Tlc2-tolo 31-10-2011 • 1

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TEORIA DEI SEGNALI/TELECOMUNICAZIONI 2
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
lunedi 31 ottobre 2011

SOLUZIONI

1. Si consideri il segnale $v(t) = y(t)m(t)$, dove $m(t)$ é il segnale periodico

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-kT}{\Delta}\right), \qquad \Delta = T/4, \tag{1}$$

e $y(t)$ il segnale modulato

$$y(t) = x(t)\cos 2\pi f_0 t, \qquad f_0 = \frac{1}{T}, \tag{2}$$

con $x(t)$ segnale passa-basso con frequenza massima $B < \frac{1}{2T}$.
(a) Schizzare $m(t)$ e la sua trasformata di Fourier;
(b) Calcolare e schizzare la trasformata di Fourier di $v(t)$;
(c) Dimostrare come con un filtro passa-basso si possa recuperare $x(t)$ da $v(t)$.

2. Si consideri il processo aleatorio

$$X(t) = A + \sin^2(3t+\theta), \tag{3}$$

dove A é una variabile aleatoria uniforme tra 1 e 3, e θ é una variabile aleatoria uniforme in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le due variabili sono indipendenti. Studiare stazionarietá, autocorrelazione e spettro di potenza di $X(t)$.

Tlc2-tolo 31-10-2011 • 1

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TEORIA DEI SEGNALI/TELECOMUNICAZIONI 2
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
lunedi 31 ottobre 2011

SOLUZIONI

1. Si consideri il segnale $v(t) = y(t)m(t)$, dove $m(t)$ é il segnale periodico

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-kT}{\Delta}\right), \qquad \Delta = T/4, \tag{1}$$

e $y(t)$ il segnale modulato

$$y(t) = x(t)\cos 2\pi f_0 t, \qquad f_0 = \frac{1}{T}, \tag{2}$$

con $x(t)$ segnale passa-basso con frequenza massima $B < \frac{1}{2T}$.
(a) Schizzare $m(t)$ e la sua trasformata di Fourier;
(b) Calcolare e schizzare la trasformata di Fourier di $v(t)$;
(c) Dimostrare come con un filtro passa-basso si possa recuperare $x(t)$ da $v(t)$.

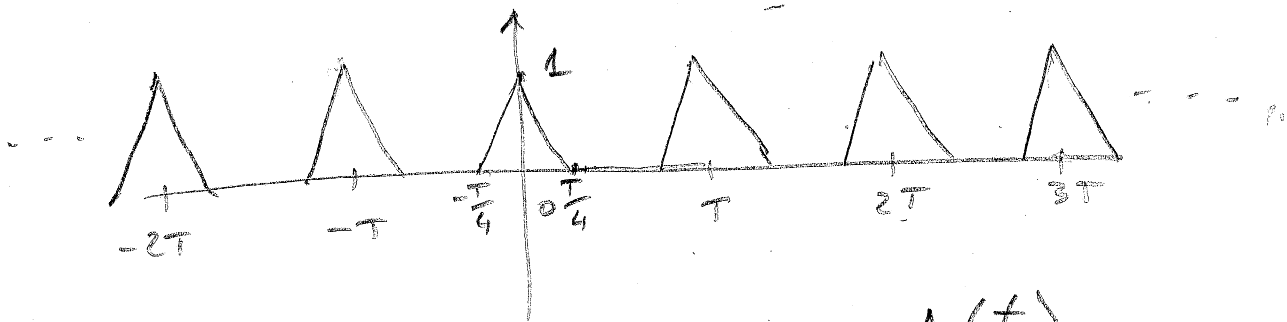
2. Si consideri il processo aleatorio

$$X(t) = A + \sin^2(3t+\theta), \tag{3}$$

dove A é una variabile aleatoria uniforme tra 1 e 3, e θ é una variabile aleatoria uniforme in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le due variabili sono indipendenti. Studiare stazionarietá, autocorrelazione e spettro di potenza di $X(t)$.

