

LEZIONI DI TELECOMUNICAZIONI:
Modulazione analogica

Francesco Palmieri

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Seconda Università di Napoli*

a mio padre

Indice

Prefazione	11
1 Introduzione	15
1.1 Breve sommario del testo	18
2 Il Segnale Analitico e i Segnali Passa-Banda	21
2.1 Il fasore dell'elettrotecnica	21
2.2 Definizione del segnale analitico	23
2.3 La trasformata di Hilbert	24
2.4 La trasformata di Hilbert inversa	25
2.5 Interpretazione del segnale analitico	26
2.6 Proprietà del segnale analitico	30
2.7 I segnali passa-banda	38
2.8 Proprietà	42
2.9 Sistemi lineari passa-banda	45
2.10 Segnali aleatori passa-banda	46
2.10.1 Segnali passa-banda stazionari	47
2.10.2 Il segnale della modulazione lineare	54
2.11 Problemi	56
3 Modulazione Lineare	59
3.1 Introduzione	59
3.2 Modulazione DSB	60
3.2.1 Potenza e densità spettrale	63
3.2.2 Versione analitica e involuppo complesso	64
3.2.3 Scostamenti nell'oscillatore locale	65
3.3 Modulazione AM	67
3.3.1 Potenza e densità spettrale	70
3.3.2 Versione analitica	73

3.4	Efficienza spettrale di DSB e AM	74
3.5	Modulazione SSB	75
3.5.1	Potenza e densità spettrale	79
3.5.2	Versione analitica	81
3.5.3	Efficienza spettrale dell'SSB	81
3.6	Modulazione a banda vestigiale (VSB)	82
3.6.1	Potenza e densità spettrale	88
3.6.2	Efficienza spettrale	89
3.6.3	Versione analitica	90
3.7	Modulazione QAM	90
3.7.1	Potenza e densità spettrale	92
3.7.2	Efficienza spettrale	93
3.7.3	Versione analitica	94
3.8	Omodina ed Eterodina	94
3.9	Problemi	97
4	Modulatori per la Modulazione Lineare	99
4.1	Introduzione	99
4.2	Modulatori basati su moltiplicatori	100
4.3	Modulatori basati su non linearità	100
4.4	Modulatori a interruzione	103
4.5	Modulatore bilanciato	108
4.6	Modulatori SSB	110
4.6.1	Modulatori a più stadi	110
4.6.2	Modulatori che usano la Trasformata di Hilbert	111
4.6.3	Modulatore di Weaver	112
4.7	Problemi	115
5	Demodulatori per la Modulazione Lineare	119
5.1	Introduzione	119
5.2	Sincronismo nel demodulatore coerente	120
5.2.1	Schema con la pilota	120
5.2.2	Recupero nel DSB dalle bande laterali	121
5.2.3	Il loop di Costas	122
5.3	Demodulatore di involuppo	125
5.3.1	Discussione analitica	126
5.4	Demodulatore con aggiunta locale della portante	130
5.5	Problemi	133

6	Applicazioni della Modulazione Lineare	135
6.1	Multiplex di frequenza	135
6.2	Ricevitore a supereterodina	137
6.3	Segnale stereo compatibile	138
6.4	Problemi	141
7	Modulazione Lineare in Presenza di Rumore	145
7.1	Introduzione	145
7.2	Prestazioni su canale non distorcente	148
7.2.1	Demodulazione di involuppo	152
7.2.2	Confronto tra le varie modulazioni	155
7.3	Interpretazione grafica	158
7.4	Errore di fase nel demodulatore coerente	162
7.5	Problemi	163
8	Modulazione Angolare	165
8.1	Introduzione	165
8.1.1	Invertibilità	168
8.2	Modulazione angolare a banda stretta	170
8.2.1	La versione analitica	171
8.2.2	Il modulatore di Armstrong	172
8.2.3	Potenza e densità spettrale	173
8.3	Modulazione a banda larga	174
8.3.1	Modulante sinusoidale	174
8.3.2	Due modulanti sinusoidali	179
8.3.3	Più modulanti sinusoidali	179
8.3.4	Modulante aleatoria	181
8.4	La banda di Carson	185
9	Segnali PM e FM e Sistemi	187
9.1	Segnali modulati FM in sistemi lineari	187
9.2	Moltiplicazione di frequenza	189
9.3	Problemi	192
10	Modulatori e Demodulatori per la Modulazione Angolare	193
10.1	Introduzione	193
10.2	Modulazione FM diretta	193
10.3	Modulazione FM indiretta	195
10.4	Demodulazione di fase	197
10.4.1	Il discriminatore di frequenza	197

10.4.2	Schema basato sugli zero-crossing	204
10.4.3	Il PLL	206
10.4.4	L' FMFB	212
11	Modulazione angolare in presenza di rumore	215
11.1	Introduzione	215
11.2	Analisi per rapporto segnale-rumore elevato	218
11.3	Equalizzazione nell'FM	222
11.4	Analisi dell'FM per rumore dominante	226
11.4.1	Probabilità di occorrenza dei salti di fase	227
11.4.2	Il rumore in uscita	231
A	La funzione di Bessel	237

Prefazione

Queste note sono il compendio di lezioni da me tenute presso le Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli Federico II e della Seconda Università di Napoli, negli anni 1993-2007, rivolte agli allievi dei Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Ingegneria delle Telecomunicazioni e Ingegneria Informatica. Gli argomenti trattati riguardano un sottoinsieme delle lezioni dei corsi di: Comunicazioni Elettriche, IV anno vecchio ordinamento quinquennale; Comunicazioni Elettriche, III anno nuovo ordinamento triennale, Telecomunicazioni 2, II anno nuovo ordinamento triennale; Comunicazioni Elettriche, I anno Laurea Magistrale.

Dopo ripetuti inviti da parte degli studenti, ho accettato la sfida di scrivere queste note con il preciso fine di riportare in forma scritta e in chiave metodologica, le principali tecniche di modulazione su portante sinusoidale che vengono discusse a lezione. Tutti gli argomenti trattati sono ovviamente ben consolidati nella letteratura scientifica e tecnica, ma sono in genere un pò dispersi e trattati, o ad un livello troppo dettagliato dal punto di vista analitico, o in una chiave troppo introduttiva tale da tralasciare molti degli aspetti metodologici di collegamento alla teoria dei segnali.

Lo studente che ha appreso dai corsi precedenti i concetti relativi l'analisi di Fourier e la teoria dei segnali aleatori, trova proprio nello studio dei sistemi di modulazione ad onda continua la prima reale opportunità di caratterizzare e manipolare i segnali nel dominio del tempo e della frequenza.

L'argomento della modulazione analogica, nonostante possa sembrare un pò datato, visto che molti moderni sistemi di modulazione stanno convergendo verso modalità numeriche, conserva una forte componente metodologica indispensabile all'ingegnere che progetta o gestisce sistemi di telecomunicazione. L'utilizzo efficiente dello spettro elettromagnetico, la distribuzione delle potenze e la gestione delle interferenze non possono prescindere dalle tecniche di conversione di frequenza e di caratterizzazione del rumore tempo-continuo. Anche nei sistemi numerici di nuova generazione, i primi e gli ultimi stadi delle catene di ricezione e trasmissione che accedono al canale

a forma d'onda, sono comunque analogici.

Il taglio della discussione di queste note è prevalentemente di tipo operativo. A costo di una certa ridondanza, per facilitare il lettore, ho cercato di includere quasi tutti i passaggi matematici nelle varie derivazioni analitiche. Ho cercato di limitare al massimo gli aspetti teorici, nonostante il livello di rigore matematico sia mantenuto ad un livello accettabile.

Gli argomenti di queste note dovrebbero impiegare lo studente e il docente per circa 20-30 ore di lezione. I prerequisiti per il lettore sono: (a) delle buone basi di calcolo elementare; (b) una buona conoscenza dei principali strumenti della teoria dei segnali deterministici e aleatori.

Diversi esempi sono proposti durante la presentazione degli argomenti e alcuni problemi sono proposti alla fine di ogni capitolo.

I simboli e le definizioni utilizzati nel testo sono quelli classici della teoria dei segnali. Coloro che fossero interessati a dei richiami, possono trovare nelle mie note, [Palmieri, 2007, *Lezioni di Telecomunicazioni: Elementi di Teoria dei Segnali Tempo-Continuo*], per ora disponibili solo in fotocopia, tutti i riferimenti necessari.

Le discussioni sulle possibili realizzazioni di modulatori e demodulatori sono ridotte al minimo, solo con qualche breve riferimento a classici schemi circuitali. L'enfasi delle lezioni resta sugli aspetti di sistema e sulla manipolazione dei segnali. Oggi infatti, la vastissima disponibilità sul mercato dell'elettronica di circuiti integrati che realizzano le funzioni tipiche della modulazione, rende possibile progettare e realizzare facilmente sistemi completi solo dal diagramma a blocchi, senza particolare enfasi sui dettagli circuitali.

Per il lettore interessato all'approfondimento, in coda a queste note, ho compilato una breve bibliografia. Questa include alcuni testi classici per l'approfondimento teorico e alcuni testi didattici molto usati nelle varie università mondiali.

Ringrazio i colleghi e i collaboratori che hanno incoraggiato questo progetto e hanno fornito preziosi suggerimenti. In particolare ringrazio i Proff. Luciano Izzo, Davide Mattera, Antonio Napolitano, Mario Tanda, i ricercatori Ingg. Alessandra Budillon e Gianmarco Romano e l'Ing. Pierluigi Salvo Rossi.

Ringrazio tutti gli studenti che in questi anni hanno pazientemente seguito le mie lezioni e che attraverso le loro acute osservazioni, espresse a volte anche in sede di esame, hanno consentito di arrivare alla presente forma scritta. Sarò inoltre grato a tutti coloro che nella lettura del mano-

scritto rilevassero errori, omissioni o semplicemente volessero proporre dei miglioramenti.

Il ringraziamento più grande va alla mia famiglia alla quale ho sottratto molto del tempo necessario alla preparazione di queste note.

Francesco Palmieri

Aversa, ottobre 2007

Capitolo 1

Introduzione

L'obiettivo di un sistema di comunicazione è il trasporto affidabile dell'informazione proveniente da una *sorgente* a un *destinatario*.

Esempi di sorgente sono: un segnale acustico proporzionale alle variazioni di pressione dell'aria e trasdotto da un microfono; un segnale prelevato da un sensore ambientale; un segnale numerico proveniente da un computer; un segnale elettrico prelevato da elettrodi posizionati su un corpo umano; un segnale prelevato da un sensore di vibrazioni; ecc.

Lo scenario tipico delle *comunicazioni elettriche* è il trasporto a distanza di un tale segnale mediante l'utilizzo di un campo elettromagnetico convogliato o irradiato.

Nei primi sistemi telefonici, ai fini del trasporto del segnale vocale, si utilizzava solo la variazione di corrente nel circuito di collegamento tra i due terminali. Il segnale non era il risultato di una elaborazione, ma era indotto nel circuito in maniera direttamente proporzionale alle variazioni impresse dal microfono. I limiti di un tale sistema, che comunque costituisce ancora oggi lo schema di riferimento del circuito di corrente tra il telefono di casa e la centrale, sono immediatamente evidenti se si vuole trasmettere il segnale a maggiore distanza usando per esempio le variazioni di un campo elettromagnetico irradiato da un'antenna. Le frequenze del segnale e quelle della radiazione elettromagnetica sarebbero troppo diverse, anche se in linea di principio canali elettromagnetici a bassa frequenza potrebbero essere concepiti. In pratica le dimensioni delle antenne, che devono essere dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda, richiedono che i segnali al loro ingresso siano opportunamente trasformati in segnali a frequenze più elevate ai fini della fisica realizzabilità.

Nella maggioranza delle applicazioni delle telecomunicazioni le caratter-

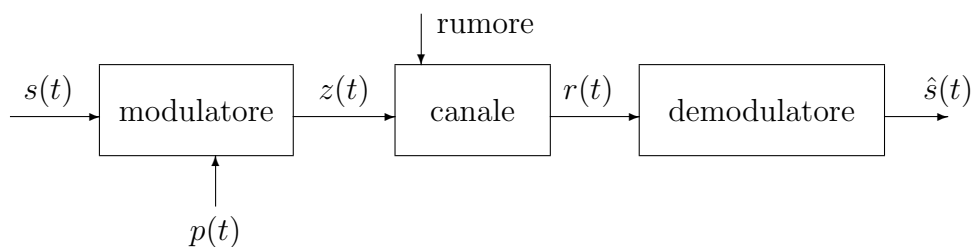


Figura 1.1: Lo schema tipico di un sistema di modulazione

istiche della sorgente non consentono un collegamento diretto al meccanismo di trasporto (*canale*) ed è necessaria un'operazione di adattamento detta *modulazione*, anche per consentire una maggiore flessibilità d'impiego del mezzo trasmissivo.

Nell'esempio del trasporto del segnale vocale, la modulazione rende la trasmissione possibile traslando il segnale dalla *banda base* ad una frequenza compatibile con l'irradiazione del campo elettromagnetico.

Il termine “modulazione” viene dall'idea che, dato un fenomeno fisico di trasporto (fenomeno portante), il segnale di informazione va a modificarne dinamicamente i parametri fisici in maniera reversibile. Ci si aspetta infatti che il segnale impresso (segnale modulante) sia recuperabile a destinazione dopo la propagazione.

Lo schema semplificato di un sistema di modulazione è mostrato in figura 1.1 dove il segnale di informazione (*modulante*) $s(t)$ è tempo-continuo e viene “mescolato” ad un altro segnale $p(t)$ detto *portante* (*carrier*). Il *segnale modulato* $z(t)$ viene propagato in un canale che introduce distorsioni e disturbi e viene ricevuto da un *demodulatore* che deve recuperare al meglio $s(t)$.

L'operazione di modulazione deve modificare dinamicamente i parametri di $p(t)$ in maniera da renderlo: (a) trasportabile sul canale; (b) il più possibile immune alle distorsioni e alle interferenze; (c) demodulabile, ovvero tale da consentire il recupero in ricezione di un segnale $\hat{s}(t)$ che sia una replica più fedele possibile di $s(t)$.

Nella *modulazione ad onda continua*, o *analogica*, la portante è un segnale periodico di frequenza f_0 , che può essere una sinusoidale (*modulazione su portante sinusoidale*) o un segnale impulsivo (*modulazione su portante*

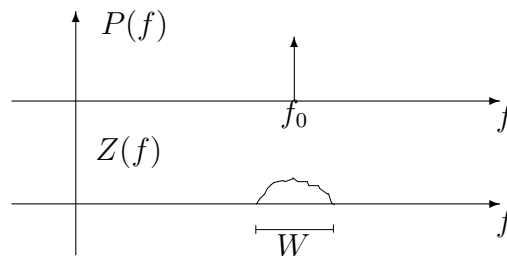


Figura 1.2: La portante e il segnale modulato passa-banda

impulsiva). Il segnale modulante $s(t)$ è un segnale tempo-continuo e il modulatore imprime su $p(t)$ una modifica dinamica di ampiezza e fase istantanea.

In queste note tratteremo solo lo scenario più comune di modulazione su portante sinusoidale anche se le metodologie di studio dei segnali modulati a impulsi sono analoghe. La modulazione su portante impulsiva è poco usata nelle applicazioni e preferiamo rimandare lo studio di tali segnali direttamente al contesto della modulazione numerica.

Il segnale modulato su portante sinusoidale si scrive in generale

$$z(t) = A f[s(t)] \cos(2\pi f_0 t + \phi[s(t)]), \quad (1.1)$$

dove il parametro f_0 è la *frequenza della portante*, il parametro A è l'*ampiezza della portante* e le funzioni $f[s(t)]$ e $\phi[s(t)]$ descrivono rispettivamente le variazioni sull'ampiezza e sulla fase istantanea in funzione del segnale modulante. Le varie scelte di $f[\cdot]$ e $\phi[\cdot]$ determinano i formati di modulazione che saranno presentati in seguito.

Come mostrato schematicamente in figura 1.2, la modulazione nel dominio della frequenza trasforma la portante sinusoidale, che ha una banda infinitamente stretta, in un segnale passa-banda di larghezza W Hz. Il modulatore in dipendenza di $s(t)$ e del tipo di modulazione, “disperde” la potenza della portante sullo spettro attorno a f_0 generando un segnale passa-banda. Come vedremo in seguito, in alcuni casi anche una versione attenuata della portante e/o altre componenti sinusoidali possono essere presenti in $z(t)$.

La natura del segnale passa-banda in uscita al modulatore sarà esaminata in dettaglio per vari formati con riferimento all'occupazione in banda e all'immunità ai disturbi e alle distorsioni.

Un sistema di comunicazione reale è in pratica un pò più complesso dello schema semplificato di figura 1.1, dove non sono stati indicati esplicitamente gli stadi di amplificazione e di filtraggio dei segnali, sia all'ingresso che all'uscita di modulatore e demodulatore. Cercheremo di fornire nel seguito di queste note anche su questi componenti, in chiave introduttiva, diversi commenti con riferimento ai vari schemi di modulazione.

Si noti che una modulazione può anche essere utilizzata in *tempo diferito* (off-line), ovvero con il segnale modulato che viene convogliato sul fenomeno portante e poi recuperato successivamente. Si pensi ai sistemi di memorizzazione in cui il canale è costituito dal mezzo su cui viene impresso il segnale modulato (come ad esempio nastri e bande magnetiche). Le modulazioni e le relative prestazioni possono essere studiate con le stesse metodologie anche se con peculiari caratteristiche di canale.

1.1 Breve sommario del testo

Queste note sono organizzate in 11 capitoli di cui il primo (Capitolo 2) è dedicato esclusivamente alla teoria del segnale analitico e dei segnali passa-banda. Viene introdotta la rappresentazione complessa dei segnali reali tempo-continuo con le principali proprietà sia per il caso deterministico che per quello aleatorio. Questo capitolo è propedeutico a tutti gli altri poiché le tecniche di caratterizzazione e manipolazione dei segnali complessi passa-banda costituiscono lo strumento essenziale per trattare analiticamente i segnali della modulazione e per interpretare graficamente le prestazioni in presenza di rumore.

Il Capitolo 3 introduce la modulazione lineare, e in particolare i formati DSB, AM, SSB, VSB e QAM. Per ognuna di queste tipologie vengono discusse le caratteristiche spettrali e la rappresentazione complessa.

I Capitoli 4 e 5 trattano i principali schemi di modulatori e demodulatori per la modulazione lineare con qualche breve riferimento a realizzazioni circuitali di principio. Nell'analisi si assume che il canale di trasmissione sia ideale, ovvero non introduca né distorsione, né rumore.

Il Capitolo 6 presenta alcuni schemi applicativi tipici della modulazione lineare quali la modulazione a divisione di frequenza (FDM), lo stereo compatibile e il ricevitore a supereterodina.

Il Capitolo 7 analizza e mette a confronto le prestazioni dei vari schemi di modulazione lineare in presenza di canale rumoroso non distorcente.

Il Capitolo 8 introduce la modulazione angolare e in particolare la mod-

ulazione di fase (PM) e la modulazione di frequenza (FM). Vengono esaminati entrambi i casi di modulazione a banda stretta e a banda larga per modulante sinusoidale, periodica e aleatoria. Alcune definizioni e proprietà delle funzioni di Bessel, necessarie alla caratterizzazione per modulante sinusoidale, sono sinteticamente riportate in appendice.

Nel Capitolo 9, per i segnali modulati in angolo, viene derivata l'approssimazione quasi-statica che caratterizza i segnali dopo la propagazione in sistemi lineari tempo-invarianti. Vengono inoltre introdotti i moltiplicatori di frequenza con qualche esempio.

Nel Capitolo 10 si affronta il problema della modulazione e della demodulazione di frequenza. Viene introdotto il discriminatore di frequenza e l'anello ad aggancio di fase (PLL).

Il Capitolo 11 analizza infine la modulazione angolare in presenza di rumore sia quando il segnale è dominante sul rumore, che quando il rapporto segnale-rumore è basso. Il capitolo si conclude con un confronto delle prestazioni della modulazione angolare con gli altri schemi di modulazione lineare.

Capitolo 2

Il Segnale Analitico e i Segnali Passa-Banda

In questo capitolo viene introdotta la rappresentazione complessa per i segnali reali, detta *segnale analitico*. Il segnale analitico costituisce una generalizzazione del fasore dell'elettrotecnica e consente di definire inviluppo, fase e frequenza istantanei per un segnale reale generico. La definizione del segnale analitico è basata sulla trasformata di Hilbert che viene sinteticamente introdotta insieme alle sue principali proprietà. La rappresentazione geometrica viene poi applicata ai segnali passa-banda per i quali vengono definiti l'inviluppo complesso e le componenti in fase e in quadratura. Le proprietà della rappresentazione passa-banda vengono discusse con particolare riferimento ad esempi tipici della modulazione analogica.

2.1 Il fasore dell'elettrotecnica

Nello studio dei sistemi lineari, o più in particolare delle reti elettriche lineari in regime sinusoidale, è molto comune trattare i segnali in gioco (tutti sinusoidali) come dei vettori ruotanti nello spazio complesso. Ad ogni segnale sinusoidale $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$, di *ampiezza* A_0 , *frequenza* f_0 e *fase iniziale* θ_0 , si associa la funzione complessa $\overset{\circ}{x}(t)$ detta *fasore*

$$\overset{\circ}{x}(t) = A_0 e^{j(2\pi f_0 t + \theta_0)}. \quad (2.1)$$

La funzione $\overset{\circ}{x}(t)$, mostrata in Figura 2.1, nel piano complesso è un vettore di modulo costante A_0 ruotante attorno all'origine a velocità angolare costante $\omega_0 = 2\pi f_0$ rad/sec e fase iniziale θ_0 .

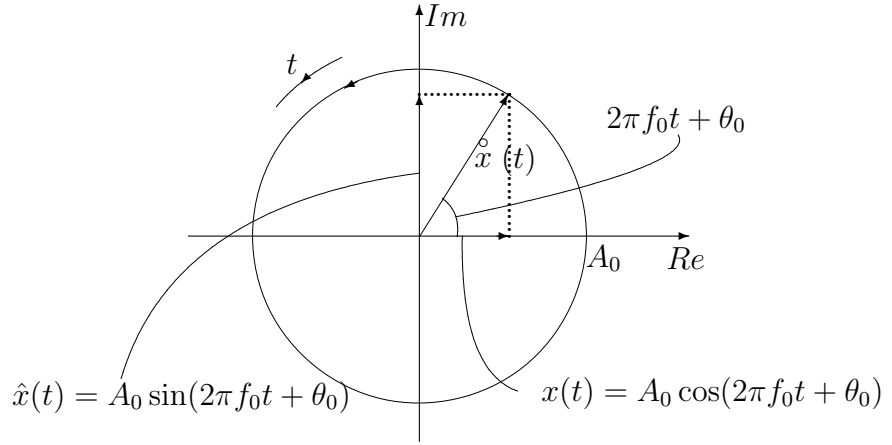


Figura 2.1: Il fasore nel piano complesso

La sinusoidale $x(t)$ si riottiene proiettando il fasore sull'asse reale, ovvero

$$x(t) = \text{Re} [\hat{x}(t)] = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0). \quad (2.2)$$

Il fasore può quindi essere pensato come una *estensione analitica* di $x(t)$ che consiste nell'aggiungere al coseno reale, una parte immaginaria pari ad un seno avente lo stesso argomento del coseno

$$\hat{x}(t) = A_0 e^{j(2\pi f_0 t + \theta_0)} = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) + j A_0 \sin(2\pi f_0 t + \theta_0). \quad (2.3)$$

Anche se questa operazione potrebbe sembrare una inutile complicazione, essa costituisce la base del cosiddetto *metodo dei fasori* estremamente utile nella trattazione pratica delle reti in regime sinusoidale. Infatti la associazione allo spazio vettoriale consente di studiare la sovrapposizione di più componenti mediante la semplice composizione geometrica dei vettori corrispondenti. Nel piano complesso è abbastanza semplice vedere come si compongono le varie fasi di più componenti sinusoidali (si pensi ai sistemi elettrici trifase). Il piano complesso è infatti detto anche *piano delle fasi*. Per maggiori dettagli sull'uso dei fasori per le reti in regime sinusoidale, si veda qualunque buon testo di elettrotecnica.

