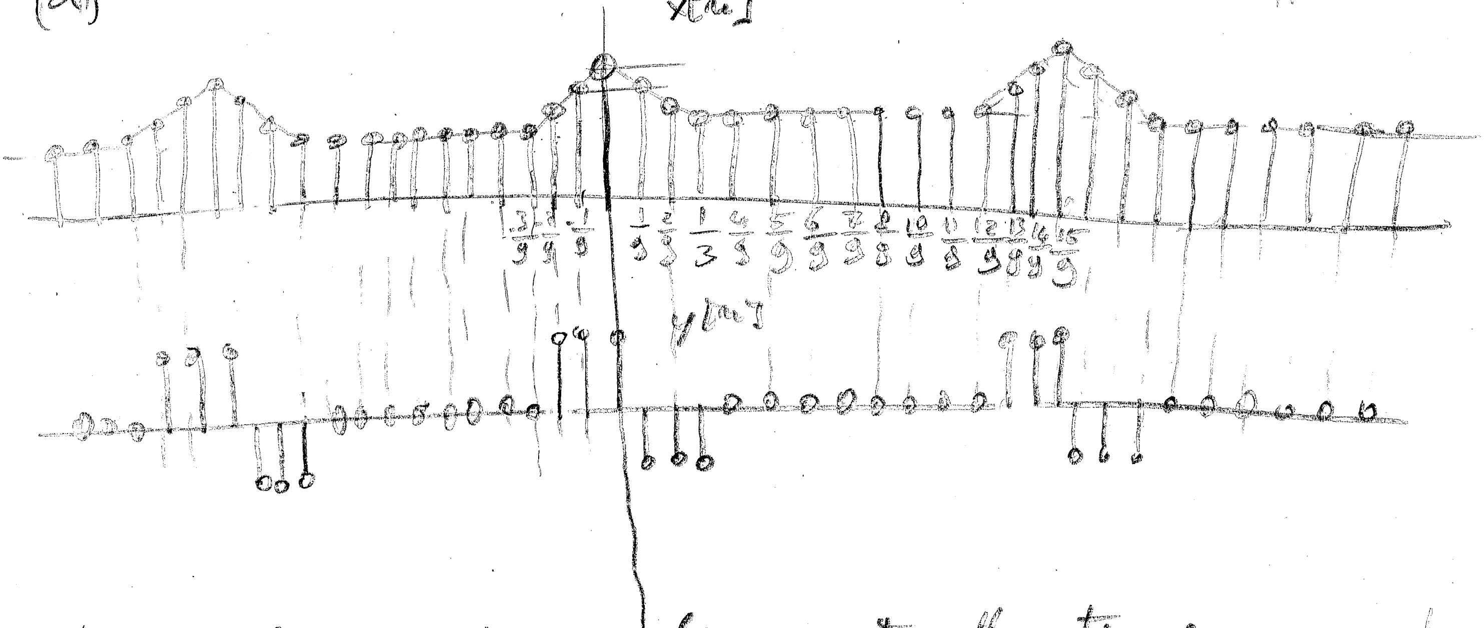
$$S(f) = I(f)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$X(f) = \delta(f) + \frac{3}{5}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3}\,\mathrm{sinc}^2\frac{1}{3}f\;\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{5}\right)\delta(f) + \frac{1}{5}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2\frac{n}{5}\;\delta\left(f-n\frac{3}{5}\right)$$



(d)



La convoluzione è semplicemente ottenuta osservando che $y[n] = x[n] - x[n-1]$

tdls 28.11.2011 .4

(2)

$$X(t) = \underbrace{S_1(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta_1)}_{X_1(t)} + b + \underbrace{S_2(t)\cos(2\pi(f_0+2B)t + \Theta_2)}_{X_2(t)}$$

$$R_X(t;\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = E[(X_1(t)+b+X_2(t))(X_1(t-\tau)+b+X_2(t-\tau))]$$

$$= E[X_1(t)X_1(t-\tau)] + b^2 + E[X_2(t)X_2(t-\tau)]$$
$$+ E[X_1(t)]\,b + E[X_1(t)X_2(t-\tau)] + b\,E[X_1(t-\tau)] + b\,E[X_2(t-\tau)]$$
$$+ E[X_2(t)X_1(t-\tau)] + b\,E[X_2(t)]$$

$$E[X_1(t)] = \underbrace{E[S_1(t)]}_{0}\,E[\cos(2\pi f_0 t + \Theta_1)] = 0 \quad \forall t$$
$$E[X_2(t)] = \underbrace{E[S_2(t)]}_{0}\,\underbrace{E[\cos(2\pi(f_0+2B)t + \Theta_2)]}_{0} = 0 \quad \forall t$$

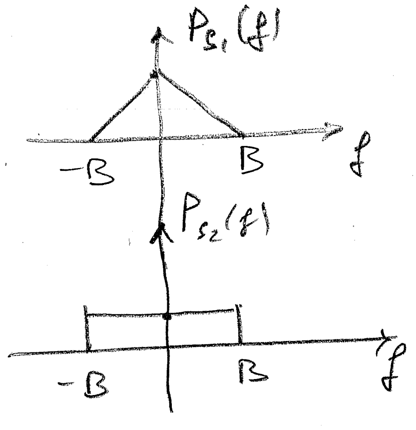
$$E[X_1(t)X_2(t-\tau)] = E[S_1(t)]\,E[S_2(t-\tau)]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \Theta_1)]\,E[\cos(2\pi(f_0+2B)t + \Theta_2)]$$
$$= 0 \quad \forall t, \tau .$$

$$R_X(t;\tau) = b^2 + E[X_1(t)X_1(t-\tau)] + E[X_2(t)X_2(t-\tau)]$$

$$E[X_1(t)X_1(t-\tau)] = E[S_1(t)S_1(t-\tau)]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \Theta_1)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\Theta_1)]$$
$$= R_{S_1}(\tau)\left(\frac{1}{2}E[\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Theta_1)] + \frac{1}{2}E[\cos 2\pi f_0 \tau]\right)$$
$$= \frac{R_{S_1}(\tau)}{2}\cos 2\pi f_0 \tau$$

Analogamente

$$E[X_2(t)X_2(t-\tau)] = \frac{R_{S_2}(\tau)}{2}\cos 2\pi(f_0+2B)\tau$$



$$P_{X_1}(f) = \frac{1}{4}P_{S_1}(f-f_0) + \frac{1}{4}P_{S_1}(f+f_0)$$

$$P_{X_2}(f) = \frac{1}{4}P_{S_2}(f-(f_0+2B)) + \frac{1}{4}P_{S_2}(f+(f_0+2B))$$

$$P_X(f) = b^2\delta(f) + P_{X_1}(f) + P_{X_2}(f)$$