(1)

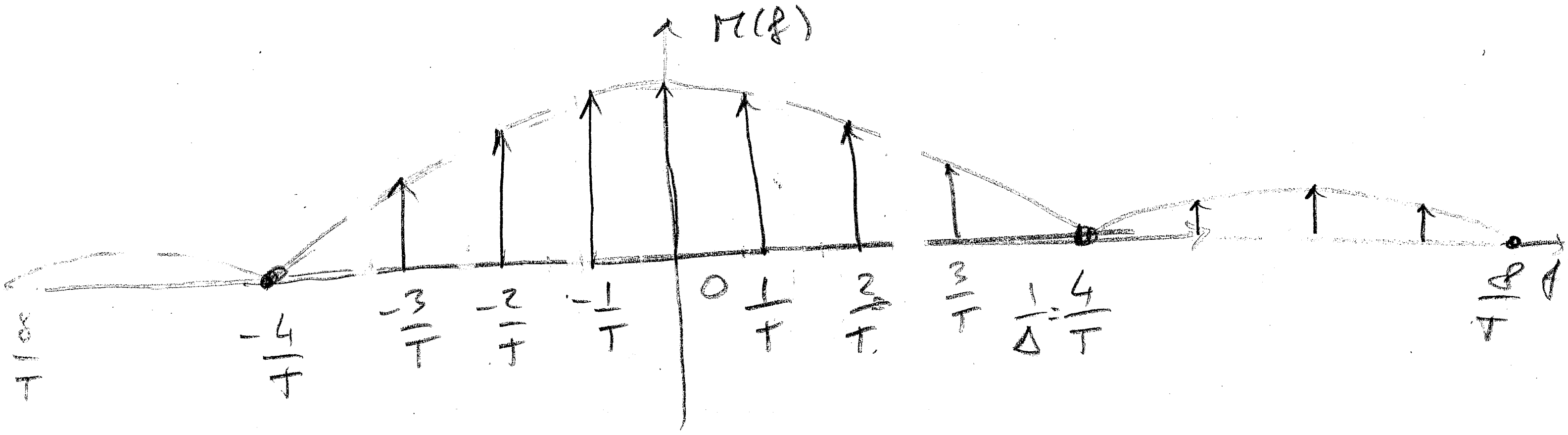
$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{t-kT}{\Delta}\right) \qquad \Delta = \frac{T}{4}$$



$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i(t-kT) \qquad i(t) = \Delta\left(\frac{t}{\Delta}\right)$$

$$I(f) = \Delta \, \mathrm{sinc}^2 \Delta f = \frac{T}{4} \mathrm{sinc}^2 \frac{T}{4} f$$

$$M(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



$$v(t) = y(t)\, m(t) \qquad y(t) = x(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$$

$$V(f) = Y(f) * M(f) \qquad Y(f) = \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

$$V(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{n}{T}\right)\left(\frac{1}{2} X\left(f - \frac{n}{T} - f_0\right) + \frac{1}{2} X\left(f - \frac{n}{T} + f_0\right)\right)$$

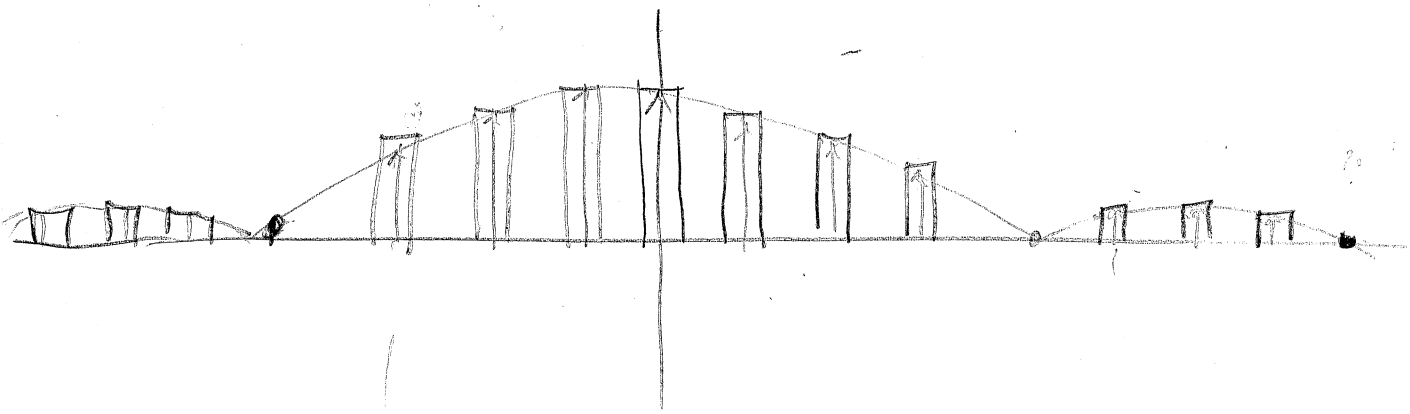
$$f_0 = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{n}{T}\right)\left(\frac{1}{2} X\left(f - \frac{n}{T} - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2} X\left(f - \frac{n}{T} + \frac{1}{T}\right)\right)$$