Prima di introdurre la generalizzazione del fasore, notiamo che nel dominio della frequenza il segnale sinusoidale ha trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{A_0}{2} (e^{j\theta_0} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta_0} \delta(f + f_0)), \quad (2.4)$$

costituita da due impulsi di Dirac a frequenze f_0 e $-f_0$. Il fasore invece ha trasformata

$$\mathcal{F} [\overset{\circ}{x}(t)] = A_0 e^{j\theta_0} \delta(f - f_0). \quad (2.5)$$

Il fasore $\overset{\circ}{x}(t)$ contiene la sola componente impulsiva a frequenza f_0 che differisce da quella di $x(t)$ solo per una costante moltiplicativa pari a 2. Quindi il passaggio al fasore consiste nel cancellare la parte dello spettro a frequenze negative e a moltiplicare per 2, ovvero

$$\mathcal{F} [\overset{\circ}{x}(t)] = A_0 e^{j\theta_0} \delta(f - f_0) = 2u(f) \mathcal{F} [x(t)]. \quad (2.6)$$

Questa osservazione suggerisce che una tale operazione potrebbe essere applicata a un segnale reale generico ed è infatti la metodologia che viene utilizzata per la costruzione del segnale analitico.

2.2 Definizione del segnale analitico

Definizione: Dato un segnale reale $x(t)$ avente trasformata $X(f)$, si definisce segnale analitico $\overset{\circ}{x}(t)$ associato a $x(t)$, il segnale complesso che ha trasformata di Fourier pari a

$$\mathcal{F} [\overset{\circ}{x}(t)] = 2u(f)X(f). \quad (2.7)$$

Quindi, come anticipato a proposito del fasore sinusoidale, il passaggio da un segnale alla sua *estensione analitica* consiste nella rimozione (messa a zero) della parte dello spettro a frequenze negative e in un prodotto per due. L'operazione non comporta alcuna perdita di informazione (ovvero è invertibile) in quanto per ogni segnale reale, la trasformata di Fourier è una funzione Hermitiana. Ricordiamo al lettore che uno spettro Hermitiano è tale che $X(f) = X^*(-f)$, ovvero la parte reale di $X(f)$ è una funzione pari, mentre la parte immaginaria è una funzione dispari. Analogamente il modulo di $X(f)$ è una funzione pari, mentre la fase è una funzione dispari. Questo implica che la struttura della funzione è già tutta disponibile su un semiasse delle frequenze: data la funzione per frequenze positive, il modulo a frequenze negative si ottiene per simmetria e la fase per antisimmetria. Analogamente per la parte reale e la parte immaginaria.

L'operazione di passaggio al segnale analitico, può anche essere schematizzata come il sistema lineare mostrato in Figura 2.2 avente risposta armonica $H_a(f) = 2u(f)$. Riconoscendo che $2u(\cdot) = 1 + \text{sgn}(\cdot)$, il segnale

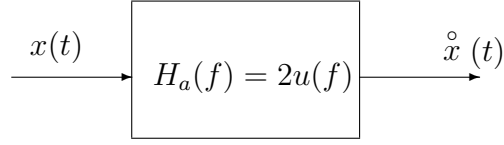


Figura 2.2: Il sistema lineare per il passaggio al segnale analitico

analitico nel dominio della frequenza si può anche scrivere come

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = 2u(f)X(f) = X(f) + \text{sgn}(f)X(f). \quad (2.8)$$

La risposta impulsiva del sistema nel dominio del tempo, usando la proprietà della dualità e la nota trasformata del gradino, è

$$h_a(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_a(f)] = \delta(t) + j\frac{1}{\pi t}. \quad (2.9)$$

Più esplicitamente

$$\hat{x}(t) = (h_a * x)(t) = x(t) + j\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t - \xi} d\xi. \quad (2.10)$$

Quindi il segnale analitico è ottenuto dal segnale reale $x(t)$ mediante la aggiunta di un parte immaginaria che è la convoluzione di $x(t)$ con la funzione $1/\pi t$.

2.3 La trasformata di Hilbert

Definizione: Si definisce *Trasformata di Hilbert* di un segnale reale $x(t)$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t - \xi} d\xi. \quad (2.11)$$

Poiché la trasformata di Hilbert¹ è la convoluzione di $x(t)$ con la funzione

$$h_H(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad (2.12)$$

¹L'integrale della definizione della trasformata di Hilbert può dare luogo ad un integrale improprio. In tali caso si utilizza il valore principale dell'integrale (se esiste). Le questioni sulla esistenza della trasformata di Hilbert e le proprietà di convergenza vanno oltre lo scopo di queste note e saranno trattate solo quando necessario per non distogliere il lettore dalla metodologia generale.

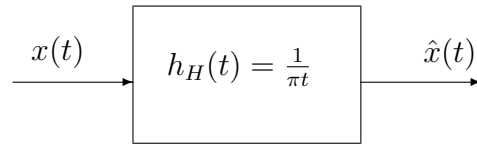


Figura 2.3: Il trasformatore di Hilbert

essa può essere schematizzata come l'uscita del sistema lineare mostrato in Figura 2.3. Il grafico della risposta impulsiva è mostrato in Figura 2.4. Essa presenta una discontinuità in $t = 0$ ed, essendo diversa da zero per $t < 0$, è non causale. Quindi il trasformatore di Hilbert, così com'è definito, non è fisicamente realizzabile.²

Nel dominio della frequenza il trasformatore di Hilbert ha risposta armonica pari a

$$H_H(f) = \mathcal{F}[h_H(t)] = \frac{\text{sgn}(f)}{j}. \quad (2.13)$$

Il grafico di modulo e fase di $H_H(f)$ sono riportati in Figura 2.4. Il modulo è costante, $|H_H(f)| = 1$ (filtro passa-tutto), e la fase ha una discontinuità in $f = 0$ ed è $\angle H_H(f) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f)$, in quanto per $f > 0$, $H_H(f) = 1/j = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$; analogamente per $f < 0$, $H_H(f) = -1/j = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

2.4 La trasformata di Hilbert inversa

Osserviamo che eseguendo la trasformata di Hilbert due volte

$$\hat{\hat{x}}(t) = (h_H * h_H * x)(t) = -x(t). \quad (2.14)$$

Questo si vede immediatamente osservando che nel dominio della frequenza

$$\mathcal{F}[\hat{\hat{x}}(t)] = H_H(f)H_H(f)X(f) = \left(\frac{\text{sgn}(f)}{j}\right)^2 X(f) = -X(f). \quad (2.15)$$

²Maggiori dettagli sulla fisica realizzabilità della trasformata di Hilbert saranno discussi in seguito. In pratica, un blocco lineare che realizza una approssimazione alla trasformata di Hilbert può essere realizzato ritardando di $t_0 > 0$ la risposta impulsiva, troncandola a $t = 0$ e saturandone l'ampiezza. Vedremo, quando parleremo della modulazione SSB, come alcuni schemi di modulatori possano essere realizzati mediante tali approssimazioni.

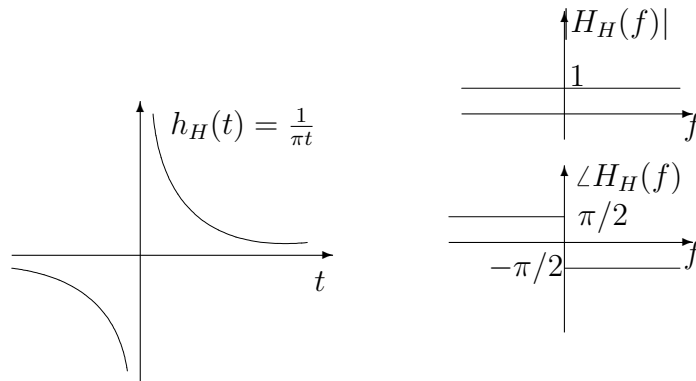


Figura 2.4: Il trasformatore di Hilbert nel dominio del tempo e della frequenza

Pertanto la *trasformata inversa di Hilbert* è

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\xi)}{t - \xi} d\xi = -(h_H * \hat{x})(t). \quad (2.16)$$

Ovvero la anti-trasformata di Hilbert è formalmente identica alla trasformata a meno del segno.

Le applicazioni della trasformata di Hilbert non si limitano alla definizione del segnale analitico, ma sono utilizzate nelle applicazioni della teoria dei sistemi e dei problemi inversi. Ulteriori approfondimento sull'argomento sono al di là dello scopo di queste note e vengono tralasciate per brevità. Nel seguito di queste note ci limiteremo a mostrare come, mediante la trasformata di Hilbert, sia possibile ottenere una rappresentazione compatta del segnale modulato a singola banda laterale (SSB).

2.5 Interpretazione del segnale analitico

Avendo definito la trasformata di Hilbert, vale la seguente proprietà:

Proprietà 2.1 Il segnale analitico associato al segnale reale $x(t)$ si ottiene come somma del segnale e di un parte immaginaria pari alla sua trasformata di Hilbert

$$\hat{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t). \quad (2.17)$$

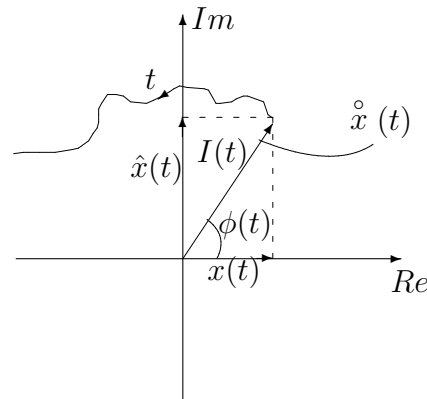


Figura 2.5: La rappresentazione vettoriale del segnale analitico

La Figura 2.5 mostra il vettore $\hat{x}(t)$ nel piano complesso. La punta del vettore descrive una traiettoria generica nel piano delle fasi a differenza del fasore sinusoidale che descrive solo una circonferenza. La formulazione del segnale analitico è particolarmente interessante in quanto consente una generalizzazione dei concetti di ampiezza, frequenza e fase che in elettrotecnica si applicano solo ai segnali sinusoidali. In particolare, l'ampiezza della sinusoide si generalizza all'ampiezza istantanea del vettore che è detta *involuppo istantaneo*; la fase della sinusoide, che è una funzione lineare del tempo si generalizza alla *fase istantanea*; la frequenza, costante nel caso sinusoidale, diventa la *frequenza istantanea* nel caso generale. Più precisamente:

Definizione: L'*involuppo istantaneo* $I(t)$ di un segnale reale $x(t)$ è il modulo del segnale analitico

$$I(t) = |\hat{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}. \quad (2.18)$$

Definizione: La *fase istantanea* $\phi(t)$ di un segnale reale $x(t)$ è la fase del segnale analitico

$$\phi(t) = \angle \hat{x}(t) = \text{tg}^{-1} \frac{\hat{x}(t)}{x(t)}. \quad (2.19)$$

Definizione: La *pulsazione istantanea* $\omega(t)$ di un segnale reale $x(t)$ è la derivata della fase del segnale analitico

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad \text{rad.} \quad (2.20)$$

La *frequenza istantanea* $f(t)$ di un segnale reale $x(t)$ è la derivata della fase del segnale analitico, diviso per 2π

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad \text{Hz.} \quad (2.21)$$

E' interessante notare che dalla nota espressione della derivata dell'arcotangente

$$\frac{d \operatorname{tg}^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}, \quad (2.22)$$

abbiamo che la frequenza istantanea può essere espressa più esplicitamente come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{d\hat{x}(t)}{dt}x(t) - \hat{x}(t)\frac{dx(t)}{dt}}{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}. \quad (2.23)$$

Le definizioni di inviluppo istantaneo e fase istantanea ci consentono di esprimere ogni segnale reale come

$$x(t) = I(t) \cos \phi(t). \quad (2.24)$$

Tale rappresentazione, insieme alle altre che saranno introdotte nel seguito, risulta molto utile nello studio dei segnali per telecomunicazioni.

Esempio 2.1 Si valuti la versione analitica del segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \sin(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{3}). \quad (2.25)$$

Soluzione: La trasformata di Fourier di $x(t)$ è

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{B}{2j} [e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(f - f_1) - e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(f + f_1)]. \quad (2.26)$$

Il segnale analitico nel dominio della frequenza si ottiene come

$$\mathcal{F} [\overset{\circ}{x}(t)] = 2u(f)X(f) = A\delta(f - f_0) + \frac{B}{j} e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(f - f_1). \quad (2.27)$$

Nel dominio del tempo il segnale analitico è

$$\overset{\circ}{x}(t) = A e^{j2\pi f_0 t} + B e^{j(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{6})}. \quad (2.28)$$

Esempio 2.2 Si valuti la versione analitica del segnale

$$x(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad (2.29)$$

dove $s(t)$ è un segnale passa-basso con frequenza massima pari a B e $f_0 > B$. Si valutino inoltre l'involuppo, fase e frequenza istantanea.

Soluzione: La trasformata di Fourier di $x(t)$ è

$$X(f) = \frac{1}{2}S(f - f_0) + \frac{1}{2}S(f + f_0). \quad (2.30)$$

Il segnale analitico nel dominio della frequenza è

$$\mathcal{F}[\overset{\circ}{x}(t)] = 2u(f)X(f) = S(f - f_0), \quad (2.31)$$

e nel dominio del tempo

$$\overset{\circ}{x}(t) = s(t)e^{j2\pi f_0 t}. \quad (2.32)$$

L'involuppo istantaneo è

$$I(t) = |s(t)|. \quad (2.33)$$

La fase istantanea è

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t + \pi [1 - u(s(t))], \quad (2.34)$$

dove i salti di fase pari a π corrispondono alle inversioni del segno di $s(t)$. La frequenza istantanea si ottiene derivando

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2} \frac{d[1 - u(s(t))]}{dt} = f_0 - \frac{1}{2} \frac{du(s(t))}{dt}, \quad (2.35)$$

dove il secondo termine darà luogo a degli impulsi di Dirac di area unitaria in corrispondenza dei cambi di segno di $s(t)$.

Esempio 2.3 Si valuti la versione analitica del segnale

$$x(t) = s_1(t) \cos(2\pi f_0 t) + s_2(t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (2.36)$$

dove $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono due segnali reali passa-basso con frequenza massima pari a B e $f_0 > B$.

Soluzione:

$$X(f) = \frac{1}{2}(S_1(f - f_0) + S_1(f + f_0)) + \frac{1}{2j}(S_2(f - f_0) - S_2(f + f_0)). \quad (2.37)$$

Passando al segnale analitico nel dominio della frequenza

$$\mathcal{F}[\overset{\circ}{x}(t)] = S_1(f - f_0) + \frac{1}{j}S_2(f - f_0). \quad (2.38)$$

La soluzione nel dominio del tempo è

$$\overset{\circ}{x}(t) = (s_1(t) - js_2(t))e^{j2\pi f_0 t}. \quad (2.39)$$

Esempio 2.4 Si valuti la versione analitica del segnale costante

$$x(t) = A. \quad (2.40)$$

Soluzione: La trasformata è una delta di Dirac in $f = 0$ e pone il problema di come azzerare la parte negativa. Cerchiamo una strada alternativa passando per la trasformata di Hilbert di $x(t)$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t - \xi} d\xi. \quad (2.41)$$

Anche qui, come spesso succede nel calcolo della trasformata di Hilbert, c'è qualche insidia in quanto la funzione integranda non è sommabile. Si tratta di un integrale improprio per cui ricorriamo al valore principale, ovvero valutiamo l'integrale come il limite

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0; \alpha \rightarrow \infty} \left[\int_{-\alpha}^{t-\epsilon} \frac{A}{t - \xi} d\xi + \int_{t+\epsilon}^{\alpha} \frac{A}{t - \xi} d\xi \right]. \quad (2.42)$$

Cambiando variabili in uno dei due integrali abbiamo che i due termini in parentesi sono uguali e di segno opposto. Pertanto il termine in parentesi è nullo e $\hat{x}(t) = 0$. Il segnale analitico della costante A coincide con la costante stessa.

2.6 Proprietà del segnale analitico

Ricordiamo che la linearità delle operazioni implica che se $z(t) = x(t) + y(t)$,

$$\hat{z}(t) = \hat{x}(t) + \hat{y}(t), \quad \overset{\circ}{z}(t) = \overset{\circ}{x}(t) + \overset{\circ}{y}(t). \quad (2.43)$$

L'additività consente di manipolare i segnali analitici con le regole dell'algebra vettoriale. La figura 2.6 mostra alcune operazioni elementari. Ulteriori proprietà sono riportate di seguito.

Proprietà 2.2 Sia $x(t)$ un segnale passa-basso e $y(t)$ un segnale passa-banda e $z(t)$ il loro prodotto $z(t) = x(t)y(t)$. Le bande dei due segnali $x(t)$ e $y(t)$ siano non sovrapposte. Si ha che

$$\overset{\circ}{z}(t) = x(t) \overset{\circ}{y}(t). \quad (2.44)$$

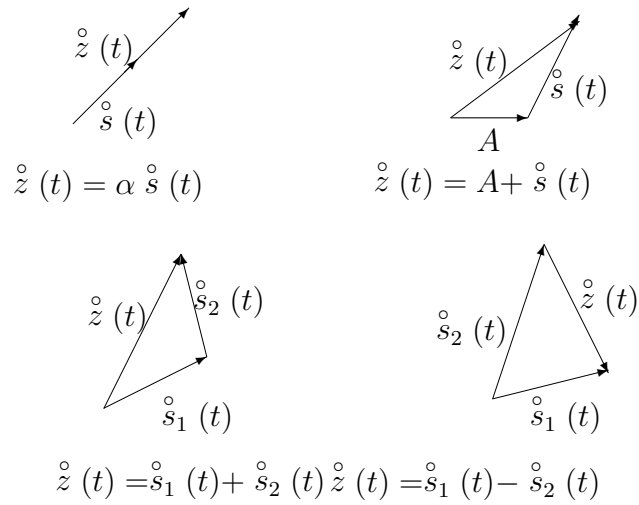


Figura 2.6: Operazioni elementari sui segnali analitici

Prova: Si supponga che la frequenza massima di $x(t)$ sia B_1 e la banda di $y(t)$ sia $[B_2 B_3]$ con $B_1 < B_2 < B_3$. Si guardi la figura 2.7. Nel dominio della frequenza $Z(f) = (X * Y)(f)$, ed è un segnale passa-banda nella banda $[B_2 - B_1 B_3 + B_1]$. La versione analitica di $z(t)$ ha spettro nullo alle frequenze negative. Pertanto la convoluzione tra $X(f)$ e $Y(f)$ fornisce lo stesso risultato della convoluzione della trasformata di $\overset{\circ}{y}(t)$ e $x(t)$, che è il risultato enunciato.

Esempio 2.5 Si consideri il segnale DSB $z(t) = Ax(t) \cos 2\pi f_0 t$, dove $x(t)$ è un segnale passa-basso con frequenza massima pari a B e $f_0 > B$. Si tratta del prodotto di un segnale passa-basso e di un segnale passa-banda (la sinusoide può essere pensata come un segnale a banda strettissima). Pertanto è possibile applicare il risultato della proprietà 2.2. Il segnale analitico corrispondente alla sinusoide è $Ae^{i2\pi f_0 t}$. Pertanto il segnale analitico corrispondente al segnale $z(t)$ è

$$\overset{\circ}{z}(t) = Ax(t)e^{i2\pi f_0 t}. \quad (2.45)$$

Il risultato era già stato ottenuto in nell'esempio 2.2 direttamente dalla definizione del segnale analitico.

Proprietà 2.3 Dati due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$ e la loro convoluzione lineare $z(t) = (x * y)(t)$, si ha che

$$\overset{\circ}{z}(t) = (\overset{\circ}{x} * \overset{\circ}{y})(t) = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{x} * \overset{\circ}{y})(t). \quad (2.46)$$

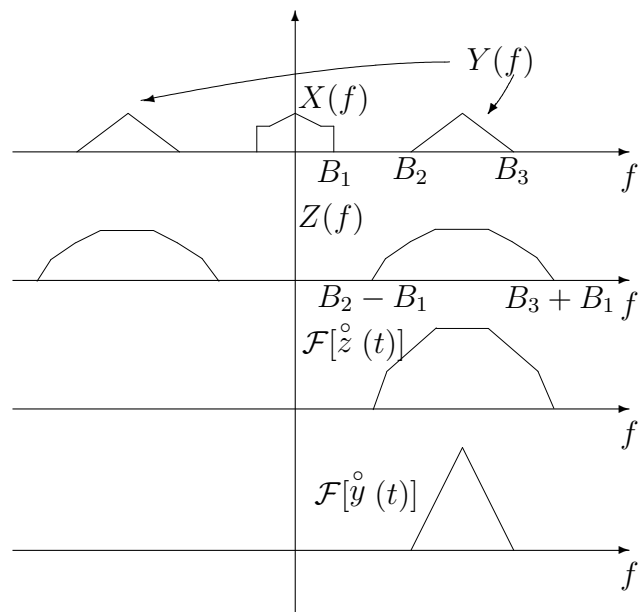


Figura 2.7: La dimostrazione della proprietà 2.2

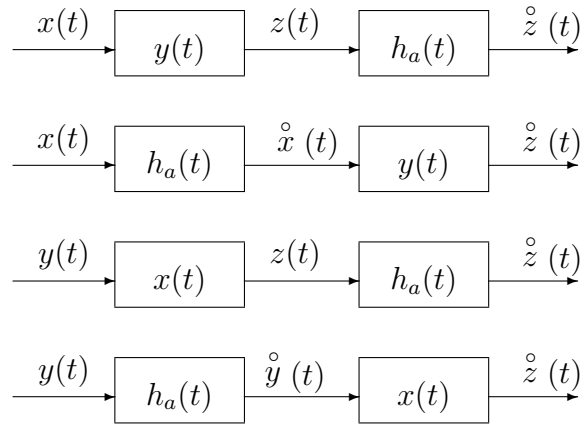


Figura 2.8: La dimostrazione della proprietà 2.3

Prova: La prova delle prime due uguaglianze è immediata osservando le equivalenze mostrate in figura 2.8 dove si è usata la commutatività della operazione di convoluzione e l'invertibilità di $h_a(t)$. Per la terza uguaglianza, poiché $\hat{x}(t)$ non ha spettro alle frequenze negative, si può sostituire $\frac{1}{2} \hat{y}(t)$ ad $y(t)$ nella prima uguaglianza.

Proprietà 2.4 La trasformata di Hilbert di un segnale pari è un segnale dispari, ovvero se $x(-t) = x(t)$, $\hat{x}(-t) = -\hat{x}(t)$. Analogamente la trasformata di un segnale dispari è un segnale pari.

Prova:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_H(\xi)x(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h_H(-\eta)x(t+\eta)d\eta. \quad (2.47)$$

Usando la disparità di $h_H(t)$ e la parità di $x(t)$, abbiamo

$$\hat{x}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} h_H(\eta)x(-t-\eta)d\eta = -\hat{x}(-t). \quad (2.48)$$

Analogamente usando la disparità di $h_H(t)$ e $x(t)$, abbiamo

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_H(\eta)x(-t-\eta)d\eta = \hat{x}(-t). \quad (2.49)$$

Proprietà 2.5 Dati due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$ la mutua correlazione³ tra le rispettive trasformate di Hilbert è

$$r_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = r_{xy}(\tau). \quad (2.50)$$

Nel caso particolare in cui $y(t) = x(t)$ otteniamo l'importante corollario secondo il quale trasformando secondo Hilbert un segnale reale la autocorrelazione non cambia, ovvero

$$r_{\hat{x}}(\tau) = r_x(\tau). \quad (2.51)$$

Il risultato era atteso in quanto il trasformatore di Hilbert è solo un filtro di fase che non altera densità spettrali e autocorrelazioni. Si noti inoltre che una diretta conseguenza della proprietà enunciata è che la trasformazione secondo Hilbert non varia l'energia o la potenza.

Prova della Proprietà 2.5: Dalle relazioni notevoli

$$r_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = (h_H * h_H^*(-) * r_{xy})(\tau). \quad (2.52)$$

Poiché h_H è reale e dispari $h_H^*(-\tau) = -h_H(\tau)$. Ricordando che la trasformata di Hilbert applicata due volte cambia solo il segno, abbiamo

$$r_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = -(h_H * h_H * r_{xy})(\tau) = r_{xy}(\tau). \quad (2.53)$$

Proprietà 2.6 Dati due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$

$$r_{x\hat{y}}(\tau) = -(h_H * r_{xy})(\tau) \quad (2.54)$$

$$r_{\hat{x}y}(\tau) = (h_H * r_{xy})(\tau) \quad (2.55)$$

$$r_{x\hat{y}}(\tau) = -r_{\hat{x}y}(\tau) \quad (2.56)$$

$$(2.57)$$

Prova: Immediata dalle relazioni notevoli e dalla disparità di $h_H(t)$.

³In questa proprietà, così come in quelle successive, il riferimento è ad auto e mutue correlazioni generiche. Ovvero, sfruttando le analogie formali note dalla Teoria dei Segnali, non sarà necessario specificare se si tratti di segnali di energia o di potenza, aleatori o deterministici. Commenti per i casi specifici saranno introdotti quando necessario.

Proprietà 2.7 Dato un segnale reale $x(t)$ e la sua trasformata di Hilbert $\hat{x}(t)$ si ha che

$$r_{\hat{x}x}(\tau) = -r_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{r}_x(\tau), \quad (2.58)$$

dove $\hat{r}_x(\tau)$ è la trasformata di Hilbert della autocorrelazione.

Prova: Immediata dalla proprietà precedente per $y(t) = x(t)$.

Un importante corollario dell'ultima proprietà è che

$$r_{\hat{x}x}(0) = r_{x\hat{x}}(0) = \hat{r}_x(0) = 0, \quad (2.59)$$

ovvero un segnale e la sua trasformata di Hilbert sono ortogonali.

Proprietà 2.8 Dati due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$ la mutua correlazione tra le rispettive versioni analitiche è

$$r_{xy}^{\circ}(\tau) = 2 \hat{r}_{xy}(\tau). \quad (2.60)$$

Prova: Ricordiamo dalle relazioni notevoli che

$$r_{xy}^{\circ}(\tau) = (h_a * h_a^*(-) * r_{xy})(\tau). \quad (2.61)$$

Ma dalla definizione di segnale analitico abbiamo che

$$\begin{aligned} h_a * h_a^*(-)(\tau) &= (\delta(\tau) + jh_H(\tau)) * (\delta(\tau) + jh_H(-\tau))^* \\ &= (\delta(\tau) + jh_H(\tau)) * (\delta(\tau) + jh_H(\tau)) \\ &= \delta(\tau) + jh_H(\tau) + jh_H(\tau) + \delta(\tau) = 2h_a(\tau), \end{aligned} \quad (2.62)$$

quindi il risultato.

Proprietà 2.9 Dati due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$ la mutua correlazione può essere espressa come

$$r_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \text{Re} [r_{xy}^{\circ}(\tau)]. \quad (2.63)$$

Prova: Poiché dalla proprietà 2.8

$$r_{xy}(\tau) + j\hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} r_{xy}^{\circ}(\tau), \quad (2.64)$$

il risultato segue immediatamente.

Quest'ultima proprietà richiama una relazione notevole dell'elettrotecnica in cui la potenza può essere espressa in funzione della parte reale della potenza complessa. In particolare, se $x(t)$ e $y(t)$ sono rispettivamente tensione e corrente (in elettrotecnica segnali sinusoidali, più in generale segnali di potenza) ai capi di un dipolo, $r_{xy}(0)$ è la *potenza reale*. Essa può essere espressa come

$$r_{xy}(0) = \frac{1}{2} \text{Re} [r_{xy}^{\circ}(0)], \quad (2.65)$$

dove $r_{xy}^{\circ}(0)$ è la *potenza complessa*.

Proprietà 2.10 Dato un segnale reale $x(t)$ la autocorrelazione del segnale analitico è

$$r_x^{\circ}(\tau) = 2 \hat{r}_x(\tau) = 2(r_x(\tau) + j\hat{r}_x(\tau)). \quad (2.66)$$

Prova: Immediata dalla proprietà 2.8 per $y(t) = x(t)$.

Proprietà 2.11 Dato un segnale reale $x(t)$, l'energia, o la potenza, del segnale analitico è il doppio della potenza del segnale reale, ovvero

$$r_x^{\circ}(0) = 2(r_x(0) + j\hat{r}_x(0)) = 2r_x(0), \quad (2.67)$$

Prova: Immediata dalla proprietà 2.10 poiché $\hat{r}_x(0) = 0$.

Proprietà 2.12 Sia $x(t)$ un processo aleatorio reale, gaussiano, stazionario e a media nulla. La trasformata di Hilbert $\hat{x}(t)$ è gaussiana stazionaria e a media nulla.

Prova: Il passaggio alla trasformata di Hilbert consiste in una operazione lineare tempo-invariante. Pertanto l'uscita del sistema è un processo stazionario, a media nulla e gaussiano.

Proprietà 2.13 Sia $x(t)$ un processo aleatorio reale, gaussiano, stazionario e a media nulla. L'involuppo istantaneo $I_x(t)$ è stazionario e ha una pdf di tipo Rayleigh

$$f_I(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} u(r). \quad (2.68)$$

La fase istantanea $\phi_x(t)$ è anch'essa stazionaria ed è uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi]$.

Prova: La gaussianità del segnale e della sua trasformata di Hilbert conferiscono al segnale analitico nel piano complesso la caratteristica di una gaussiana bi-dimensionale centrata nell'origine. Poichè anche la trasformata di Hilbert ha la stessa varianza del segnale σ^2 ed è ortogonale a $x(t)$, la distribuzione è sferica. Dalla teoria della probabilità, la fase di una variabile bi-dimensionale a componenti gaussiane ha una pdf di tipo uniforme in $[-\pi, \pi]$ e ha un modulo distribuito secondo una Rayleigh. Ricordiamo al lettore che la media e la media quadratica della Rayleigh sono

$$E[I_x] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma; \quad E[I_x^2] = 2\sigma^2. \quad (2.69)$$

Anche la cdf della Rayleigh si calcola facilmente per integrazione diretta

$$F_{I_x}(r) = Pr\{I_x \leq r\} = \left(\int_0^r \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \right) u(r) = \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right) u(r). \quad (2.70)$$

Esempio 2.6 Si consideri un segnale aleatorio $s(t)$ con spettro di potenza passabasso ideale fino alla frequenza B . La potenza del segnale sia P_s . Valutare la autocorrelazione della sua versione analitica.

Soluzione: La potenza P_s e il fatto che si tratti di uno spettro piatto ci consente di scrivere esplicitamente lo spettro di potenza come

$$P_s(f) = \frac{P_s}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right). \quad (2.71)$$

La autocorrelazione è immediatamente

$$R_s(\tau) = P_s \operatorname{sinc} 2B\tau. \quad (2.72)$$

Ricordiamo che $R_s(\tau) = 2\hat{R}_s(\tau) = 2R_s(\tau) + j2\hat{R}_s(\tau)$, quindi valutiamo la trasformata di Hilbert della autocorrelazione

$$\begin{aligned} \hat{R}_s(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\operatorname{sgn}(f)}{j} \frac{P_s}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \right] \\ &= \frac{P_s}{2jB} \mathcal{F}^{-1} \left[\Pi\left(\frac{f - \frac{B}{2}}{B}\right) - \Pi\left(\frac{f + \frac{B}{2}}{B}\right) \right] \\ &= \frac{P_s \operatorname{sinc} Bf}{2j} \left(e^{j\pi B\tau} - e^{-j\pi B\tau} \right) \\ &= P_s \operatorname{sinc} Bf \sin \pi B\tau. \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$(2.74)$$

Quindi

$$R_s(\tau) = 2P_s \operatorname{sinc} 2B\tau + j2P_s \operatorname{sinc} Bf \sin \pi B\tau. \quad (2.75)$$

Esempio 2.7 Si consideri un rumore passa-banda ideale $n(t)$ con spettro di potenza pari a

$$P_n(f) = \frac{\eta_0}{2} \left[\Pi \left(\frac{f - f_0}{2B} \right) + \Pi \left(\frac{f + f_0}{2B} \right) \right]. \quad (2.76)$$

Valutare la mutua correlazione tra $n(t)$ e la sua trasformata di Hilbert $\hat{n}(t)$.

Soluzione: Ricordiamo che $r_{n\hat{n}}(\tau) = -\hat{r}_n(\tau)$, quindi basta valutare la trasformata di Hilbert della autocorrelazione.

$$\begin{aligned} \hat{r}_n(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\text{sgn}(f)}{j} \frac{\eta_0}{2} \left[\Pi \left(\frac{f - f_0}{2B} \right) + \Pi \left(\frac{f + f_0}{2B} \right) \right] \right] \\ &= \frac{\eta_0}{2j} \mathcal{F}^{-1} \left[\Pi \left(\frac{f - f_0}{2B} \right) - \Pi \left(\frac{f + f_0}{2B} \right) \right] \\ &= \frac{\eta_0}{2j} 2B \text{sinc } 2B\tau \left(e^{j2\pi f_0\tau} - e^{-j2\pi f_0\tau} \right) \\ &= 2B\eta_0 \text{sinc } 2B\tau \sin 2\pi f_0\tau. \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.7 I segnali passa-banda

Un segnale passa-banda ha una trasformata di Fourier limitata all'insieme delle frequenze $[-B_2 - B_1] \cup [B_1 B_2]$ con $0 < B_1 < B_2 < \infty$. Se il segnale è reale, la caratteristica hermitiana dello spettro consente di concentrarsi solo sullo spettro nell'intervallo $[B_1 B_2]$. Nelle manipolazioni necessarie allo studio dei sistemi di comunicazione è spesso utile riportare il segnale in banda base, ovvero considerare una versione del segnale traslata a bassa frequenza attorno a $f = 0$. Tale operazione, schematizzata in figura 2.9, consiste nella rimozione della parte a frequenze negative dello spettro (passaggio al segnale analitico) e in una traslazione verso le basse frequenze di f_0 .

Definizione: L'*inviluppo complesso* di un segnale reale $x(t)$ è

$$\tilde{x}(t) = \overset{\circ}{x}(t) e^{-j2\pi f_0 t}. \quad (2.78)$$

La definizione dell'inviluppo complesso, detto anche *equivalente in banda-base*, o *equivalente in bassa frequenza*, è un altro segnale complesso ottenuto da $\overset{\circ}{x}(t)$ che dipende dal valore della frequenza f_0 . Il valore di f_0 è tipicamente scelto come la frequenza di centro banda di $X(f)$.

L'introduzione dell'inviluppo complesso è molto importante nella teoria dei segnali per telecomunicazioni poiché consente la manipolazione dei segnali passa-banda indipendentemente da f_0 . Lo stesso segnale analitico è

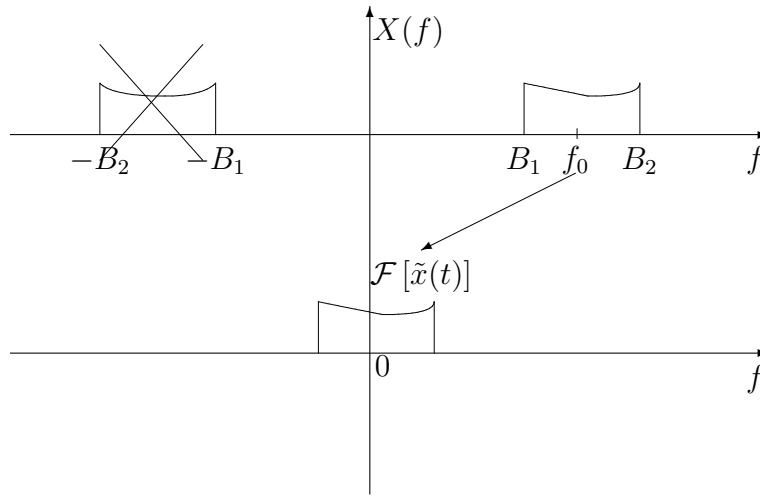


Figura 2.9: Lo schema di principio del passaggio all'involucro complesso.

stato introdotto nella letteratura prevalentemente per consentire la formalizzazione complessa dei segnali passa-banda. Infatti il segnale analitico è a volte denominato *pre-involucro*.

Va notato che la definizione di involucro complesso può anche essere basata su un valore di f_0 non centrato, magari ai limiti o all'esterno della banda del segnale. In questi ultimi casi il segnale $\tilde{x}(t)$ non viene traslato esattamente attorno a $f = 0$. La scelta di f_0 è comunque determinata dall'applicazione e dal tipo di segnale da manipolare.

Una scelta tipica della frequenza f_0 è il baricentro dello spettro

$$f_0 = \frac{\int_0^\infty f \mathcal{S}_x^\alpha(f) df}{\int_0^\infty \mathcal{S}_x^\alpha(f) df}, \quad (2.79)$$

dove $\mathcal{S}_x^\alpha(f)$ è lo spettro di energia o di potenza per $\alpha = 1$, o lo spettro di energia o di potenza RMS per $\alpha = 1/2$.

Il segnale analitico può quindi essere espresso come

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}, \quad (2.80)$$

ovvero come l'equivalente in banda base "che modula" il fasore a frequenza f_0 . Il segnale $\tilde{x}(t)$ è complesso e si può scrivere come

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) - jx_s(t), \quad (2.81)$$

dove le sue parti reale e immaginaria sono denominate rispettivamente

$x_c(t) = \text{Re} [\tilde{x}(t)]$ *componente coseno*, o *componente in fase*;

$x_s(t) = -\text{Im} [\tilde{x}(t)]$ *componente seno*, o *componente in quadratura*;⁴

La terminologia dipende dal fatto che il segnale (reale)

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} [\overset{\circ}{\tilde{x}}(t)] = \text{Re} [\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= \text{Re} [(x_c(t) - jx_s(t)) (\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)], \end{aligned} \quad (2.82)$$

si scrive come

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t + x_s(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (2.83)$$

L'equazione (2.83), detta anche *rappresentazione di Rice*, o *rappresentazione passa-banda* di $x(t)$, è molto utile nella manipolazione dei segnali della modulazione poiché consente di esprimere il segnale passa-banda come la sovrapposizione di due segnali modulati su due portanti alla stessa frequenza ma in quadratura di fase. Le altre relazioni tra $x_c(t)$, $x_s(t)$, $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ sono semplici da ricavare e sono

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \text{Re} [\tilde{x}(t)] = \text{Re} [\overset{\circ}{\tilde{x}}(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \\ &= \text{Re} [(x(t) + j\hat{x}(t)) (\cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t)] \\ &= x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t; \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} x_s(t) &= -\text{Im} [\tilde{x}(t)] = -\text{Im} [\overset{\circ}{\tilde{x}}(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \\ &= -\text{Im} [(x(t) + j\hat{x}(t)) (\cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t)] \\ &= x(t) \sin 2\pi f_0 t - \hat{x}(t) \cos 2\pi f_0 t; \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \text{Im} [\overset{\circ}{\tilde{x}}(t)] = \text{Im} [\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= \text{Im} [(x_c(t) - jx_s(t)) (\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)] \\ &= x_c(t) \sin 2\pi f_0 t - x_s(t) \cos 2\pi f_0 t. \end{aligned} \quad (2.86)$$

⁴Il segno meno nella parte immaginaria della definizione è arbitrario e viene introdotto per semplificare alcune delle espressioni che seguono. Nella letteratura si trovano anche definizioni con il segno più. La scelta è del tutto irrilevante per la sostanza della teoria anche se è necessario essere coerenti per le relazioni notevoli che seguono.

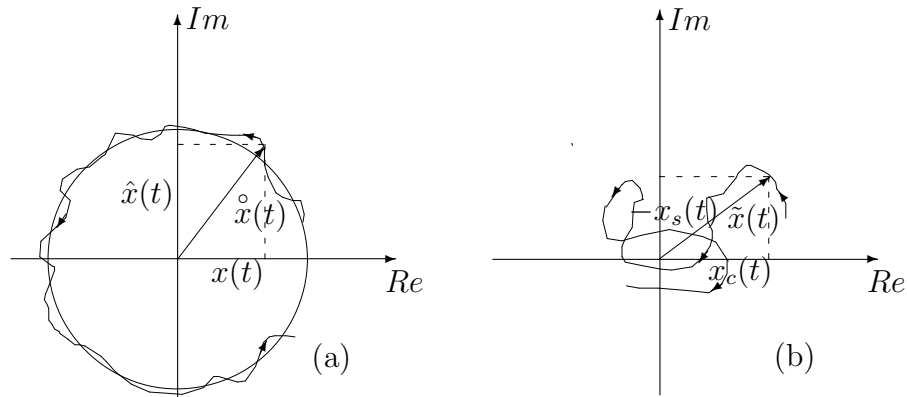


Figura 2.10: (a) Il segnale passa-banda nel piano del segnale analitico; (b) il segnale passa-banda nel piano dell'involuppo complesso

L'involuppo complesso, così come il segnale analitico, può essere descritto nel piano complesso come un vettore la cui punta genera una traiettoria nel tempo. Si tratta della stessa traiettoria del segnale analitico, alla quale però è stato sottratto un moto circolare uniforme attorno all'origine di frequenza angolare $2\pi f_0$ rad/sec. La figura 2.10 mostra un ipotetico segnale passa-banda nel piano del segnale analitico (a) e nel piano dell'involuppo complesso (b). Il segnale analitico si sviluppa attorno alla circonferenza del fasore mentre l'involuppo complesso si muove in tutto il piano. Si noti che la scala temporale delle traiettorie nelle due figure è molto diversa. Infatti la fase istantanea dell'involuppo complesso è

$$\theta(t) = -tg^{-1} \frac{x_s(t)}{x_c(t)} = \phi(t) - 2\pi f_0 t, \quad (2.87)$$

la pulsazione angolare

$$\xi(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \omega(t) - 2\pi f_0, \quad (2.88)$$

e la frequenza istantanea

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t) = f(t) - f_0. \quad (2.89)$$

Anche qui è possibile esprimere la frequenza istantanea dell'involuppo complesso direttamente in funzione di $x_c(t)$ e $x_s(t)$ usando la nota derivata dell'arcotangente.

Si noti inoltre che segnale analitico e inviluppo complesso hanno lo stesso inviluppo istantaneo

$$I(t) = |\dot{\tilde{x}}(t)| = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}. \quad (2.90)$$

Pertanto ogni segnale reale può essere espresso anche come

$$x(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta(t)), \quad (2.91)$$

ovvero come una sinusoidale a frequenza f_0 modulata in inviluppo e in fase.

2.8 Proprietà

Proprietà 2.14 La trasformata di Fourier $X(f)$ di un segnale reale $x(t)$ può essere espressa come

$$X(f) = \frac{1}{2} (X_c(f - f_0) + X_c(f + f_0)) + \frac{1}{2j} (X_s(f - f_0) - X_s(f + f_0)), \quad (2.92)$$

dove $X_c(f)$ e $X_s(f)$ sono le trasformate di $x_c(t)$ e $x_s(t)$ rispettivamente.

Prova: Immediata trasformando equazione (2.83).

Proprietà 2.15

$$X_c(f) = X^-(f - f_0) + X^+(f + f_0), \quad (2.93)$$

dove $X^-(\xi) = X(\xi)u(-\xi)$ è la parte sinistra della funzione e $X^+(\xi) = X(\xi)u(\xi)$ è quella destra.

La proprietà è mostrata in figura 2.11 dove si vede come lo spettro di $x_c(t)$ viene ottenuto dal segnale passa-banda. Un importante corollario di questa proprietà è che se lo spettro del segnale passa-banda è simmetrico attorno alla frequenza f_0 , ovvero $X(f_0 + \Delta) = X(f_0 - \Delta)$, $0 < \Delta < f_0$, si ha che

$$X_c(f) = 2X^+(f + f_0) = 2X^-(f - f_0). \quad (2.94)$$

Prova: Dalla relazione (2.84) si ha che

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X(f) * \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\ &\quad + \frac{\text{sgn}(f)X(f)}{j} * \frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \\ &= \frac{1}{2} (X(f - f_0) + X(f + f_0)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\text{sgn}(f - f_0)X(f - f_0) - \text{sgn}(f + f_0)X(f + f_0)) \\ &= X^-(f - f_0) + X^+(f + f_0), \end{aligned} \quad (2.95)$$

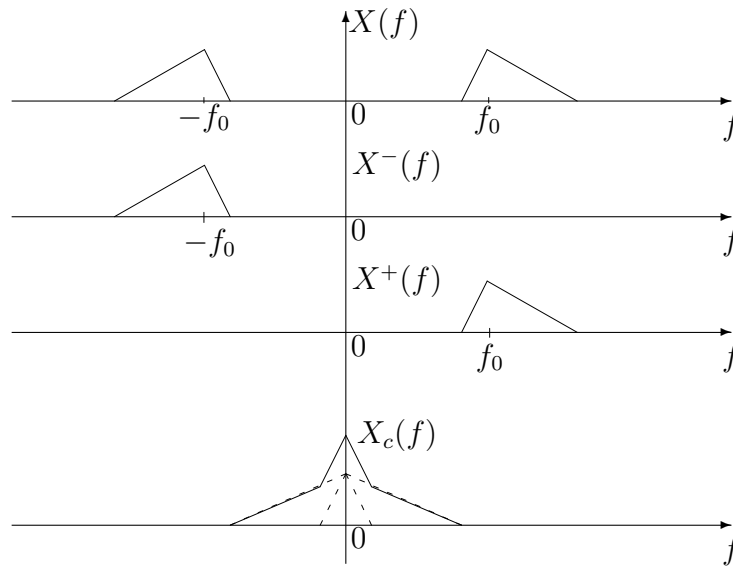


Figura 2.11: Lo spettro della componente coseno ottenuto dallo spettro passa-banda

poiché $\frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(\xi)) = u(-\xi)$ e $\frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(\xi)) = u(\xi)$.