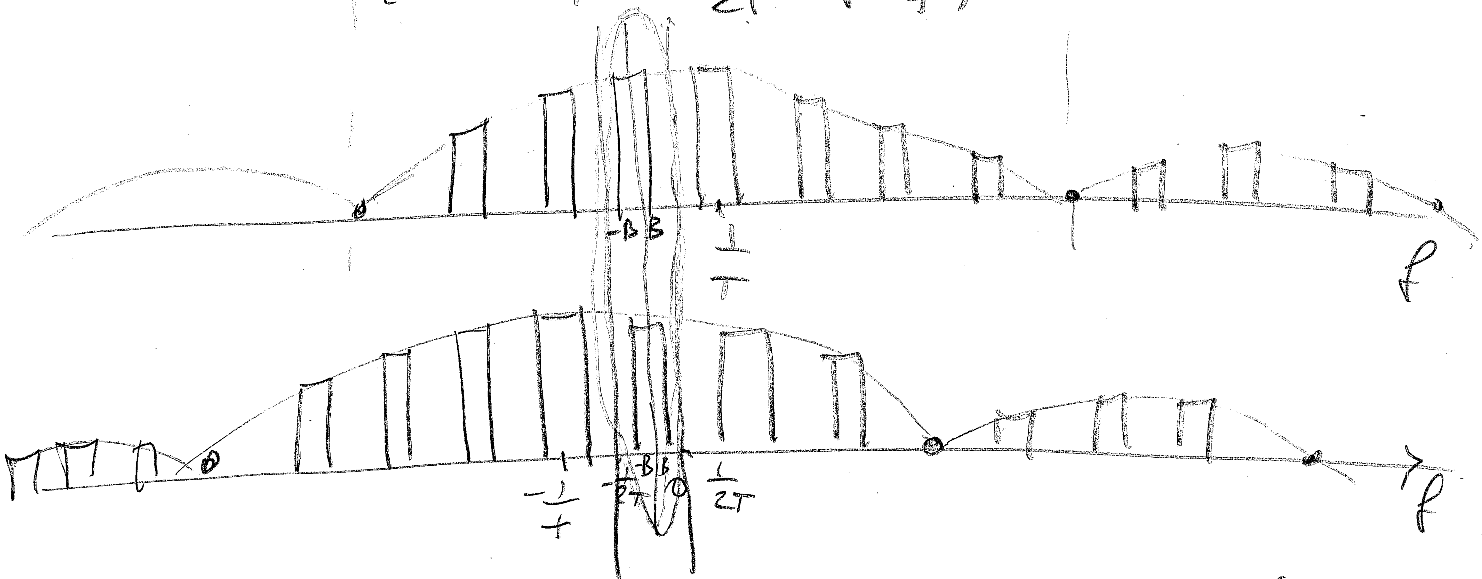
$$= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{n}{T}\right) X\left(f - \frac{n+1}{T}\right) + \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I\left(\frac{n}{T}\right) X\left(f - \left(\frac{n-1}{T}\right)\right)$$