Proprietà 2.16

$$X_s(f) = \frac{1}{j} \left(X^-(f - f_0) - X^+(f + f_0) \right). \quad (2.96)$$

La proprietà è mostrata in figura 2.12 dove si vede come lo spettro di $x_s(t)$ viene ottenuto dal segnale passa-banda. Un importante corollario di questa proprietà è che se lo spettro del segnale passa-banda è simmetrico attorno alla frequenza f_0 , ovvero $X(f_0 + \Delta) = X(f_0 - \Delta)$, $0 < \Delta < f_0$, si ha che la componente seno è nulla, ovvero

$$X_s(f) = 0. \quad (2.97)$$

Prova: Dall'equazione (2.85) si ha che

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f) * \frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \\ &\quad - \frac{\text{sgn}(f)X(f)}{j} * \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \end{aligned}$$

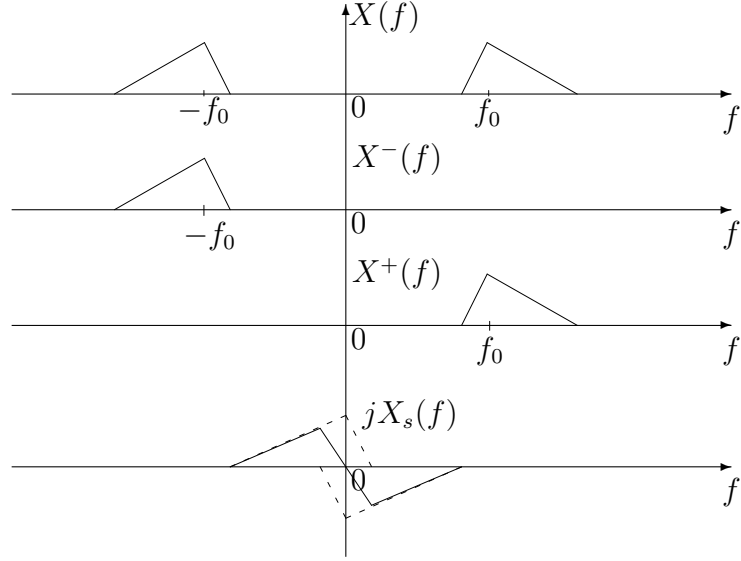


Figura 2.12: Lo spettro della componente seno ottenuto dallo spettro passa-banda

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2j} (X(f - f_0) - X(f + f_0)) \\
 &\quad - \frac{1}{2j} (\operatorname{sgn}(f - f_0)X(f - f_0) + \operatorname{sgn}(f + f_0)X(f + f_0)) \\
 &= \frac{1}{j} (X^-(f - f_0) - X^+(f + f_0)), \tag{2.98}
 \end{aligned}$$

poiché $\frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn}(\xi)) = u(-\xi)$ e $\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(\xi)) = u(\xi)$.

Esempio 2.8 Riprendiamo l'esempio del segnale $x(t) = s(t) \cos 2\pi f_0 t$. Poiché il segnale analitico è $\tilde{x}(t) = s(t)e^{j2\pi f_0 t}$ abbiamo che l'involuppo complesso è immediatamente

$$\tilde{x}(t) = s(t). \tag{2.99}$$

Le componenti coseno e seno sono rispettivamente $x_c(t) = s(t)$ e $x_s(t) = 0$.

Esempio 2.9 Nell'esempio $x(t) = s_1(t) \cos 2\pi f_0 t + s_2(t) \sin 2\pi f_0 t$, abbiamo dimostrato che il segnale analitico è $\tilde{x}(t) = (s_1(t) - js_2(t))e^{j2\pi f_0 t}$, quindi l'involuppo complesso è

$$\tilde{x}(t) = s_1(t) - js_2(t). \tag{2.100}$$

Le componenti coseno e seno sono rispettivamente $x_c(t) = s_1(t)$ e $x_s(t) = s_2(t)$.

Esempio 2.10 Nell'esempio con $x(t) = A$ abbiamo visto come il segnale analitico sia proprio $\overset{\circ}{x}(t) = A$. L'inviluppo complesso è quindi

$$\tilde{x}(t) = Ae^{-j2\pi f_0 t} = A \cos 2\pi f_0 t - jA \sin 2\pi f_0 t. \quad (2.101)$$

Le componenti coseno e seno sono rispettivamente $x_c(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ e $x_s(t) = A \sin 2\pi f_0 t$. Si tratta di un segnale non tipico nella trattazione fornita in quanto non è un segnale passa-banda. Comunque l'esempio è utile per mostrare al lettore che la tecnica dell'inviluppo complesso può essere applicata anche a segnali generici (salvo ovviamente verificarne la reale utilità).

Esempio 2.11 Si consideri il segnale

$$x(t) = A(k + s(t)) \cos 2\pi f_0 t, \quad (2.102)$$

dove $s(t)$ è un segnale passa-basso con frequenza massima pari a $B < f_0$. Il segnale analitico corrispondente è

$$\overset{\circ}{x}(t) = A(k + s(t))e^{j2\pi f_0 t}. \quad (2.103)$$

L'inviluppo complesso è

$$\tilde{x}(t) = A(k + s(t)). \quad (2.104)$$

Le componenti coseno e seno sono rispettivamente $x_c(t) = A(k + s(t))$ e $x_s(t) = 0$.

2.9 Sistemi lineari passa-banda

Un sistema passa-banda ha una risposta armonica che è diversa da zero su un intervallo di frequenze $[-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2]$. Se la risposta impulsiva del sistema è reale, la risposta armonica è hermitiana e tutte le considerazioni applicate ai segnali passa-banda reali possono essere applicate al sistema lineare con riferimento alla sua risposta impulsiva. In particolare

$$\tilde{h}(t) = \overset{\circ}{h}(t)e^{-j2\pi f_0 t}, \quad (2.105)$$

è l'inviluppo complesso della risposta impulsiva. La frequenza f_0 è tipicamente la frequenza di centro banda e $\tilde{h}(t)$ rappresenta il *comportamento equivalente del sistema in banda base*. Un sistema può essere studiato "a bassa frequenza" grazie alla seguente proprietà.

Proprietà 2.17 Dati due segnali reali $x(t)$ e $h(t)$, e i loro inviluppi complessi $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{h}(t)$, l'inviluppo complesso $\tilde{y}(t)$ della convoluzione $y = (h * x)(t)$ è

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} (\tilde{h} * \tilde{x})(t), \quad (2.106)$$

Prova: Abbiamo già dimostrato nella proprietà 2.3 che

$$\mathring{y}(t) = \frac{1}{2} \left(\mathring{h} * \mathring{x} \right) (t). \quad (2.107)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \mathring{y}(t)e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{h}(\tau) \mathring{x}(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) e^{j2\pi f_0 \tau} \tilde{x}(t-\tau) e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) \tilde{x}(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Esempio 2.12 Si consideri un sistema passa-banda con risposta armonica

$$H(f) = \Lambda \left(\frac{f - f_0}{B} \right) + \Lambda \left(\frac{f + f_0}{B} \right) \quad f_0 \gg B. \quad (2.109)$$

La risposta impulsiva del sistema è

$$h(t) = 2B (\text{sinc}^2 Bt) \cos 2\pi f_0 t. \quad (2.110)$$

Il segnale analitico è

$$\mathring{h}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[2\Lambda \left(\frac{f - f_0}{B} \right) \right] = 2B (\text{sinc}^2 Bt) e^{j2\pi f_0 t}, \quad (2.111)$$

e l'involuppo complesso

$$\tilde{h}(t) = 2B \text{sinc}^2 Bt. \quad (2.112)$$

Se il segnale all'ingresso del sistema è un segnale passa-banda

$$x(t) = \text{Re} \left[\tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right], \quad (2.113)$$

lo studio del sistema può essere effettuato a bassa frequenza usando $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{h}(t)$.

2.10 Segnali aleatori passa-banda

Le proprietà dell'involuppo complesso sono state finora presentate con riferimento ad un segnale deterministico generico e alla sua trasformata di Fourier. Nelle applicazioni delle telecomunicazioni, e più in particolare nello studio dei sistemi di modulazione, è necessario approfondire la caratterizzazione

del segnale passa-banda in termini di autocorrelazioni e densità spettrali. Per i risultati su auto e mutua correlazione della trasformata di Hilbert e del segnale analitico presentati all'inizio del capitolo, è stato possibile discutere le proprietà in generale senza specifico riferimento al tipo di segnale in gioco. Le proprietà infatti valgono sia se si tratti di segnali di energia o di potenza, e di segnale deterministici o aleatori. Purtroppo nel caso dei segnali passa-banda sorge qualche insidia in più dal punto di vista strettamente formale a causa della possibile non stazionarietà che si presenta in alcuni segnali tipici della modulazione analogica. Ci limiteremo pertanto a discutere il solo caso di segnali aleatori di potenza in quanto direttamente applicabile allo studio delle prestazioni della modulazione su canali rumorosi. Formulazioni analoghe sono possibili per segnali deterministici, ma richiederebbero l'introduzione di ulteriori strumenti analitici che andrebbero decisamente al di là degli scopi di queste note. Discuteremo quindi prima il caso di segnali aleatori passa-banda stazionari, per poi estendere i risultati allo studio dei segnali ciclostazionari della modulazione analogica.

2.10.1 Segnali passa-banda stazionari

Proprietà 2.18 Dato un segnale aleatorio reale $x(t)$ stazionario in senso lato (SSL), l'inviluppo complesso è SSL e ha autocorrelazione

$$R_{\tilde{x}}(\tau) = R_x(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}. \quad (2.114)$$

La proprietà asserisce che la autocorrelazione dell'inviluppo complesso può essere ottenuta traslando in banda base la autocorrelazione del segnale analitico.

Prova: Dalla definizione di autocorrelazione abbiamo immediatamente che

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}}(t, \tau) &= E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(t-\tau)] \\ &= E\left[\overset{\circ}{x}(t)e^{-j2\pi f_0 t} \overset{\circ}{x}^*(t-\tau)e^{j2\pi f_0(t-\tau)}\right] \\ &= R_x(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Si noti che dalla proprietà 2.10

$$R_{\overset{\circ}{x}}(\tau) = 2\left(R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)\right), \quad (2.116)$$

e la autocorrelazione dell'involuppo complesso può anche essere scritta come

$$\begin{aligned}
 R_{\tilde{x}}(\tau) &= 2 \left(R_x(\tau) + j \hat{R}_x(\tau) \right) e^{-j2\pi f_0 \tau} \\
 &= 2 \left(R_x(\tau) + j \hat{R}_x(\tau) \right) (\cos 2\pi f_0 \tau - j \sin 2\pi f_0 \tau) \\
 &= 2 \left(R_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau \right) \\
 &\quad + j2 \left(\hat{R}_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau - R_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau \right). \quad (2.117)
 \end{aligned}$$

Utilizzando l'espressione con la componente coseno e la componente seno dell'involuppo complesso possiamo ricavare un'altra utile espressione

$$\begin{aligned}
 R_{\tilde{x}}(\tau) &= E [\tilde{x}(t) \tilde{x}^*(t - \tau)] \\
 &= E [(x_c(t) - jx_s(t)) (x_c(t - \tau) + jx_s(t - \tau))] \\
 &= R_{x_c}(\tau) + R_{x_s}(\tau) + j (R_{x_c x_s}(\tau) - R_{x_s x_c}(\tau)). \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

Proprietà 2.19 Dato un segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL, la componente coseno è SSL e ha autocorrelazione

$$R_{x_c}(\tau) = R_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau. \quad (2.119)$$

Prova: Dall'equazione (2.84) e dalla definizione di autocorrelazione si ha

$$\begin{aligned}
 R_{x_c}(t, \tau) &= E [(x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t) \\
 &\quad (x(t - \tau) \cos 2\pi f_0 (t - \tau) + \hat{x}(t - \tau) \sin 2\pi f_0 (t - \tau))] \\
 &= \frac{R_x(\tau)}{2} (\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
 &\quad + \frac{R_{\hat{x}}(\tau)}{2} (-\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
 &\quad + \frac{R_{x\hat{x}}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) - \sin 2\pi f_0 \tau) \\
 &\quad + \frac{R_{\hat{x}x}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) + \sin 2\pi f_0 \tau). \quad (2.120)
 \end{aligned}$$

Poiché $R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$ e $R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$, abbiamo il risultato.

Proprietà 2.20 Dato un segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL, la autocorrelazione della componente seno coincide con quella della componente coseno

$$R_{x_s}(\tau) = R_{x_c}(\tau). \quad (2.121)$$

Prova: Dall'equazione (2.85) e dalla definizione di autocorrelazione si ha

$$\begin{aligned}
R_{x_s}(t, \tau) &= E [(x(t) \sin 2\pi f_0 t - \hat{x}(t) \cos 2\pi f_0 t) \\
&\quad (x(t - \tau) \sin 2\pi f_0 (t - \tau) - \hat{x}(t - \tau) \cos 2\pi f_0 (t - \tau))] \\
&= \frac{R_x(\tau)}{2} (-\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
&\quad + \frac{R_{\hat{x}}(\tau)}{2} (\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
&\quad - \frac{R_{x\hat{x}}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) + \sin 2\pi f_0 \tau) \\
&\quad - \frac{R_{\hat{x}x}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) - \sin 2\pi f_0 \tau). \tag{2.122}
\end{aligned}$$

Poiché $R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$ e $R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$, abbiamo il risultato.

Proprietà 2.21 Dato un segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL, le componenti seno e coseno sono congiuntamente SSL e hanno mutua correlazione

$$R_{x_c x_s}(\tau) = -R_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau. \tag{2.123}$$

Prova: Dalle equazioni (2.84), (2.85) e dalla definizione di mutua correlazione si ha

$$\begin{aligned}
R_{x_c x_s}(t, \tau) &= E [(x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t) \\
&\quad (x(t - \tau) \sin 2\pi f_0 (t - \tau) - \hat{x}(t - \tau) \cos 2\pi f_0 (t - \tau))] \\
&= \frac{R_x(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) - \sin 2\pi f_0 \tau) \\
&\quad - \frac{R_{\hat{x}}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) + \sin 2\pi f_0 \tau) \\
&\quad - \frac{R_{x\hat{x}}(\tau)}{2} (\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
&\quad + \frac{R_{\hat{x}x}(\tau)}{2} (-\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau). \tag{2.124}
\end{aligned}$$

Poiché $R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$ e $R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$, abbiamo il risultato.

Proprietà 2.22 Dato un segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL, la mutua correlazione tra x_c e x_s è una funzione dispari

$$R_{x_c x_s}(-\tau) = -R_{x_c x_s}(\tau) \tag{2.125}$$

Prova: Dalla proprietà 2.21, poiché $R_x(\tau)$ è pari e $\hat{R}_x(\tau)$ è dispari, abbiamo il risultato.

Proprietà 2.23 Dato un segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL, le componenti $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono ortogonali ovvero

$$R_{x_c x_s}(0) = 0. \quad (2.126)$$

Prova: Banale corollario della proprietà 2.22.

Proprietà 2.24 sia $x(t)$ un segnale aleatorio reale SSL, avente densità spettrale di potenza $P_x(f)$. Siano $P_{x_c}(f)$ e $P_{x_s}(f)$ le densità spettrali di $x_c(t)$ e $x_s(t)$, e $P_{x_c x_s}(f)$ la densità spettrale mutua. Valgono le seguenti relazioni

$$P_{x_c}(f) = P_x^-(f - f_0) + P_x^+(f + f_0) \quad (2.127)$$

$$P_{x_s}(f) = P_{x_c}(f) \quad (2.128)$$

$$P_{x_c x_s}(f) = \frac{1}{j} \left[-P_x^-(f - f_0) + P_x^+(f + f_0) \right]. \quad (2.129)$$

Prova: Dalla proprietà 2.19

$$\begin{aligned} P_{x_c}(f) &= \mathcal{F}[R_{x_c}(\tau)] \\ &= \mathcal{F}\left[R_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau\right] \\ &= \frac{1}{2} (P_x(f - f_0) + P_x(f + f_0)) \\ &\quad + \frac{1}{2j} \left(\frac{\text{sgn}(f - f_0) P_x(f - f_0)}{j} - \frac{\text{sgn}(f + f_0) P_x(f + f_0)}{j} \right) \\ &= \frac{1}{2} P_x(f - f_0) (1 - \text{sgn}(f - f_0)) + \frac{1}{2} P_x(f + f_0) (1 + \text{sgn}(f + f_0)) \\ &= P_x(f - f_0) u[-(f - f_0)] + P_x(f + f_0) u[f + f_0] \\ &= P_x^-(f - f_0) + P_x^+(f + f_0). \end{aligned} \quad (2.130)$$

Dalla proprietà 2.20 si ha immediatamente $P_{x_s}(f) = P_{x_c}(f)$. Dalla proprietà 2.21

$$\begin{aligned} P_{x_c x_s}(f) &= \mathcal{F}[R_{x_c x_s}(\tau)] \\ &= \mathcal{F}\left[-R_x(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau + \hat{R}_x(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau\right] \\ &= -\frac{1}{2j} (P_x(f - f_0) - P_x(f + f_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sgn}(f - f_0) P_x(f - f_0)}{j} + \frac{\operatorname{sgn}(f + f_0) P_x(f + f_0)}{j} \right) \\
& = \frac{1}{2j} P_x(f - f_0) (-1 + \operatorname{sgn}(f - f_0)) + \frac{1}{2j} P_x(f + f_0) (1 + \operatorname{sgn}(f + f_0)) \\
& = -\frac{1}{j} P_x(f - f_0) u[-(f - f_0)] + \frac{1}{j} P_x(f + f_0) u[f + f_0] \\
& = -\frac{1}{j} P_x^-(f - f_0) + \frac{1}{j} P_x^+(f + f_0). \tag{2.131}
\end{aligned}$$

Proprietà 2.25 Se un segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL passa-banda ha uno spettro di potenza simmetrico attorno alla frequenza f_0 , le componenti seno e coseno sono incoerenti, ovvero

$$R_{x_c x_s}(\tau) = 0 \quad \forall \tau. \tag{2.132}$$

Prova: La condizione di simmetria attorno alla frequenza f_0 può essere scritta come

$$P_x^+(f + f_0) - P_x^-(f - f_0) = 0. \tag{2.133}$$

Pertanto, dalla proprietà 2.24 si ha che $P_{x_c x_s}(f) = 0 \quad \forall f$ e quindi $R_{x_c x_s}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$.

Proprietà 2.26 La autocorrelazione del segnale aleatorio reale $x(t)$ SSL può essere espressa in funzione delle auto e mutue correlazioni di $x_c(t)$ e $x_s(t)$ come

$$R_x(\tau) = R_{x_c}(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau - R_{x_c x_s}(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau. \tag{2.134}$$

Prova: Dall'equazione (2.83) e dalla definizione di autocorrelazione si ha

$$\begin{aligned}
R_x(t, \tau) & = E[(x_c(t) \cos 2\pi f_0 t + x_s(t) \sin 2\pi f_0 t) \\
& \quad (x_c(t - \tau) \cos 2\pi f_0 (t - \tau) + x_s(t - \tau) \sin 2\pi f_0 (t - \tau))] \\
& = \frac{R_{x_c}(\tau)}{2} (\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
& \quad + \frac{R_{x_s}(\tau)}{2} (-\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \\
& \quad + \frac{R_{x_c x_s}(\tau)}{2} (+\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) - \sin 2\pi f_0 \tau) \\
& \quad + \frac{R_{x_s x_c}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0 (2t - \tau) + \sin 2\pi f_0 \tau). \tag{2.135}
\end{aligned}$$

Poiché $R_{x_c x_s}(\tau) = R_{x_s x_c}(-\tau)$ e $R_{x_c x_s}(-\tau) = -R_{x_c x_s}(\tau)$, abbiamo il risultato, che si noti è indipendente da t .

Esempio 2.13 Si consideri un segnale $s(t)$ contaminato da un rumore additivo $n(t)$. Siano gli spettri di potenza di segnale e rumore rispettivamente $P_s(f)$ e $P_n(f)$ mostrati in figura 2.13. Se i segnali sono incoerenti la autocorrelazione del segnale risultante $y(t) = s(t) + n(t)$ è $R_y(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau)$. Vogliamo ottenere lo spettro delle componenti seno e coseno dell'equivalente in banda base di $s(t)$, $n(t)$ e $y(t)$. Dalle proprietà, gli spettri delle componenti coseno e seno per i vari segnali si ottengono come

$$P_{s_c}(f) = P_s^-(f - f_0) + P_s^+(f + f_0) = P_{s_s}(f); \quad (2.136)$$

$$P_{n_c}(f) = P_n^-(f - f_0) + P_n^+(f + f_0) = P_{n_s}(f); \quad (2.137)$$

$$P_{y_c}(f) = P_y^-(f - f_0) + P_y^+(f + f_0) = P_{y_s}(f). \quad (2.138)$$

Analogamente gli spettri mutui

$$P_{s_c s_s}(f) = \frac{1}{j} (-P_s^-(f - f_0) + P_s^+(f + f_0)); \quad (2.139)$$

$$P_{n_c n_s}(f) = \frac{1}{j} (-P_n^-(f - f_0) + P_n^+(f + f_0)); \quad (2.140)$$

$$P_{y_c y_s}(f) = \frac{1}{j} (-P_y^-(f - f_0) + P_y^+(f + f_0)). \quad (2.141)$$

Essi sono mostrati in figura 2.13. Si noti come la simmetria dello spettro del rumore porti alla incoerenza delle componenti in banda base $P_{n_c n_s}(f) = 0$. Viceversa nel caso del segnale, e del segnale risultante, le due componenti sono ortogonali ma non incoerenti.

Proprietà 2.27 Dato un processo aleatorio $x(t)$ passa-banda, gaussiano, stazionario, a media nulla, le componenti $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono anch'esse gaussiane, mutuamente indipendenti e a media nulla.

Prova: Il passaggio alle componenti in banda base è una operazione lineare (anche se tempo-variante), pertanto la media nulla e la gaussianità sono preservate. Nell'ipotesi di stazionarietà di $x(t)$ abbiamo visto come le due componenti $x_c(t)$ e $x_s(t)$ siano stazionarie in senso lato (le autocorrelazioni non dipendono da t) e incoerenti poiché la mutua correlazione è nulla per ogni τ . La gaussianità le rende anche indipendenti.

Quest'ultima proprietà rivela che nel piano complesso $\tilde{x}(t)$ segue una distribuzione gaussiana bi-dimensionale a componenti indipendenti (sferica) attorno all'origine. L'involuppo istantaneo è ancora distribuito secondo una Rayleigh e la fase è uniforme.