Per visualizzare meglio consideriamo

$$A(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I\left(\frac{n}{T}\right) X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



$$V(f) = \frac{1}{2T} A\left(f - \frac{1}{T}\right) - \frac{1}{2T} A\left(f + \frac{1}{T}\right)$$



Allora allo zero un passa-basso ideale otteniamo.

$$Z(f) = \frac{1}{2T} I\left(-\frac{1}{T}\right) X(f) + \frac{1}{2T} I\left(\frac{1}{T}\right) X(f)$$

$$= \left(\frac{1}{2\cancel{T}} \frac{\cancel{T}}{4}\, \mathrm{sinc}^2 \frac{\cancel{T}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{T}} + \frac{1}{2\cancel{T}} \frac{\cancel{T}}{4}\, \mathrm{sinc}^2 \frac{\cancel{T}}{4} \frac{1}{\cancel{T}}\right) X(f)$$

$$\mathrm{sinc}^2 \frac{1}{4} = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right) = 0.8106$$

$$= \frac{1}{4}\, \mathrm{sinc}^2 \frac{1}{4}\; X(f)$$

$$z(t) = \left(\frac{1}{4}\, \mathrm{sinc}^2 \frac{1}{4}\right) x(t)$$

2

$x(t) = A + \sin^2(3t+\theta)$

$A \propto U[1,3] \qquad \theta \propto U[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad E[A] = \frac{1+3}{2} = 2$

$E[X(t)] = E[A] + E[\sin^2(3t+\theta)]$

$= 2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(3t+\theta)\frac{1}{\pi}\,d\theta$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$= 2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6t+2\theta)\right)\frac{1}{\pi}\,d\theta$

$= 2 + \frac{1}{2\pi}\pi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(6t+2\theta)\,d\theta$

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi}\left.\frac{\sin(6t+2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2\pi}\underbrace{\cancel{\frac{\sin(6t+\pi) - \sin(6t-\pi)}{2}}}_{0}$

$= \frac{5}{2}$

$R_x(t,\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = E[(A + \sin^2(3t+\theta))(A + \sin^2(3(t-\tau)+\theta))]$

$= E[A^2] + E[\sin^2(3t+\theta)\sin^2(3(t-\tau)+\theta)]$

$+ E[A\sin^2(3(t-\tau)+\theta)] + E[A\sin^2(3t+\theta)]$

$= E[A^2] + E\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6t+2\theta)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6(t-\tau)+2\theta)\right)\right]$

$+ E[A]\,E[\sin^2(3(t-\tau)+\theta)] + E[A]\,E[\sin^2(3t+\theta)]$

$E[A^2] = \int_1^3 \frac{1}{2}a^2\,da = \left.\frac{a^3}{3\cdot 2}\right]_1^3 = \frac{3^3-1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$

$E[\sin^2(3(t-\tau)+\theta)] = E[\sin^2(3t+\theta)] =$ da sopra $= \frac{1}{2}$

$$E\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(6t+2\theta)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(6(t-\tau)+2\theta)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}E[\cos(6t+2\theta)\cos(6(t-\tau)+2\theta)]$$

$$-\frac{1}{4}E[\cancel{\cos(6t+2\theta)}]^{0}-\frac{1}{4}E[\cancel{\cos(6(t-\tau)+2\theta)}]^{0}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}E[\cancel{\cos(12t-6\tau+4\theta)}]^{0}+\frac{1}{8}\cos 6\tau$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos 6\tau$$

$$R_x(t,\tau)=\frac{13}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cos 6\tau+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{52+3+12}{12}+\frac{1}{8}\cos 6\tau=\frac{67}{12}+\frac{1}{8}\cos 6\tau=R_x(\tau) \quad SSL.$$

$$6=2\pi f_0 \Rightarrow f_0=\frac{6}{2\pi}=\frac{3}{\pi}$$

$$P_x(f)=\frac{67}{12}\delta(f)+\frac{1}{16}\delta\left(f-\frac{3}{\pi}\right)+\frac{1}{16}\delta\left(f+\frac{3}{\pi}\right)$$