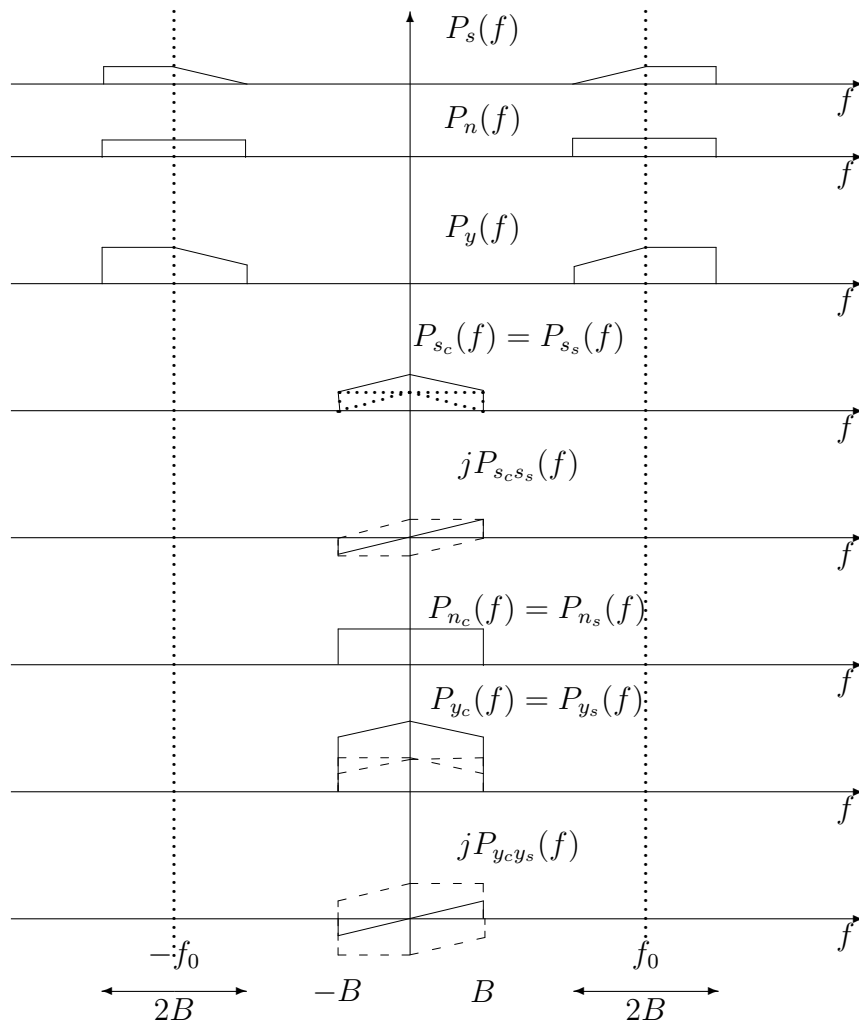


Figura 2.13: Gli spettri di potenza dell'esempio 2.13

2.10.2 Il segnale della modulazione lineare

Nella modulazione su portante sinusoidale, e più in particolare negli schemi di modulazione lineare, il segnale modulato tipico è scritto come

$$x(t) = A(t) \cos 2\pi f_0 t + B(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (2.142)$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ rappresentano dei segnali passa-basso che modulano in fase e in quadratura la portante a frequenza f_0 . Può trattarsi di segnali diversi (come nella modulazione DSB, AM e QAM) o di versioni filtrate dello stesso segnale (come nella modulazione SSB e VSB). Si ricordi che tutte le proprietà su $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono state ricavate nell'ipotesi di stazionarietà di $x(t)$. In questo caso invece al segnale viene "imposta" la formulazione passa-banda con $x_c(t) = A(t)$ e $x_s(t) = B(t)$. Pertanto ai fini del calcolo dello spettro di potenza e della autocorrelazione di $x(t)$ è importante stabilire se tale segnale presenti o meno caratteristiche di stazionarietà.

Proprietà 2.28 Dati due processi aleatori $x_c(t)$ e $x_s(t)$, singolarmente e congiuntamente SSL, il processo

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t + x_s(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (2.143)$$

è stazionario in senso lato se e solo se valgono le *condizioni di bilanciamento*

$$R_{x_c}(\tau) = R_{x_s}(\tau), \quad R_{x_c x_s}(\tau) = -R_{x_c x_s}(-\tau). \quad (2.144)$$

In tal caso la autocorrelazione di $x(t)$ si scrive come equazione (2.134). Altrimenti il segnale è ciclostazionario e ha autocorrelazione media pari a

$$\overline{R_x}(\tau) = \frac{R_{x_c}(\tau) + R_{x_s}(\tau)}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{R_{x_c x_s}(\tau) - R_{x_s x_c}(\tau)}{2} \sin 2\pi f_0 \tau. \quad (2.145)$$

Prova: Sotto le ipotesi di stazionarietà in senso lato di $x(t)$, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono sia singolarmente che congiuntamente SSL e tali che valgono le condizioni di bilanciamento (2.144). Ciò è stato dimostrato nelle proprietà precedenti e prova la condizione sufficiente. Per provare che le condizioni di bilanciamento sono anche necessarie, valutiamo la autocorrelazione tempo-ritardo di $x(t)$

$$\begin{aligned} R_x(t, \tau) &= E [(x_c(t) \cos 2\pi f_0 t + x_s(t) \sin 2\pi f_0 t) \\ &\quad (x_c(t - \tau) \cos 2\pi f_0 (t - \tau) + x_s(t - \tau) \sin 2\pi f_0 (t - \tau))] \\ &= \frac{R_{x_c}(\tau)}{2} (\cos 2\pi f_0 (2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_{x_s}(\tau)}{2} (-\cos 2\pi f_0(2t - \tau) + \cos 2\pi f_0\tau) \\
& + \frac{R_{x_c x_s}(\tau)}{2} (+\sin 2\pi f_0(2t - \tau) - \sin 2\pi f_0\tau) \\
& + \frac{R_{x_s x_c}(\tau)}{2} (\sin 2\pi f_0(2t - \tau) + \sin 2\pi f_0\tau). \tag{2.146}
\end{aligned}$$

La autocorrelazione è in generale periodica in t con periodo pari a $\frac{1}{2f_0}$ e quindi in generale il processo è ciclostazionario. Affinché il risultato sia indipendente da t è necessario che

$$R_{x_c}(\tau) = R_{x_s}(\tau), \quad R_{x_c x_s}(\tau) = -R_{x_s x_c}(\tau). \tag{2.147}$$

Poiché $R_{x_c x_s}(\tau) = R_{x_s x_c}(-\tau)$ abbiamo le condizioni di bilanciamento. Nel caso in cui le condizioni di bilanciamento non siano soddisfatte, la autocorrelazione mediata su un periodo

$$\bar{R}_x(\tau) = 2f_0 \int_{-\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{4f_0}} R_x(t, \tau) dt, \tag{2.148}$$

diventa l'equazione (2.145) poiché i termini in t si cancellano.

Ripostiamo qui di seguito alcuni esempi notevoli della modulazione analogica a cui applicare quest'ultima proprietà.

Esempio 2.14 *Segnale DSB*: Il segnale modulato ha la forma

$$x(t) = As(t) \cos 2\pi f_0 t, \tag{2.149}$$

dove $s(t)$ è il segnale modulante. Anche se $s(t)$ è stazionario in senso lato, il segnale non può essere stazionario poiché $x_c(t) = As(t)$ e $x_s(t) = 0$ e quindi le condizioni di bilanciamento sono violate. Pertanto il segnale DSB non è stazionario, ma è ciclostazionario. Mediante la ulteriore media su un periodo, si ottiene la autocorrelazione media

$$\bar{R}_x(\tau) = \frac{A^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau. \tag{2.150}$$

Esempio 2.15 *Segnale SSB*: Il segnale può essere espresso nella rappresentazione passa-banda come

$$x(t) = As(t) \cos 2\pi f_0 t \pm A\hat{s}(t) \sin 2\pi f_0 t, \tag{2.151}$$

dove $s(t)$ è il segnale modulante e $\hat{s}(t)$ è la sua trasformata di Hilbert. Il segno più corrisponde alla modulazione SSB-Lower (modulazione a banda laterale inferiore), mentre il segno meno alla SSB-Upper (modulazione a banda laterale superiore). In questo caso, per le proprietà della trasformata di Hilbert, abbiamo che $R_{\hat{s}}(\tau) = R_s(\tau)$ e che $R_{s\hat{s}}(\tau) = -R_{\hat{s}s}(\tau) = -R_{s\hat{s}}(-\tau)$. Quindi le condizioni di bilanciamento sono soddisfatte e il segnale SSB è SSL. Ricordando che $R_{s\hat{s}}(\tau) = -\hat{R}_s(\tau)$, la autocorrelazione si scrive come

$$R_x(\tau) = A^2 R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau \pm A^2 \hat{R}_s(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau. \quad (2.152)$$

Esempio 2.16 *Segnale QAM*: Il segnale modulato è del tipo

$$x(t) = s_1(t) \cos 2\pi f_0 t + s_2(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (2.153)$$

dove $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono due segnali modulanti stazionari in senso lato e incoerenti, ovvero tali che $R_{s_1 s_2}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$. Il segnale modulato è stazionario in senso lato se e solo se i due segnali hanno la stessa autocorrelazione, visto che la condizione di bilanciamento sulla mutua correlazione soddisfatta per ipotesi. Quindi ai fini della stazionarietà del segnale QAM è necessario e sufficiente che i due segnali modulanti abbiano lo stesso spettro di potenza. In caso contrario il segnale è ciclostazionario e la autocorrelazione media è

$$\bar{R}_x(\tau) = \frac{1}{2} (R_{s_1}(\tau) + R_{s_2}(\tau)) \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (2.154)$$

2.11 Problemi

Problema 2.1 Si valuti il segnale analitico corrispondente ai seguenti segnali

1. $x(t) = \sum_{i=0}^N a_i \cos(2\pi i f_0 + \theta_i)$, a_i reali;
2. $x(t) = \sum_{i=1}^N b_i \sin(2\pi i f_0 + \theta_i)$, b_i reali;

Problema 2.2 Si valuti il segnale analitico corrispondente al segnale di energia

$$x(t) = \text{sinc } \alpha t, \quad (2.155)$$

e si commenti in generale sulla natura della versione analitica dei segnali di energia.

Problema 2.3 Si valuti la trasformata di Hilbert del segnale

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right). \quad (2.156)$$

Problema 2.4 Si valuti la trasformata di Hilbert del segnale

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}. \quad (2.157)$$

Problema 2.5 Si valuti la trasformata di Hilbert e la versione analitica del segnale

$$x(t) = \delta(t). \quad (2.158)$$

Problema 2.6 Si valuti e si commenti sulla trasformata di Hilbert del segnale PAM

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Pi\left(\frac{t-kT}{T}\right), \quad (2.159)$$

dove $a_k \in \{-A, A\}$.

Problema 2.7 Sia $x(t)$ un segnale deterministico di energia. Si valutino, usando le proprietà, lo spettro di energia della trasformata di Hilbert e del segnale analitico.

Problema 2.8 Sia $x(t)$ un segnale deterministico di potenza. Si valutino, usando le proprietà, lo spettro di potenza della trasformata di Hilbert e del segnale analitico.

Problema 2.9 Si valuti lo spettro di potenza di trasformata di Hilbert, segnale analitico, componente coseno, componente seno per il segnale avente spettro passa-banda

$$P_x(f) = \Lambda\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \Lambda\left(\frac{f-f_0}{B}\right) \quad f_0 > B. \quad (2.160)$$

Si valuti inoltre lo spettro mutuo tra le due componenti passa-basso del segnale.

Capitolo 3

Modulazione Lineare

In questo capitolo vengono introdotte le modulazioni DSB, AM, SSB, VSB e QAM. Per ognuna di esse sono discusse la rappresentazione analitica, le caratteristiche spettrali e la stazionarietà. Vengono inoltre riportati per ogni schema di modulazione i principali criteri relativi la demodulabilità al ricevitore.

3.1 Introduzione

Un segnale modulato su portante sinusoidale, come già accennato nell'introduzione, ha la forma generale

$$z(t) = A f[s(t)] \cos(2\pi f_0 t + \phi[s(t)]). \quad (3.1)$$

Una semplice trasformazione trigonometrica consente di scrivere $z(t)$ come

$$\begin{aligned} z(t) &= A f[s(t)] \cos \phi[s(t)] \cos 2\pi f_0 t - A f[s(t)] \sin \phi[s(t)] \sin 2\pi f_0 t \\ &= I[s(t)] \cos 2\pi f_0 t + Q[s(t)] \sin 2\pi f_0 t \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$= I(t) \cos 2\pi f_0 t + Q(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (3.3)$$

dove $I(t)$ e $Q(t)$ sono le funzioni che modulano rispettivamente *in fase* e *in quadratura* la portante a frequenza f_0 e che dipendono dal segnale di informazione $s(t)$. Vari formati di modulazione possono essere definiti a seconda delle relazioni tra le funzioni I e Q e il segnale modulante $s(t)$.

Nella modulazione lineare $I[\cdot]$ e $Q[\cdot]$ sono trasformazioni lineari, o più in generale affini¹, di $s(t)$.

¹Se $\mathcal{L}[s(t)]$ è una trasformazione lineare del segnale $s(t)$, una trasformazione *affine*

3.2 Modulazione DSB

Lo schema più semplice di modulazione lineare è la *modulazione di ampiezza a doppia banda laterale*, o modulazione *DSB (Double Side-Band)*, o *modulazione a doppia banda laterale a portante soppressa* e *DSB-SC (Double Side-Band - Sine Carrier)*. Il segnale modulato ha la forma

$$z(t) = A s(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (3.4)$$

ovvero è ottenuto semplicemente moltiplicando il segnale modulante $s(t)$ per la portante, assunta per semplicità a fase iniziale $\phi_0 = 0$. La ampiezza istantanea del segnale modulato è tempo-variante ed è proporzionale al segnale modulante. Nel dominio della frequenza il segnale modulato, dalle ben note proprietà della trasformata di Fourier, è

$$Z(f) = \frac{A}{2} [S(f - f_0) + S(f + f_0)]. \quad (3.5)$$

La figura 3.1 mostra in forma schematica nel dominio della frequenza l'operazione di modulazione. Il segnale modulante $S(f)$ in banda-base, con frequenza massima pari a B , viene traslato attorno alla frequenza della portante, sia a frequenze positive che negative.² La banda occupata dal segnale modulato è $2B$ e comprende entrambe le *bande laterali*. Questo non è molto efficiente dal punto di vista dell'utilizzo dello spettro e schemi più efficienti saranno presentati in seguito. Nel dominio del tempo la figura 3.2 mostra un segmento di un segnale modulante, della portante e del segnale modulato ottenuto come prodotto dei primi due. L'ampiezza istantanea di $z(t)$ trasporta il segnale di informazione $s(t)$.

La Figura 3.3 mostra schematicamente il modulatore DSB e un *demodulatore coerente* a valle di un canale ideale che non ha introdotto né distorsione né rumore. La demodulazione consiste nel rimoltiplicare il segnale modulato per un coseno. Si è assunto qui che il coseno al ricevitore (oscillatore locale) abbia la stessa frequenza e fase della portante (tale ipotesi verrà

$\mathcal{A}[s(t)]$ è una generalizzazione che consente l'inclusione di una costante c_0 , ovvero $\mathcal{A}[s(t)] = \mathcal{L}[s(t)] + c_0$. Si ricordi che una funzione affine non è lineare perché non soddisfa il principio di sovrapposizione.

²Si noti che la figura è da considerarsi solo uno schizzo delle trasformate di Fourier. In generale le trasformate andrebbero disegnate con entrambi parte reale e parte immaginaria, o modulo e fase. Preferiamo disegnare le funzioni in maniera schematica per maggiore agilità. Nel seguito utilizzeremo questa modalità di rappresentazione senza esplicito commento.

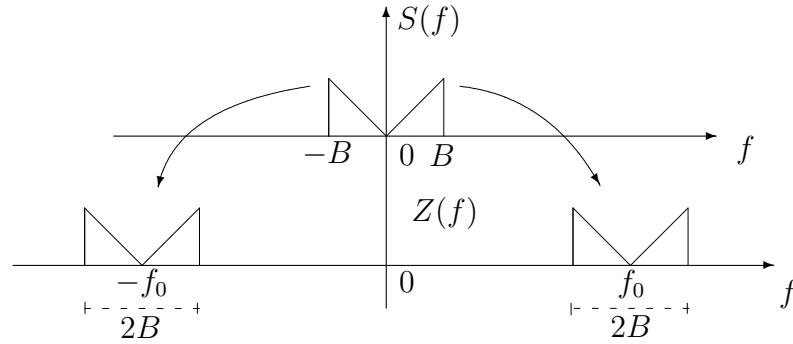


Figura 3.1: La modulazione DSB nel dominio della frequenza

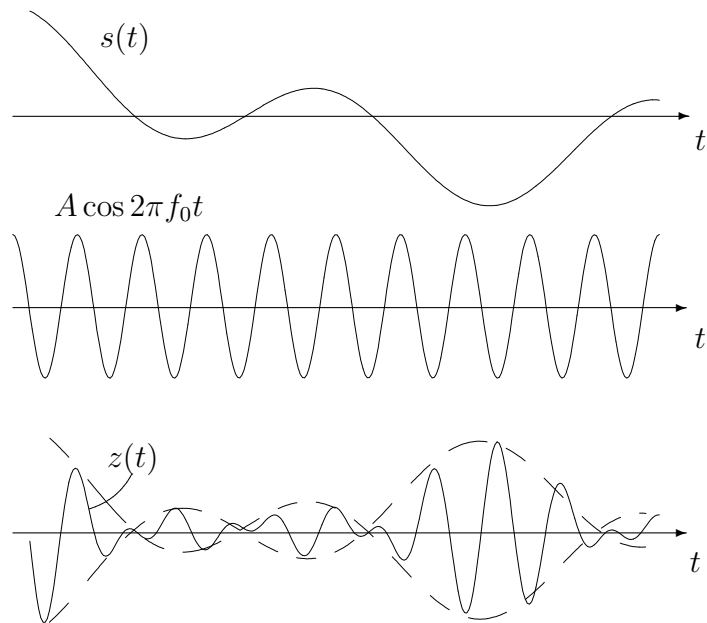


Figura 3.2: La modulazione DSB nel dominio del tempo

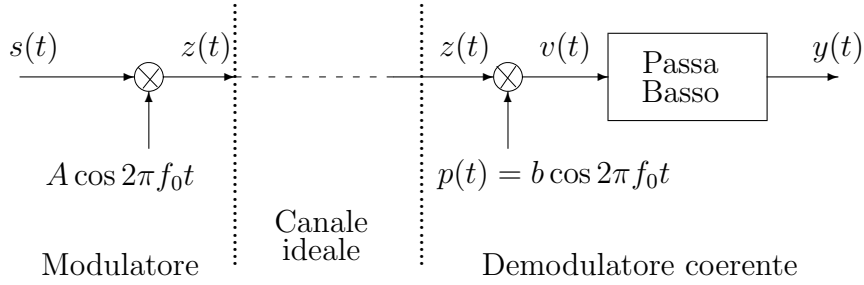


Figura 3.3: Modulatore e demodulatore DSB per un canale ideale

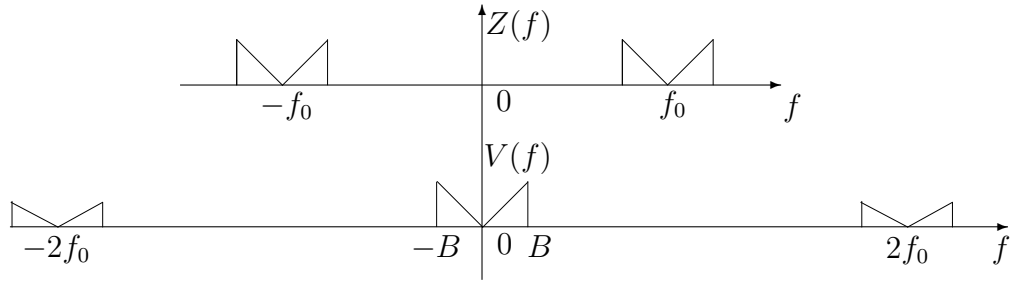


Figura 3.4: La demodulazione coerente nel dominio della frequenza

discussa in seguito). Il segnale è recuperabile a valle di un filtro passa-basso. Più precisamente

$$\begin{aligned} v(t) &= z(t)b \cos 2\pi f_0 t = Ab s(t) \cos^2 2\pi f_0 t \\ &= \frac{Ab}{2} s(t) + \frac{Ab}{2} s(t) \cos 4\pi f_0 t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nel dominio della frequenza abbiamo

$$V(f) = \frac{Ab}{2} S(f) + \frac{Ab}{4} [S(f - 2f_0) + S(f + 2f_0)], \quad (3.7)$$

come rappresentato schematicamente nella Figura 3.4. Un filtro passa-basso a guadagno unitario nella banda $[-B, B]$, recupera un segnale proporzionale al segnale modulante

$$y(t) = \frac{Ab}{2} s(t). \quad (3.8)$$

Nelle figure si è assunto implicitamente che la replica del segnale a frequenza $2f_0$ non fosse sovrapposta al segnale in banda base. Ovvero, si è assunto che la frequenza della portante sia sufficientemente elevata da consentire ad un filtro passa-basso di isolare la componente attorno allo zero. Più precisamente, guardando alla figura 3.4, deve essere verificata la condizione di non sovrapposizione $2f_0 - B > B$, ovvero $f_0 > B$. Si tratta di una condizione poco stringente in quanto la frequenza della portante è in genere molto più elevata di B .

3.2.1 Potenza e densità spettrale

Nei segnali della modulazione lineare assumeremo che il segnale modulante, e quindi anche il segnale modulato, siano segnali di potenza. Segnali di energia non saranno considerati in queste note nel contesto della modulazione analogica. Calcoliamo ora lo spettro di potenza di $z(t)$ quando il segnale modulante è un segnale di cui sia noto solo lo spettro di potenza. Ci limiteremo in queste note a considerare solo segnali modulanti aleatori. La trattazione che ne discende è più semplice del caso in cui il modello preveda come segnale modulante un segnale deterministico. Si rimanda il lettore a testi più specifici sull'argomento, facendo notare comunque che i risultati sono molto simili.

Dato un segnale aleatorio $s(t)$ la autocorrelazione tempo-ritardo del segnale modulato DSB è

$$\begin{aligned} R_z(t; \tau) &= E[z(t)z(t - \tau)] \\ &= E[As(t) \cos 2\pi f_0 t \quad As(t - \tau) \cos(2\pi f_0(t - \tau))] \\ &= A^2 E[s(t)s(t - \tau)] \cos 2\pi f_0 t \quad \cos(2\pi f_0(t - \tau)) \\ &= \frac{A^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{A^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0(2t - \tau), \quad (3.9) \end{aligned}$$

che rivela come il segnale sia ciclostazionario nella autocorrelazione. Il periodo è $\frac{1}{2f_0}$. Per quantificare in maniera compatta autocorrelazione, densità spettrale e potenza, si considera la autocorrelazione mediata su un periodo, che è

$$\overline{R}_z(\tau) = 2f_0 \int_{-\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{4f_0}} R_z(t; \tau) dt = \frac{A^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau, \quad (3.10)$$

dove la media temporale del secondo termine si è annullata. Quindi lo spettro di potenza (medio) è

$$\overline{P}_z(f) = \frac{A^2}{4} P_s(f - f_0) + \frac{A^2}{4} P_s(f + f_0). \quad (3.11)$$

Come ci si aspettava, lo spettro di potenza è passa-banda ed è ottenuto dalla traslazione dello spettro di potenza del segnale $s(t)$ alla frequenza della portante. La potenza media del segnale modulato è

$$\bar{P}_z = \bar{R}_z(0) = \frac{A^2}{2} R_s(0) = \frac{A^2}{2} P_s. \quad (3.12)$$

3.2.2 Versione analitica e inviluppo complesso

Ai fini di una visualizzazione sul piano delle fasi, o dell'inviluppo complesso del segnale DSB, calcoliamo la versione analitica del segnale modulato

$$\overset{\circ}{z}(t) = A s(t) e^{j2\pi f_0 t}. \quad (3.13)$$

L'inviluppo complesso è

$$\tilde{z}(t) = A s(t). \quad (3.14)$$

Nel piano dell'inviluppo complesso il segnale modulato è semplicemente un vettore la cui punta si muove esclusivamente sull'asse reale. Una migliore analisi grafica sarà presentata in seguito quando valuteremo anche gli effetti del rumore sul canale.

Esempio 3.1 Un segnale di tensione $s(t)$ avente spettro di potenza triangolare, potenza $P_s = 100 (mV)^2$ e frequenza massima pari a $B = 50$ KHz modula in DSB una portante a 1 MHz. La portante ha ampiezza $A = 10$. Gli spettri di potenza sono mostrati in figura 3.5, dove

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P_s}{B} = \frac{100 \cdot 10^{-6} V^2}{50000 Hz} = 0.2 \cdot 10^{-9} V^2/Hz \\ &= 0.2 \cdot 10^{-3} (mV)^2/Hz = 0.2 (mV)^2/KHz; \\ \beta &= \frac{A^2}{4} \alpha = 0.5 \cdot 10^{-9} V^2/Hz = 0.5 \cdot 10^{-3} (mV)^2/Hz \\ &= 0.5 (mV)^2/KHz. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si è assunto implicitamente che il segnale modulato è ancora un segnale di tensione. Formalmente questo è equivalente ad assumere nel calcolo che la portante è un segnale adimensionale. La potenza del segnale modulato è

$$\bar{P}_z = \frac{A^2}{2} P_s = 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6} V^2 = 5 \cdot 10^{-3} V^2 = 5000 (mV)^2. \quad (3.16)$$

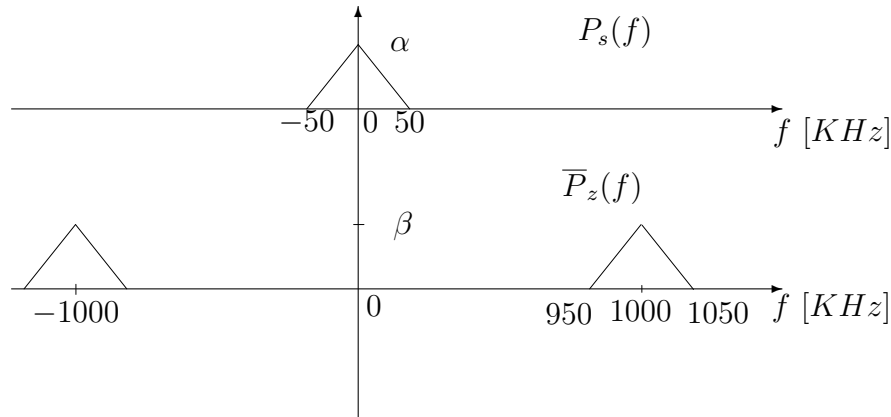


Figura 3.5: Gli spettri di potenza dell'esempio 3.1

3.2.3 Scostamenti nell'oscillatore locale

Alcuni schemi a blocchi di modulatori e demodulatori per segnali DSB saranno presentati in seguito, ma è qui utile già analizzare le conseguenze di una delle assunzioni cruciali del demodulatore coerente. Abbiamo infatti supposto in figura 3.3 che al ricevitore sia disponibile un oscillatore avente esattamente la stessa frequenza e fase della portante. Questa assunzione potrebbe essere arbitraria in quanto l'oscillatore opera localmente ed è totalmente indipendente dal trasmettitore. Vedremo in seguito come sia possibile estrarre l'*aggancio* della fase locale direttamente dal segnale in arrivo, ma per ora è certamente istruttivo vedere quali sarebbero le conseguenze di un demodulatore coerente che usa un oscillatore con

$$p(t) = b \cos(2\pi(f_0 + \Delta)t + \phi_0), \quad (3.17)$$

dove Δ e ϕ_0 sono rispettivamente lo scostamento di frequenza e di fase rispetto alla portante. Il segnale all'uscita del moltiplicatore è

$$\begin{aligned} v(t) &= p(t)z(t) = Abs(t) \cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi(f_0 + \Delta)t + \phi_0) \\ &= \frac{Ab}{2} s(t) \cos(2\pi\Delta t + \phi_0) + \frac{Ab}{2} s(t) \cos(2\pi(2f_0 + \Delta)t + \phi_0), \end{aligned}$$

che nel dominio della frequenza si scrive come

$$V(f) = \frac{Ab}{4} (e^{j\phi_0} S(f - \Delta) + e^{-j\phi_0} S(f + \Delta))$$

$$+\frac{Ab}{4} \left(e^{j\phi_0} S(f - (2f_0 + \Delta)) + e^{-j\phi_0} S(f + (2f_0 + \Delta)) \right).$$

L'effetto combinato di fase e frequenza lascia una modulazione residua sul segnale in banda base che non può più essere recuperato con precisione. Per vederci più chiaro esaminiamo separatamente i due effetti. Supponiamo che la frequenza sia esatta ($\Delta = 0$) e che ci sia solo uno scostamento di fase. Il segnale all'uscita del moltiplicatore è

$$v(t) = \frac{Ab}{2} s(t) \cos \phi_0 + \frac{Ab}{2} s(t) \cos (4\pi f_0 t + \phi_0). \quad (3.18)$$

Il filtro passa-basso elimina la componente a frequenza doppia per cui in uscita si ha

$$y(t) = \frac{Ab}{2} s(t) \cos \phi_0. \quad (3.19)$$

Poiché $-1 \leq \cos \phi_0 \leq 1$, il segnale in uscita risulta attenuato ma non distorto.³ Per piccoli scostamenti di fase, $\cos \phi_0 \simeq 1$, e l'effetto è trascurabile. Viceversa se l'oscillatore è quasi in quadratura con la portante, ovvero $\phi_0 \simeq \pi/2$, il segnale in uscita viene quasi totalmente cancellato $y(t) \simeq 0$.

Valutiamo ora l'effetto del solo scostamento di frequenza, ovvero $\phi_0 = 0$. Il segnale in uscita all'uscita del moltiplicatore è

$$v(t) = \frac{Ab}{2} s(t) \cos 2\pi \Delta t + \frac{Ab}{2} s(t) \cos (2\pi(2f_0 + \Delta)t). \quad (3.20)$$

Il filtro passa-basso elimina certamente la componente a frequenza $2f_0 + \Delta$ lasciando in uscita

$$y(t) = \frac{Ab}{2} s(t) \cos 2\pi \Delta t \Big|_{LP(-B,B)}. \quad (3.21)$$

⁴ Il segnale presenta una modulazione residua come indicato schematicamente nella figura 3.6. Nel dominio della frequenza l'uscita si scrive

$$Y(f) = \frac{Ab}{4} [S(f - \Delta) + S(f + \Delta)] \Pi \left(\frac{f}{2B} \right). \quad (3.22)$$

L'effetto è particolarmente deleterio in quanto i contributi frequenziali del segnale modulante vengono riprodotti a frequenze diverse. Nel progetto del demodulatore coerente è pertanto di importanza cruciale la precisione in frequenza dell'oscillatore locale. L'utilizzo di oscillatori al quarzo molto stabili garantisce in genere nei sistemi reali buone precisioni.

³L'effetto della attenuazione sarà ulteriormente analizzato quando terremo conto anche del rumore sul canale.

⁴La notazione $v(t)|_{LP(-B,B)}$ indica la versione del segnale $v(t)$ dopo un filtro passa-basso ideale a guadagno unitario nella banda $(-B, B)$.

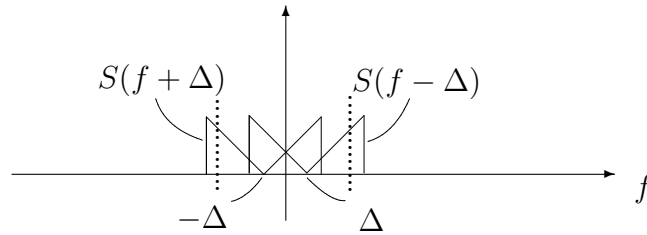


Figura 3.6: L'effetto della deriva in frequenza nell'oscillatore locale

3.3 Modulazione AM

I problemi derivanti dalla necessità di stabilità nell'oscillatore locale e la complessità (relativa) del ricevitore nella modulazione DSB, hanno stimolato negli anni di introduzione della radio, l'utilizzo della *modulazione AM*, o *modulazione di inviluppo*. Si tratta di uno schema di modulazione che consente l'utilizzo di ricevitori di estrema semplicità che non necessitano di alcun oscillatore e moltiplicatore, ma di semplicissimi componenti passivi. E' evidente che la tecnologia elettronica degli anni della introduzione della radio era estremamente diversa da quella odierna e i criteri di valutazione della complessità e del costo di un sistema sono drasticamente cambiati. Comunque la sopravvivenza di un tale sistema di modulazione ancora oggi nelle applicazioni di radiodiffusione e gli aspetti metodologici ad essa connessi la rendono degna di attenzione. L'idea dell'AM fu quella di evitare che fosse necessario generare la sinusoide nel demodulatore, ma essa fosse trasmessa con il segnale. L'attento bilanciamento della potenza della portante con quella delle bande laterali consente inoltre di realizzare un demodulatore mediante una semplice rivelazione di inviluppo. Vedremo che il prezzo da pagare in tale schema sarà una maggiore potenza necessaria in trasmissione. Il segnale modulato AM si scrive

$$z(t) = A(1 + ks(t)) \cos 2\pi f_0 t, \quad (3.23)$$

dove $s(t)$ è il segnale modulante, e k è una costante positiva detta *coefficiente di modulazione*, che serve a bilanciare in $z(t)$ il contributo della portante e delle bande laterali. Infatti il segnale, che può essere riscritto come

$$z(t) = A \cos 2\pi f_0 t + A ks(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (3.24)$$

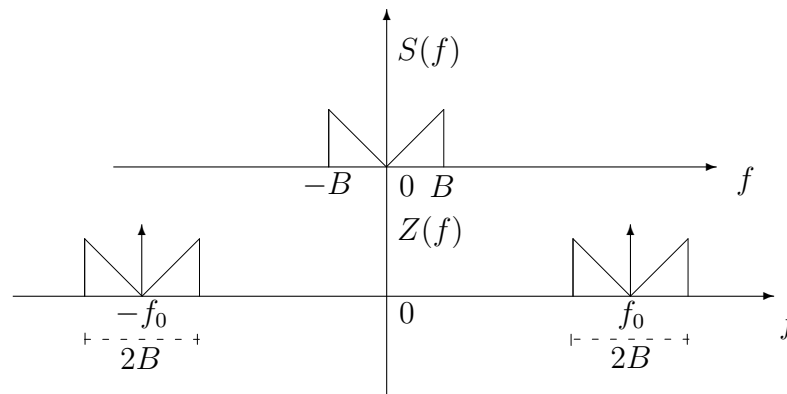


Figura 3.7: La modulazione AM nel dominio della frequenza

non è altro che la sovrapposizione di una sinusoide (portante) e di un segnale DSB (bande laterali). Nel dominio della frequenza

$$Z(f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{Ak}{2} (S(f - f_0) + S(f + f_0)). \quad (3.25)$$

La figura 3.7 mostra schematicamente nel dominio della frequenza il segnale modulato, dove è inclusa la portante al centro della banda.

La figura 3.8 mostra nel dominio del tempo rispettivamente un segmento di segnale, di portante e di segnale modulato. Si noti come l'involuppo di $z(t)$ contenga l'informazione istantanea sul segnale modulante. L'involuppo istantaneo di $z(t)$ è $I_z(t) = A|1 + ks(t)|$ ed affinché esso sia legato linearmente a $s(t)$ deve essere tutto al di sopra dell'asse dei tempi, ovvero

$$I_z(t) = A|1 + ks(t)| = A(1 + ks(t)), \quad \text{se } 1 + ks(t) \geq 0 \quad \forall t. \quad (3.26)$$

La *condizione dell'involuppo* si riscrive come

$$k |s(t)| \leq 1 \quad \forall t. \quad (3.27)$$

Se il segnale è limitato in ampiezza

$$-s_{max} \leq s(t) \leq s_{max}, \quad \forall t, \quad (3.28)$$

si impone al coefficiente di modulazione un limite superiore $k \leq 1/s_{max}$.⁵ La condizione impone un vincolo sul rapporto tra il contributo della portante

⁵E' opportuno notare che un rivelatore di involuppo su un segnale DSB restituirebbe il segnale $A|s(t)|$. In tale caso $s(t)$ sarebbe affetto da una distorsione ineliminabile se esso assume anche valori negativi. Un approfondimento è suggerito negli esercizi.

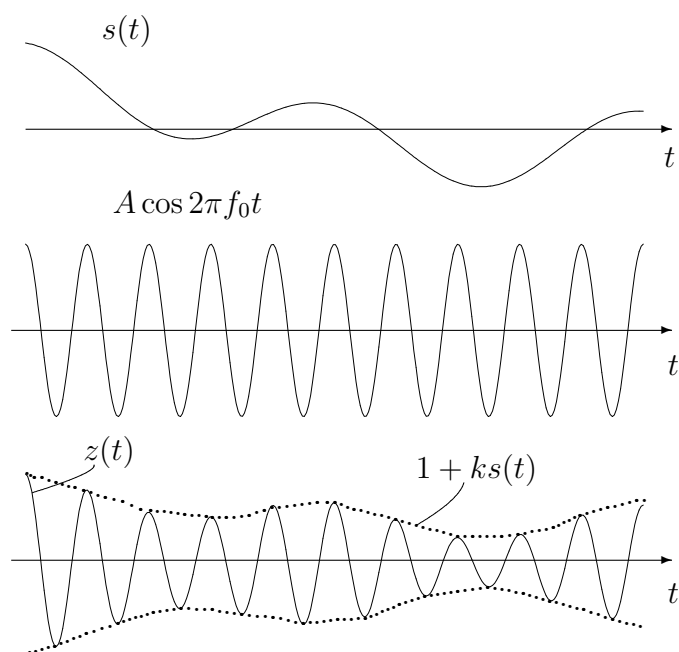


Figura 3.8: La modulazione AM nel dominio del tempo

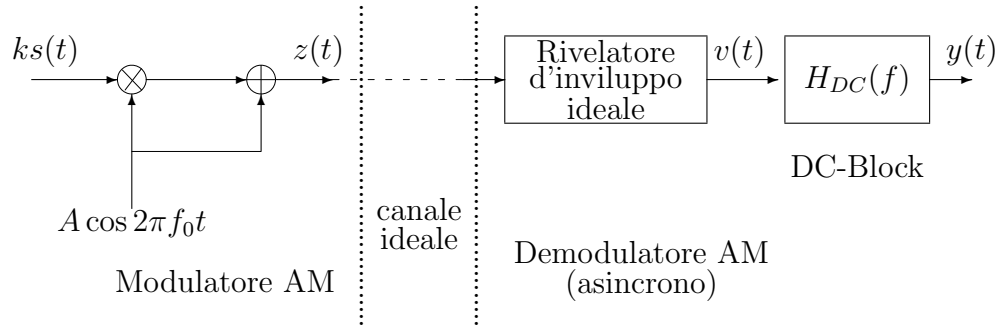


Figura 3.9: Lo schema a blocchi di modulatore e demodulatore AM

e delle bande laterali (questo verrà analizzato meglio in seguito). Lo schema a blocchi di modulatore e demodulatore è mostrato in figura 3.9. Si apprezzi la semplicità del demodulatore che non richiede alcun oscillatore locale, ma solo componenti asincroni. Il segnale a valle del rivelatore d'involuppo ideale è

$$v(t) = A(1 + ks(t)) \quad \text{se } k \leq 1/s_{max}, \quad (3.29)$$

e contiene ancora una costante residua A che può essere eliminata con un filtro lineare di *blocco della componente continua* (*DC-Block*)⁶. La caratteristica di tale filtro, assunto a guadagno unitario, è schematicamente indicata in figura 3.10. L'andamento “a spillo” attorno a $f = 0$ non è certamente ideale e la distorsione residua sul segnale va valutata a seconda delle caratteristiche di $s(t)$. L'uscita del sistema è

$$y(t) = A ks(t)|_{H_{DC}} = Ak(h_{DC} * s)(t). \quad (3.30)$$

Per molti segnali di interesse nelle applicazioni, come ad esempio segnali vocali o audio, lo spettro di $s(t)$ non contiene alcuna informazione attorno allo zero e pertanto il blocco DC non comporta distorsioni apprezzabili.

3.3.1 Potenza e densità spettrale

Il calcolo di autocorrelazione, potenza e densità spettrale per il segnale AM si esegue in maniera del tutto analoga al caso DSB. Assumendo che il

⁶Il termine DC, che è l'acronimo di *Direct Current*, è usato in pratica come sinonimo di *costante*.

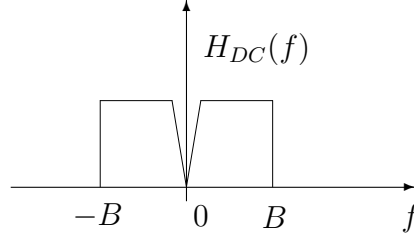


Figura 3.10: L'andamento schematico della risposta armonica del filtro $H_{DC}(f)$ di blocco della componente continua

segnale modulante sia un processo aleatorio SSL con autocorrelazione $R_s(\tau)$, abbiamo che la autocorrelazione tempo-ritardo di $z(t)$ è pari a

$$\begin{aligned}
 R_z(t; \tau) &= E[z(t)z(t-\tau)] = E[A(1+ks(t)) \cos 2\pi f_0 t \\
 &\quad A(1+ks(t-\tau)) \cos 2\pi f_0(t-\tau)] \\
 &= A^2 \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau) \\
 &\quad + A^2 k^2 E[s(t)s(t-\tau)] \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau) \\
 &\quad + A^2 k E[s(t)] \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau) \\
 &\quad + A^2 k E[s(t-\tau)] \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0(t-\tau). \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Assumendo la media del segnale modulante nulla, $E[s(t)] = 0$ (ovvero nessuna baseline, che significa nessun impulso in $\tau = 0$ nella funzione di autocorrelazione), gli ultimi due termini si annullano e si ha

$$\begin{aligned}
 R_z(t; \tau) &= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0(2t-\tau) \\
 &\quad + \frac{A^2 k^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{A^2 k^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0(2t-\tau).
 \end{aligned}$$

La presenza dei due termini dipendenti da t conferisce un carattere non stazionario a $z(t)$, che è comunque ciclostazionario con periodo $\frac{1}{2f_0}$. Eseguendo come anche nel caso DSB una media temporale su un periodo, abbiamo la autocorrelazione media

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_z(\tau) &= 2f_0 \int_{-\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{4f_0}} R_z(t; \tau) dt \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{A^2 k^2}{2} R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Lo spettro di potenza (medio) è quindi

$$\overline{P}_z(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0) + \frac{A^2k^2}{4}P_s(f - f_0) + \frac{A^2k^2}{4}P_s(f + f_0). \quad (3.33)$$

Si tratta chiaramente della sovrapposizione della componente relativa la portante e dello spettro di potenza del segnale in banda base traslato attorno a f_0 . La potenza totale è quindi la sovrapposizione della potenza della portante \overline{P}_p e di quella delle bande laterali \overline{P}_b

$$\overline{P}_z = \overline{P}_p + \overline{P}_b, \quad (3.34)$$

dove

$$\overline{P}_p = \frac{A^2}{2}; \quad \overline{P}_b = \frac{A^2k^2}{2}P_s. \quad (3.35)$$

Poiché la potenza spesa per la portante non è collegata al trasporto di informazione, si definisce *efficienza di potenza*

$$\begin{aligned} \eta_p &= \frac{\text{potenza associata alle bande laterali}}{\text{potenza totale}} \\ &= \frac{\overline{P}_b}{\overline{P}_p + \overline{P}_b} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{P}_p}{\overline{P}_b}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2P_s}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Si noti come l'efficienza cresca all'aumentare di k^2P_s . Ma ciò è evidentemente in contrasto con la condizione dell'involuppo che richiede di soddisfare la condizione $k|s(t)| < 1$. Dalla condizione sull'involuppo abbiamo una condizione sulle potenze: poiché $k^2s^2(t) < 1$, $k^2E[s^2(t)] < 1$, ovvero $k^2P_s < 1$, oppure

$$\frac{A^2k^2P_s}{2} < \frac{A^2}{2}; \quad P_b < P_p. \quad (3.37)$$

La potenza delle bande laterale non può eccedere quella della portante. L'efficienza non può superare il 50 %.

In pratica però se $s(t)$ è un segnale elatorio, non necessariamente limitato in ampiezza, la condizione dell'involuppo non può essere soddisfatta esattamente. In tal caso si dimensiona k accettando uno sconfinamento contenuto in probabilità. Agli sconfinamenti si fa corrispondere tipicamente una saturazione del segnale che va opportunamente dimensionata. Per fissare meglio le idee sull'entità del coefficiente di modulazione k a confronto della potenza di $s(t)$, supponiamo che $s(t)$ sia un processo aleatorio gaussiano stazionario

a media nulla. La varianza è quindi pari alla potenza P_s . Il segnale è ovviamente non limitato in ampiezza, ma vogliamo valutare il valore di k che corrisponde ad una probabilità di sconfinamento dell' 1%.

$$\begin{aligned} Pr\{1 + ks(t) < 0\} &= 0.01; & \Phi\left(-\frac{1}{k\sqrt{P_s}}\right) &= 0.01; \\ \frac{1}{k\sqrt{P_s}} &= 2.35; & k\sqrt{P_s} &= 0.43; & k^2P_s &= 0.18. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Quindi secondo questa specifica la potenza connessa alle bande laterali deve essere il 18 % di quella connessa alla portante. L'efficienza è $\eta_p = 0.15$.

La condizione può essere facilmente modificata. Nelle applicazioni in genere la efficienza è dell'ordine del 30 %. Rifacendo i conti all'inverso questo corrisponderebbe ad una probabilità di sconfinamento dell'ordine del 6 %.

3.3.2 Versione analitica

Il segnale analitico corrispondente $z(t)$ è ottenuto immediatamente

$$\tilde{z}(t) = A(1 + ks(t))e^{j2\pi f_0 t}. \quad (3.39)$$

L'involuppo complesso è

$$\tilde{z}(t) = A(1 + ks(t)). \quad (3.40)$$

Poiché la condizione dell'involuppo rende $1 + ks(t) \geq 0$, nel piano dell'involuppo complesso il segnale modulato è un vettore la cui punta si muove esclusivamente sulla parte positiva dell'asse reale. Anche per l'AM ulteriori commenti sull'interpretazione grafica saranno presentati nella discussione che include il rumore introdotto sul canale.

Esempio 3.2 Un segnale aleatorio $s(t)$ ha lo spettro di potenza $P_s(f)$ mostrato in figura 3.11. Le frequenze B_1 e B_2 sono rispettivamente 200 e 10000 Hz. Si tratta di uno spettro tipico per segnali audio. Il segnale $s(t)$ modula in AM con $k = 2$ una portante a frequenza di $f_0 = 800$ KHz. Il segnale è limitato in ampiezza nell'intervallo $[-0.4, 0.4]$. Si studi l'uscita del ricevitore che utilizza una demodulazione di involuppo. **Soluzione:** Il segnale modulato occuperà l'intervallo di frequenze $[f_0 - B_2, f_0 + B_2]$. La parte dello spettro $[f_0 - B_1, f_0 + B_1]$ attorno alla

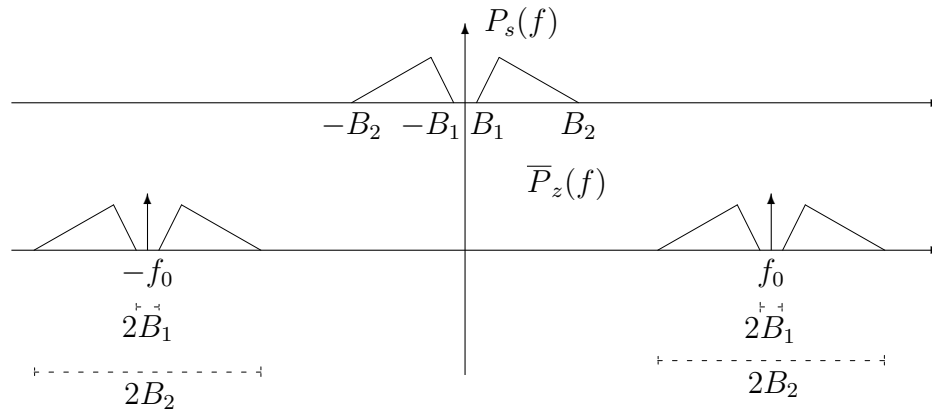


Figura 3.11: Le densità spettrali dell'esempio 3.2

portante non è utilizzata. La figura 3.11 mostra le densità spettrali di potenza. All'uscita del demodulatore di involuppo ideale si ottiene

$$v(t) = A|1 + 2s(t)| = A(1 + 2s(t)), \quad (3.41)$$

poiché la condizione dell'involuppo $k \leq 1/s_{max} = 10/4$, è rispettata. Il filtro per bloccare la continua non è molto critico in quanto basta che la distorsione dovuta alla sua non idealità sia contenuta al di sotto di 200 Hz. Quindi è ragionevole assumere che l'uscita sarà proporzionale al segnale modulante senza distorsioni apprezzabili.

3.4 Efficienza spettrale di DSB e AM

Quando un segnale modulato viene inviato su un canale, che finora abbiamo assunto ideale, occupa una porzione dello spettro che, almeno in linea di principio, non può essere utilizzata da altri sistemi di modulazione.⁷ Vari segnali di informazione provenienti da una o più sorgenti vengono tipicamente affiancati sullo spettro delle frequenze realizzando quello che si chiama un *multiplex di frequenza*. Si tratta di un concetto che è sicuramente

⁷In realtà esistono schemi di modulazione numerica che consentono a più segnali di viaggiare sovrapposti nella stessa banda di frequenze, come il CDMA (Code Division Multiple Access). In queste note tratteremo solo la modulazione analogica e assumeremo che segnali modulati possano essere distribuiti in frequenza solo su bande non sovrapposte.

familiare a tutti dall'utilizzo della radio commerciale. E' evidente che le capacità di trasporto di un mezzo sono quindi legate alla disponibilità di porzioni dell'asse delle frequenze. Assume pertanto importanza cruciale l'occupazione in frequenza di un segnale modulato per cui è utile definire una *efficienza spettrale* come

$$\eta_s = \frac{\text{banda occupata dal segnale modulante}}{\text{banda occupata dal segnale modulato}}. \quad (3.42)$$

Sia nella modulazione DSB che AM ad un segnale in banda base con frequenza massima pari a B viene associato un segnale modulato avente una occupazione in banda pari a $2B$. Pertanto l'efficienza spettrale è

$$\eta_{sDSB} = \eta_{sAM} = \frac{B}{2B} = 0.5. \quad (3.43)$$

L'efficienza dell'AM e del DSB non supera il 50% ed è dovuta alla simmetria dello spettro del segnale modulato attorno alla frequenza della portante. Si ricordi che il segnale $s(t)$, che è stato assunto reale, ha uno spettro Hermitiano. Vedremo in seguito come nella modulazione SSB il segnale modulante possa essere recuperato in ricezione anche da una sola delle bande laterali. Tale idea consente di ottenere massima efficienza spettrale alle spese di qualche possibile distorsione alle basse frequenze.

3.5 Modulazione SSB

Le esigenze già presentate di una maggiore efficienza spettrale rispetto alle modulazioni che usano entrambi le bande laterali, suggeriscono uno schema che nel segnale modulato preveda solo una delle due bande laterali. Nel caso si conservi la banda laterale superiore si parla di *modulazione a singola banda laterale superiore*, o SSB-U (Single Side Band - Upper), viceversa di *modulazione a singola banda laterale inferiore*, o SSB-L (Single Side Band - Lower) nel caso si preservi solo la banda laterale inferiore. La figura 3.12 mostra lo schema di principio del modulatore SSB dove ad un semplice modulatore DSB è fatto seguire un filtro passa-banda che cancella una delle delle due bande. Nel dominio della frequenza la rimozione di una delle bande laterali è rappresentata in figura 3.13 dove sono indicati i filtri passa-banda $H_{SSB-U}(f)$ e $H_{SSB-L}(f)$ che conservano rispettivamente la banda superiore o inferiore. I filtri sono assunti ideali, ma l'idealità della loro risposta armonica è cruciale solo attorno a f_0 dove il segnale potrebbe presentare delle componenti rilevanti. Torneremo su questo problema in seguito.

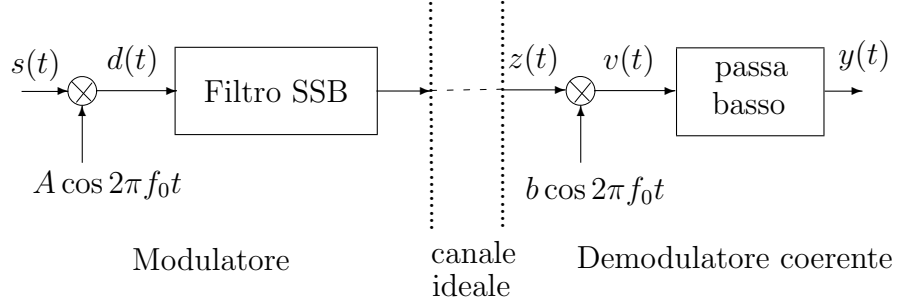


Figura 3.12: Lo schema di principio di un modulatore SSB

Nel dominio della frequenza il segnale modulato SSB-U può essere scritto come

$$Z_U(f) = 2 D(f) H_{SSB-U}(f), \quad (3.44)$$

dove il fattore 2 è stato introdotto solo per ottenere una espressione più compatta ed è irrilevante ai fini della discussione. Ora poiché lo spettro di $d(t)$ è nullo al di fuori dell'insieme $[-f_0 - B, -f_0 + B] \cup [f_0 - B, f_0 + B]$, il segnale modulato è esprimibile formalmente anche come

$$Z_U(f) = 2 D(f) [u(f - f_0) + u(-f - f_0)]. \quad (3.45)$$

Analogamente per il segnale SSB-L

$$Z_L(f) = 2 D(f) H_{SSB-L}(f), \quad (3.46)$$

$$Z_U(f) = 2 D(f) [1 - u(f - f_0) - u(-f - f_0)]. \quad (3.47)$$

L'operazione di taglio, descritta dalle equazioni (3.45) e (3.47), è mostrata in figura 3.13.

Per ottenere una equazione più esplicita nel dominio del tempo e della frequenza, si ricordi che $u(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(x))$ e che $\text{sgn}(x) = -\text{sgn}(-x)$. Ribadiamo che il fattore 2 è introdotto solo per comodità ed è del tutto irrilevante. Con l'aiuto della figura 3.13 abbiamo

$$\begin{aligned} Z_U(f) &= 2D(f) [u(f - f_0) + u(-f - f_0)] \\ &= (AS(f - f_0) + AS(f + f_0)) [u(f - f_0) + u(-f - f_0)] \\ &= AS(f - f_0)u(f - f_0) + AS(f + f_0)u(-f - f_0) \end{aligned}$$

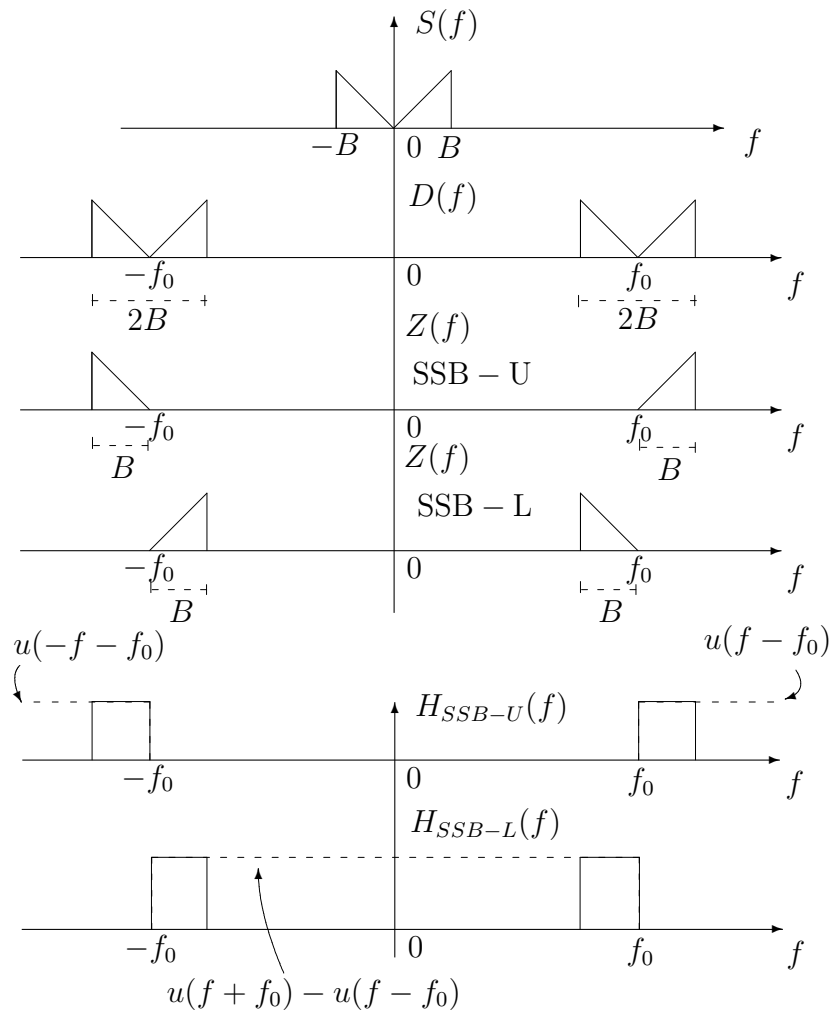


Figura 3.13: La modulazione SSB nel dominio della frequenza

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2}S(f - f_0)(1 + \operatorname{sgn}(f - f_0)) + \frac{A}{2}S(f + f_0)(1 + \operatorname{sgn}(-f - f_0)) \\
&= \frac{A}{2}S(f - f_0) + \frac{A}{2}S(f + f_0) \\
&\quad + \frac{A}{2}S(f - f_0)\operatorname{sgn}(f - f_0) - \frac{A}{2}S(f + f_0)\operatorname{sgn}(f + f_0) \\
&= AS(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\
&\quad - AS(f) \frac{\operatorname{sgn}(f)}{j} * \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Analogamente per il segnale SSB-L

$$\begin{aligned}
Z_L(f) &= 2D(f)[1 - u(f - f_0) - u(-f - f_0)] \\
&= (AS(f - f_0) + AS(f + f_0))[1 - u(f - f_0) - u(-f - f_0)] \\
&= AS(f - f_0) + AS(f + f_0) \\
&\quad - AS(f - f_0)u(f - f_0) - AS(f + f_0)u(-f - f_0) \\
&= AS(f - f_0) + AS(f + f_0) \\
&\quad - AS(f - f_0)\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(f - f_0)) - AS(f + f_0)\frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn}(f + f_0)) \\
&= \frac{A}{2}S(f - f_0) + \frac{A}{2}S(f + f_0) \\
&\quad - \frac{A}{2}S(f - f_0)\operatorname{sgn}(f - f_0) + \frac{A}{2}S(f + f_0)\operatorname{sgn}(f + f_0) \\
&= AS(f) * \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\
&\quad + AS(f) \frac{\operatorname{sgn}(f)}{j} * \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)). \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Antitrasformando, nel dominio del tempo i segnali SSB-U e SSB-L sono rispettivamente

$$\begin{aligned}
z_U(t) &= A s(t) \cos 2\pi f_0 t - A \hat{s}(t) \sin 2\pi f_0 t, \\
z_L(t) &= A s(t) \cos 2\pi f_0 t + A \hat{s}(t) \sin 2\pi f_0 t, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

dove $\hat{s}(t)$ è la trasformata di Hilbert di $s(t)$. Ricordiamo (Capitolo 2) che la trasformata di Hilbert si ottiene filtrando il segnale con un sistema lineare avente risposta impulsiva $h_H(t) = \frac{1}{\pi t}$ e risposta armonica $H_H(f) = \frac{\operatorname{sgn}(f)}{j}$. Si noti come il segnale SSB abbia il segnale modulante come componente in fase e la sua trasformata di Hilbert come componente in quadratura. In

forma compatta il segnale SSB si scrive

$$z(t) = A \underset{L}{s(t) \cos 2\pi f_0 t \mp A \hat{s}(t) \sin 2\pi f_0 t} \underset{U}{\quad} \quad (3.51)$$

Pertanto sia per l'SSB-U che per l'SSB-L il segnale modulante può essere recuperato mediante un demodulatore coerente. Infatti, come da figura 3.12 abbiamo

$$\begin{aligned} v(t) &= Ab s(t) \cos^2 2\pi f_0 t \mp Ab \hat{s}(t) \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t \\ &= \frac{Ab}{2} s(t) + \frac{Ab}{2} s(t) \cos 2\pi 2f_0 t \mp \frac{Ab}{2} \hat{s}(t) \sin 2\pi 2f_0 t. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Il filtro passa-basso ideale nella banda $[-B, B]$ rimuove le componenti a frequenza $2f_0$ restituendo in uscita un segnale proporzionale al segnale modulante

$$y(t) = \frac{Ab}{2} s(t). \quad (3.53)$$

Si noti come il termine eliminato dal passa-basso sia a sua volta un segnale SSB modulato a frequenza $2f_0$. Analogamente al caso DSB, la condizione di non sovrapposizione in $v(t)$ delle componenti in banda base e a frequenza doppia, è per l'SSB-U $2f_0 > B$, ovvero $f_0 > B/2$ e per l'SSB-L $2f_0 - B > B$, ovvero $f_0 > B$. Le condizioni sono in piuttosto lasche in quanto in genere $f_0 \gg B$.

3.5.1 Potenza e densità spettrale

Il calcolo della funzione di autocorrelazione per il segnale SSB si esegue in maniera usuale considerando la funzione di autocorrelazione tempo-ritardo.

$$\begin{aligned} R_z(t; \tau) &= E[z(t)z(t - \tau)] \\ &= E[(As(t) \cos 2\pi f_0 t \mp A\hat{s}(t) \sin 2\pi f_0 t) \\ &\quad (As(t - \tau) \cos 2\pi f_0(t - \tau) \mp A\hat{s}(t - \tau) \sin 2\pi f_0(t - \tau))] \\ &= \frac{A^2}{2} R_s(\tau) (\cos 2\pi f_0 \tau + \cos 2\pi f_0(2t - \tau)) \\ &\quad + \frac{A^2}{2} R_{\hat{s}}(\tau) (\cos 2\pi f_0 \tau - \cos 2\pi f_0(2t - \tau)) \\ &\quad \mp \frac{A^2}{2} R_{s\hat{s}}(\tau) (\sin 2\pi f_0 \tau + \sin 2\pi f_0(2t - \tau)) \\ &\quad \mp \frac{A^2}{2} R_{\hat{s}s}(\tau) (-\sin 2\pi f_0 \tau + \sin 2\pi f_0(2t - \tau)). \end{aligned}$$

Ricordando dal capitolo 2 che $R_s(\tau) = R_{\hat{s}}(\tau)$, e che $R_{\hat{s}s}(\tau) = \hat{R}_s(\tau) = -R_{s\hat{s}}(\tau)$, abbiamo che i termini dipendenti da t si cancellano ottenendo che il segnale SSB è stazionario in senso lato con autocorrelazione

$$R_z(\tau) = A^2 R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau \mp \frac{U}{L} A^2 \hat{R}_s(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau. \quad (3.54)$$

L'analisi è stata ripetuta qui per maggiore agilità didattica, ma il risultato era già stato anticipato alla fine del capitolo 2 dove abbiamo notato che il segnale SSB soddisfa le condizioni di bilanciamento (2.147). La potenza del segnale SSB è

$$P_z = R_z(0) = A^2 R_s(0) = A^2 P_s, \quad (3.55)$$

e lo spettro di potenza

$$\begin{aligned} P_z(f) &= \frac{A^2}{2} P_s(f - f_0) + \frac{A^2}{2} P_s(f + f_0) \\ &\quad \mp A^2 \left(\frac{\text{sgn}(f)}{j} P_s(f) * \frac{1}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \right) \\ &= \frac{A^2}{2} P_s(f - f_0) + \frac{A^2}{2} P_s(f + f_0) \\ &\quad \pm \frac{A^2}{2} (P_s(f - f_0) \text{sgn}(f - f_0) - P_s(f + f_0) \text{sgn}(f + f_0)) \\ &= \frac{A^2}{2} P_s(f - f_0) \begin{pmatrix} U \\ 1 \pm \text{sgn}(f - f_0) \\ L \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{A^2}{2} P_s(f + f_0) \begin{pmatrix} U \\ 1 \mp \text{sgn}(f + f_0) \\ L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta mostra come lo spettro di potenza del segnale SSB si ottenga (ovviamente) dallo spettro del segnale in banda base traslato a frequenza f_0 e emendato della banda inferiore o superiore. Si veda la figura 3.13 che descrive la modulazione in termini di trasformata di Fourier, ma che è del tutto analoga alla descrizione dello spettro di potenza.

3.5.2 Versione analitica

Il segnale analitico corrispondente al segnale SSB si scrive immediatamente come

$$\overset{\circ}{z}(t) = A \begin{pmatrix} U \\ s(t) \pm j\hat{s}(t) \\ L \end{pmatrix} e^{j2\pi f_0 t}. \quad (3.56)$$

L'involuppo complesso è

$$\tilde{z}(t) = s(t) \pm j\hat{s}(t). \quad (3.57)$$

Si noti che il segnale SSB, avendo sia un componente in fase che in quadratura è un segnale modulato anche in fase. Infatti scrivendo il segnale in termini di involuppo istantaneo e fase istantanea abbiamo

$$z(t) = \underbrace{\sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)}}_{I_z(t)} \cos \left(2\pi f_0 t \mp \underbrace{\operatorname{atan} \frac{\hat{s}(t)}{s(t)}}_{\theta_z(t)} \right). \quad (3.58)$$

E' interessante far vedere come utilizzando la teoria del segnale analitico si possa derivare facilmente l'espressione del segnale modulato con la trasformata di Hilbert in quadratura. La figura 3.14 mostra i passi che bisogna seguire per ottenere che l'involuppo complesso del segnale SSB-U è proprio il segnale analitico di $s(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$. Analogamente in figura 3.15 per il segnale SSB-L si vede l'involuppo complesso è $\overset{\circ}{s}^*(t) = s(t) - j\hat{s}(t)$. Si noti il taglio di mezzo spettro nel passaggio al segnale analitico, la modulazione (complessa) e l'estrazione della parte reale per tornare al segnale reale.

3.5.3 Efficienza spettrale dell'SSB

E' evidente che la modulazione SSB realizza la massima efficienza spettrale ($\eta_{SSB} = 1$) in quanto la banda impiegata dal segnale modulato e la frequenza massima del segnale modulato coincidono.

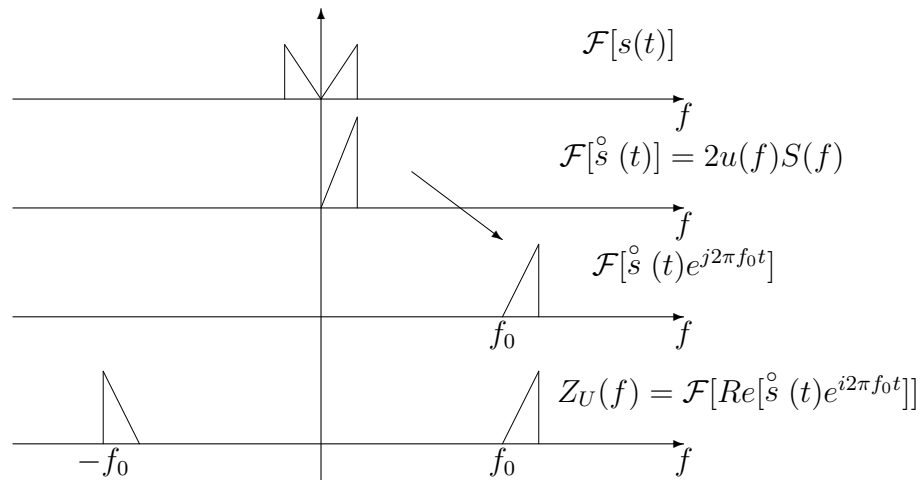


Figura 3.14: I passi per dimostrare che l'involuppo complesso del segnale SSB-U è $\tilde{z}_U(t) = \hat{s}^\circ(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$.

3.6 Modulazione a banda vestigiale (VSB)

L'efficienza spettrale massima della modulazione SSB suggerisce che essa debba sempre essere utilizzata nelle applicazioni in cui la disponibilità di banda è limitata. Sfortunatamente alcuni problemi sorgono nell'SSB, quando il segnale modulante ha componenti rilevanti alle basse frequenze. Si consideri lo schema di modulatore e demodulatore SSB di figura 3.12 e si guardi alla figura 3.16 che rappresenta schematicamente nel dominio della frequenza le conseguenze della non idealità del filtro SSB in uno schema SSB-U. In particolare la caratteristica di transizione del filtro passa-banda a destra della frequenza $f_0 + B$ non è critica, ma quella attorno attorno alla frequenza della portante, causa una distorsione alle basse frequenze all'uscita del demodulatore coerente. Tale distorsion può essere più o meno importante a seconda del tipo di segnale modulante. Ad esempio se si tratta di segnali vocali o audio, la distorsione è trascurabile in quanto tali segnali non hanno componenti al di sotto di 20-30 Hz. Nei sistemi telefonici la frequenza minima per i segnali vocali è addirittura 300 Hz. Viceversa in segnali che contengono sincronismi e valori lentamente variabili, come nel segnale televisivo analogico, le distorsioni alle basse frequenze non sono accettabili.

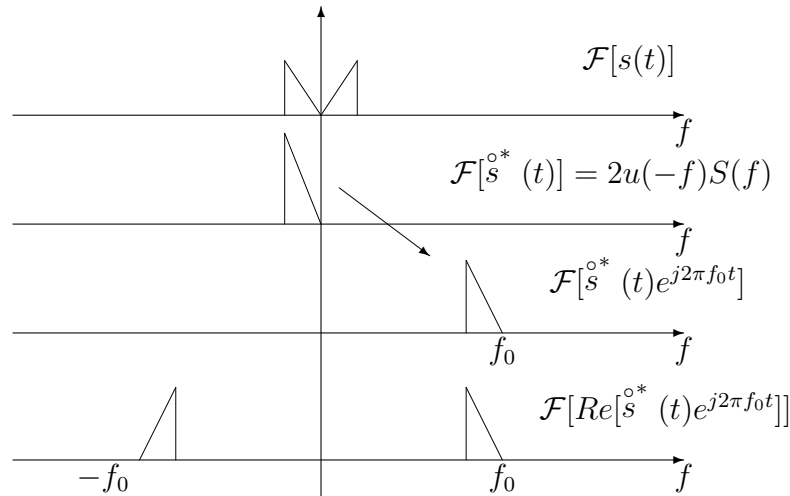


Figura 3.15: I passi per dimostrare che l'involuppo complesso del segnale SSB-L è $\tilde{z}_L(t) = \overset{\circ}{s}^*(t) = s(t) - j\hat{s}(t)$.

Per non rinunciare completamente all'efficienza spettrale dell'SSB, si adotta uno stratagemma che consiste nel trasmettere insieme ad una delle due bande laterali, anche una parte, o meglio delle *vestigia*, dell'altra banda, mediante un opportuno modellamento delle caratteristiche di transizione del filtro. Tale modulazione va sotto il nome di *Modulazione a Banda Vestigiale*, o VSB (*Vestigial Side Band*). In particolare, in analogia all'SSB, se si conserva principalmente la banda superiore si parla di VSB-U (Upper), viceversa si parla di VSB-L (Lower).

La figura 3.17 mostra lo schema di principio di modulatore e demodulatore VSB identico al modulatore SSB eccetto che per il filtro. L'obiettivo è ora quindi capire come debba essere progettato il filtro *vestigiale* $H_{VSB}(f)$ che deve: a) essere fisicamente realizzabile; b) introdurre una distorsione controllata attorno a f_0 tale da annullare la distorsione alle basse frequenze all'uscita del demodulatore coerente. E' intuitivo dalla figura 3.16 che tale caratteristica debba essere in qualche modo simmetrica attorno alla frequenza della portante affinché gli effetti della distorsione attorno a f_0 si compensino in banda base. Valutiamo la distorsione in uscita al sistema per un filtro

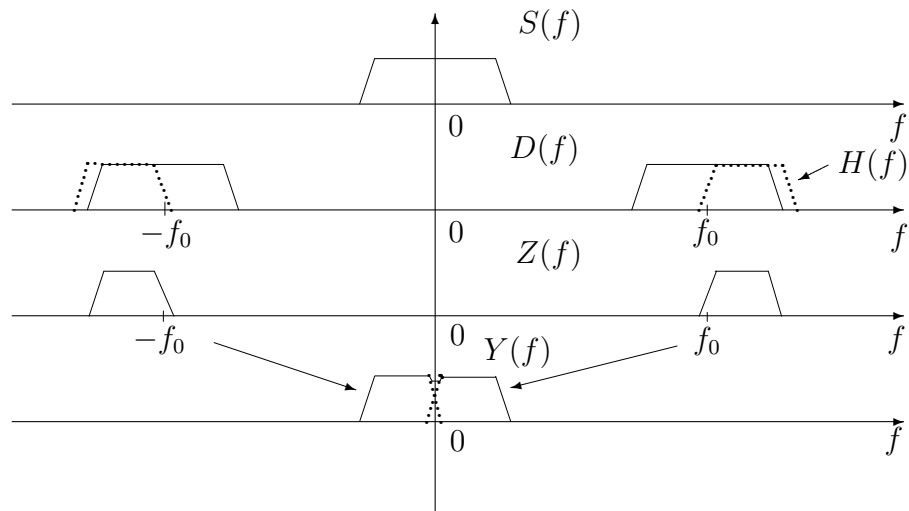


Figura 3.16: Le distorsioni alle basse frequenze create dalla non idealità del filtro SSB. Nella figura si è descritto un caso di SSB-U.

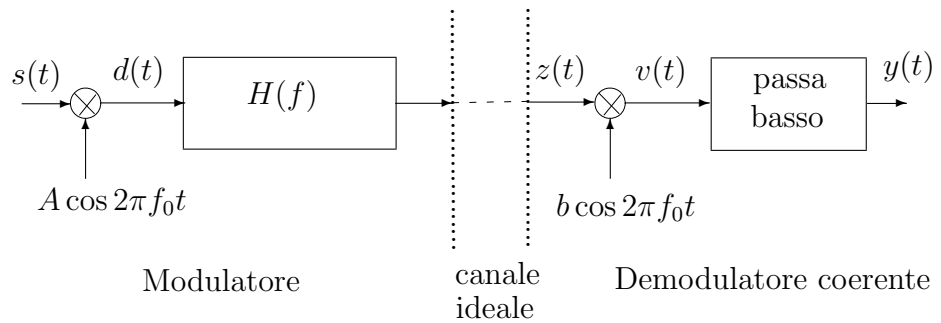


Figura 3.17: Modulatore e demodulatore con un filtro generico $H(f)$

generico $H(f)$. Nel dominio della frequenza il segnale modulato si scrive

$$Z(f) = \frac{A}{2} H(f) [S(f - f_0) + S(f + f_0)]. \quad (3.59)$$

All'uscita del moltiplicatore abbiamo

$$\begin{aligned} V(f) &= \mathcal{F}[z(t)b \cos 2\pi f_0 t] \\ &= \frac{Ab}{2} H(f) [S(f - f_0) + S(f + f_0)] * \frac{b}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{Ab}{4} H(f - f_0) [S(f - 2f_0) + S(f)] \\ &\quad + \frac{Ab}{4} H(f + f_0) [S(f) + S(f + 2f_0)] \\ &= \frac{Ab}{4} S(f) [H(f - f_0) + H(f + f_0)] \\ &\quad + \frac{Ab}{4} H(f - f_0) S(f - 2f_0) + \frac{Ab}{4} H(f + f_0) S(f + 2f_0). \end{aligned}$$

Al'uscita del filtro passa-basso restano solo i termini

$$Y(f) = \frac{Ab}{4} S(f) [H(f - f_0) + H(f + f_0)]. \quad (3.60)$$

Quindi se la banda di interesse di $s(t)$ è $[-B, B]$, la condizione affinché il segnale in uscita al demodulatore non sia distorto, ovvero $y(t) = ks(t - t_0)$, per una qualche costante k e ritardo t_0 , è che il filtro $H(f)$ soddisfi la condizione VSB

$$[H_{VSB}(f - f_0) + H_{VSB}(f + f_0)] = 2H_{VSB}(f_0) e^{-j2\pi f t_0} \quad \forall f \in [-B, B], \quad (3.61)$$

dove $H_{VSB}(f_0)$ è una costante pari al valore della risposta in f_0 . La costante 2 viene introdotta solo per ottenere una notazione più compatta. La figura 3.18 mostra schematicamente la condizione sul filtro nel caso VSB-U. Si noti il comportamento speculare attorno alla frequenza f_0 affinché l'effetto si annulli dopo la traslazione in bassa frequenza. La caratteristica del filtro alla frequenza $f_0 + B$ è facilmente gestibile ed è tralasciata perché marginale ai fini di questa discussione. La condizione vale anche per il per il filtro VSB-L in cui le bande si ricompongono in banda base in modo speculare. Si richiama l'attenzione del lettore sul fatto che la condizione VSB é una condizione sulla la risposta armonica complessa, ovvero in ampiezza e in fase. In particolare però il controllo sulla distorsione può essere limitato alla

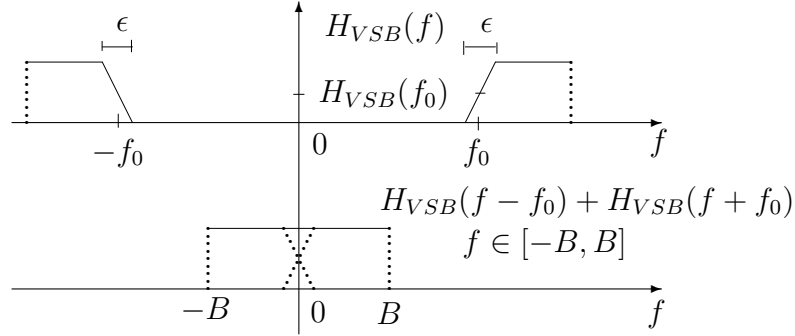


Figura 3.18: La caratteristica emisimmetrica del filtro VSB

distorsione di ampiezza, o includere anche la distorsione di fase, a seconda del contesto applicativo.

La rappresentazione passa-banda del segnale modulato secondo lo schema di figura 3.17 è facilmente ottenibile.

$$\begin{aligned}
 z(t) &= h(t) * As(t) \cos 2\pi f_0 t = A \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) s(t - \eta) \cos 2\pi f_0 (t - \eta) d\eta \\
 &= A \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) s(t - \eta) \cos 2\pi f_0 \eta d\eta \cos 2\pi f_0 t \\
 &\quad + A \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) s(t - \eta) \sin 2\pi f_0 \eta d\eta \sin 2\pi f_0 t,
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione

$$\cos 2\pi f_0 (t - \eta) = \cos 2\pi f_0 \eta \cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi f_0 \eta \sin 2\pi f_0 t. \quad (3.62)$$

La rappresentazione passa-banda di $z(t)$ è

$$z(t) = z_c(t) \cos 2\pi f_0 t + z_s(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (3.63)$$

quindi uguagliando termine a termine abbiamo

$$\begin{aligned}
 z_c(t) &= A \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \cos 2\pi f_0 \eta s(t - \eta) d\eta, \\
 z_s(t) &= A \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \sin 2\pi f_0 \eta s(t - \eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} z_c(t) &= A\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{H(f-f_0) + H(f+f_0)}{2} S(f) \right]; \\ z_s(t) &= A\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{H(f-f_0) - H(f+f_0)}{2j} S(f) \right]. \end{aligned}$$

Se la condizione VSB è soddisfatta, prendiamo $t_0 = 0$ e $H_{VSB}(f_0) = 1$ per compattezza di notazione (notiamo che le costanti possono facilmente essere assorbite dalla costante A e che un ritardo globale arbitrario è irrilevante ai fini del funzionamento del sistema), abbiamo che il segnale VSB ha la componente in fase proporzionale al segnale modulante

$$z_c(t) = As(t). \quad (3.64)$$

Ora per ottenere una rappresentazione simile a quella ottenuta per l'SSB, con riferimento al filtro $H_{VSB-U}(f)$ di figura 3.19, definiamo

$$h_v(t) = \mathcal{F}^{-1} [H_v(f)]; \quad H_v(f) = -\frac{H_{VSB-U}(f-f_0) - H_{VSB-U}(f+f_0)}{2j}, \quad (3.65)$$

$$\check{s}(t) = (h_v * s) = \mathcal{F}^{-1} [H_v(f)S(f)]. \quad (3.66)$$

Pertanto la componente in quadratura del segnale VSB-U è

$$z_s(t) = -A\check{s}(t). \quad (3.67)$$

Il segnale VSB-U si può scrivere nella rappresentazione di Rice come

$$z(t) = As(t) \cos 2\pi f_0 t - A\check{s}(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (3.68)$$

Notiamo la similarità con il segnale SSB-U. Con l'aiuto di figura 3.19 vediamo come al tendere a zero della larghezza ϵ della banda di transizione del filtro, $-A\check{s}(t)$ tende a $-A\hat{s}(t)$ (SSB-U) poiché

$$-(H_{VSB-U}(f-f_0) - H_{VSB-U}(f+f_0)) \rightarrow 2\text{sgn}(f), \quad (3.69)$$

$$H_v(f) \rightarrow \frac{\text{sgn}(f)}{j} = H_H(f) \quad \forall f \in [-B, B]. \quad (3.70)$$

Analogamente per la VSB-L notiamo dalla figura 3.19 che

$$H_v(f) = \frac{H_{VSB-L}(f-f_0) - H_{VSB-L}(f+f_0)}{2j}, \quad z_s(t) = A\check{s}(t). \quad (3.71)$$

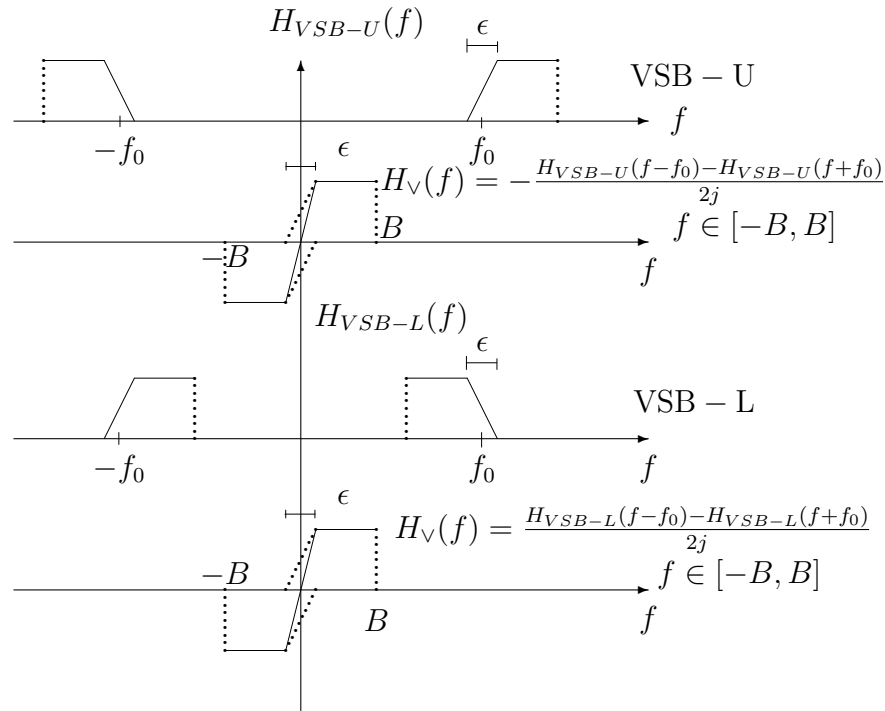


Figura 3.19: La costruzione della componente in quadratura del segnale VSB

Inoltre per $\epsilon \rightarrow 0$

$$H_{VSB-L}(f - f_0) - H_{VSB-L}(f + f_0) \rightarrow 2\text{sgn}(f), \quad (3.72)$$

e quindi $A\check{s}(t) \rightarrow A\hat{s}(t)$ (SSB-L).

In forma sintetica il segnale VSB si scrive

$$z(t) = A \underset{L}{s}(t) \cos 2\pi f_0 t \mp A \underset{U}{\check{s}}(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (3.73)$$

3.6.1 Potenza e densità spettrale

Il segnale VSB in generale non soddisfa le condizioni di bilanciamento ed è ciclostazionario. La autocorrelazione tempo-ritardo mediata su un periodo,

come descritto nel capitolo 2, da equazione (2.145) con $z_c(t) = As(t)$ e

$$z_s(t) = \mp \frac{U}{L} A\check{s}(t), \text{ è}$$

$$\bar{R}_z(\tau) = \frac{A^2}{2} \left[(R_s(\tau) + R_{\check{s}}(\tau)) \cos 2\pi f_0 \tau \pm \frac{U}{L} (R_{s\check{s}}(\tau) - R_{\check{s}s}(\tau)) \sin 2\pi f_0 \tau \right]. \quad (3.74)$$

La potenza (media) del segnale è pertanto

$$\bar{P}_z = \bar{R}_z(0) = \frac{A^2}{2} (R_s(0) + R_{\check{s}}(0)) = \frac{A^2}{2} (P_s + P_{\check{s}}). \quad (3.75)$$

Lo spettro di potenza di $\check{s}(t)$ è

$$P_{\check{s}}(f) = |H_v(f)|^2 P_s(f), \quad (3.76)$$

e la potenza

$$P_{\check{s}} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\check{s}}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H_v(f)|^2 P_s(f) df. \quad (3.77)$$

Restano da valutare la mutua correlazione $R_{s\check{s}}(\tau)$ e lo spettro mutuo $P_{s\check{s}}(f)$. Dalle relazioni notevoli della teoria dei segnali

$$R_{\check{s}s}(\tau) = (h_v * R_s)(\tau) = R_{s\check{s}}(-\tau), \quad (3.78)$$

$$P_{\check{s}s}(f) = H_v(f) P_s(f) = P_{s\check{s}}(-f). \quad (3.79)$$

3.6.2 Efficienza spettrale

La modulazione VSB realizza una buona efficienza spettrale mediante un compromesso tra la conservazione di una sola delle bande laterali (SSB) e la salvaguardia della distorsione alle basse frequenze. La banda occupata dal segnale VSB è $B + \frac{\epsilon}{2}$, pertanto l'efficienza è

$$\eta_{sVSB} = \frac{B}{B + \frac{\epsilon}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2B}}. \quad (3.80)$$

3.6.3 Versione analitica

La scrittura del segnale VSB in termini di componenti in fase e in quadratura, consente di scrivere immediatamente l'espressione del segnale analitico e dell'involuppo complesso

$$\tilde{z}(t) = A \begin{pmatrix} U \\ s(t) \pm j\check{s}(t) \\ L \end{pmatrix} e^{j2\pi f_0 t}, \quad (3.81)$$

$$\tilde{z}(t) = s(t) \pm j\check{s}(t). \quad (3.82)$$

Si noti che anche il segnale VSB, avendo sia una componente in fase che una in quadratura, è un segnale modulato sia in involuppo che in fase.

3.7 Modulazione QAM

L'efficienza della modulazione SSB consente la creazione di multiplex di frequenza assegnando ad ogni segnale solo una larghezza di banda pari a quella del segnale modulante. Pertanto, a differenza della DSB, o dell'AM, nella banda $[f_0 - B, f_0 + B]$ con l'SSB, è possibile allocare due segnali invece che uno solo.

Un metodo alternativo per "caricare" la banda $[f_0 - B, f_0 + B]$ con due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ è modulare la portante sia in fase che in quadratura. Tale modulazione è detta *Modulazione di Ampiezza in Quadratura*, o *QAM* (*Quadrature Amplitude Modulation*). Il segnale modulato assume la forma

$$z(t) = As_1(t) \cos 2\pi f_0 t + As_2(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (3.83)$$

Nel dominio della frequenza abbiamo

$$Z(f) = \frac{A}{2}S_1(f - f_0) + \frac{A}{2}S_1(f + f_0) + \frac{A}{2j}S_2(f - f_0) - \frac{A}{2j}S_2(f + f_0). \quad (3.84)$$

Quindi se entrambi i segnali modulanti sono di tipo passa-basso con frequenza massima pari a B , la banda $[f_0 - B, f_0 + B]$ sarà occupata da

$$\frac{A}{2} \left(S_1(f - f_0) + \frac{1}{j}S_2(f - f_0) \right), \quad (3.85)$$

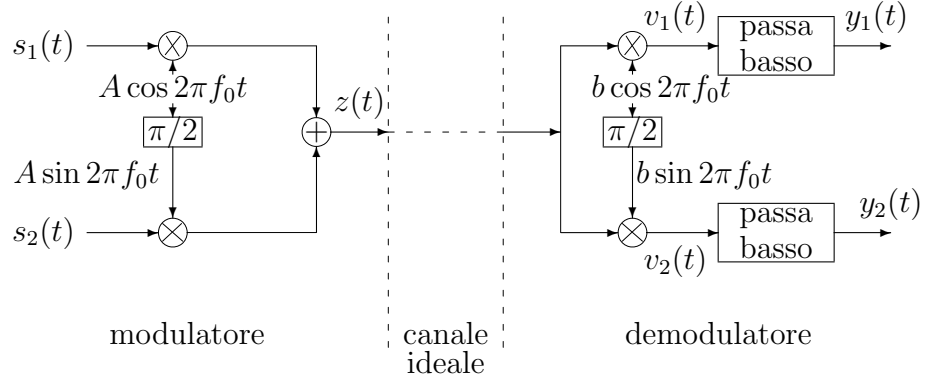


Figura 3.20: Modulatore e demodulatore QAM

e la banda $[-f_0 - B, -f_0 + B]$ da

$$\frac{A}{2} \left(S_1(f + f_0) - \frac{1}{j} S_2(f + f_0) \right). \quad (3.86)$$

La banda totale resta quindi $2B$, ma senza simmetria. La figura 3.20 mostra lo schema tipico di modulatore e demodulatore QAM. Il demodulatore coerente recupera i segnali modulanti “riproiettandoli” rispettivamente sul seno e sul coseno. Assumendo come in figura che l’oscillatore al demodulatore abbia esattamente la stessa frequenza e fase della portante, abbiamo

$$\begin{aligned} v_1(t) &= Abs_1(t) \cos^2 2\pi f_0 t + Abs_2(t) \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t \\ v_2(t) &= Abs_1(t) \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t + Abs_2(t) \sin^2 2\pi f_0 t, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) + \frac{Ab}{2} s_1(t) \cos 2\pi 2f_0 t + \frac{Ab}{2} s_2(t) \sin 2\pi 2f_0 t \\ v_2(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) \sin 2\pi 2f_0 t + \frac{Ab}{2} s_2(t) - \frac{Ab}{2} s_2(t) \cos 2\pi 2f_0 t. \end{aligned}$$

I filtri passa-basso ideali con frequenza massima pari a B eliminano i termini a frequenza doppia restituendo correttamente in uscita

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t), \\ y_2(t) &= \frac{Ab}{2} s_2(t), \end{aligned}$$

dei segnali proporzionali ai segnali modulanti.

E' da enfatizzare che il corretto funzionamento del demodulatore QAM è strettamente legato al sincronismo dell'oscillatore locale. In particolare, se la fase non fosse agganciata alla portante i segnali in uscita non sarebbero correttamente separati. Per vederci più chiaro, studiamo le uscite di un demodulatore QAM che utilizza i segnali $b \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ e $b \sin(2\pi f_0 t + \theta)$. Alle uscite dei moltiplicatori abbiamo

$$\begin{aligned} v_1(t) &= Ab s_1(t) \cos 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0 t + \theta) \\ &\quad + Ab s_2(t) \sin 2\pi f_0 t \cos(2\pi f_0 t + \theta) \\ v_2(t) &= Ab s_1(t) \cos 2\pi f_0 t \sin(2\pi f_0 t + \theta) \\ &\quad + Ab s_2(t) \sin 2\pi f_0 t \sin(2\pi f_0 t + \theta). \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) \cos \theta + \frac{Ab}{2} s_1(t) \cos(2\pi 2f_0 t + \theta) \\ &\quad - \frac{Ab}{2} s_2(t) \sin \theta + \frac{Ab}{2} s_2(t) \sin(2\pi 2f_0 t + \theta), \\ v_2(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) \sin \theta + \frac{Ab}{2} s_1(t) \sin(2\pi 2f_0 t + \theta) \\ &\quad + \frac{Ab}{2} s_2(t) \cos \theta - \frac{Ab}{2} s_2(t) \cos(2\pi 2f_0 t + \theta). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Dopo i filtri passa-basso abbiamo in uscita

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) \cos \theta - \frac{Ab}{2} s_2(t) \sin \theta, \\ y_2(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) \sin \theta + \frac{Ab}{2} s_2(t) \cos \theta. \end{aligned}$$

Quindi i segnali modulanti risultano mescolati (interferenza co-canale). La separazione sarà tanto migliore quanto più piccolo è lo sfasamento ($\theta \rightarrow 0$, $\cos \theta \rightarrow 1$ e $\sin \theta \rightarrow 0$). Il sincronismo del demodulatore QAM è tipicamente ottenuto mediante un demodulatore controeazionato, o mediante l'estrazione di un tono pilota aggiunto dal trasmettitore al segnale modulato tipicamente ai margini della banda. Maggiori commenti sui metodi di sincronizzazione saranno discussi in seguito.

3.7.1 Potenza e densità spettrale

Il segnale QAM scritto nella forma passa-banda segue la formalizzazione già discussa nel capitolo 2. In particolare se $s_1(t)$ e $s_2(t)$ non soddisfano

alcun vincolo, il segnale è ciclostazionario e la autocorrelazione media è da equazione (2.145)

$$\overline{R}_z(\tau) = \frac{A^2}{2} [(R_{s_1}(\tau) + R_{s_2}(\tau)) \cos 2\pi f_0 \tau - (R_{s_1 s_2}(\tau) - R_{s_2 s_1}(\tau)) \sin 2\pi f_0 \tau]. \quad (3.89)$$

In genere però nelle applicazioni della modulazione QAM, i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ provengono da sorgente indipendenti e possono essere considerati incoerenti $R_{s_1 s_2}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$. In tale ipotesi la autocorrelazione media diventa

$$\overline{R}_z(\tau) = \frac{A^2}{2} (R_{s_1}(\tau) + R_{s_2}(\tau)) \cos 2\pi f_0 \tau, \quad (3.90)$$

e lo spettro medio di potenza

$$\overline{P}_z(f) = \frac{A^2}{4} (P_{s_1}(f - f_0) + P_{s_2}(f - f_0) + P_{s_1}(f + f_0) + P_{s_2}(f + f_0)). \quad (3.91)$$

La potenza media è quindi

$$\overline{P}_z = \frac{A^2}{2} (P_{s_1} + P_{s_2}). \quad (3.92)$$

Se i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono anche dello stesso tipo, ovvero hanno lo stesso spettro di potenza $P_s(f)$, e quindi la stessa funzione di autocorrelazione $R_s(\tau)$, il segnale $z(t)$ è SSL poiché le condizioni di bilanciamento sono banalmente soddisfatte

$$R_{s_1}(\tau) = R_{s_2}(\tau) = R_s(\tau); \quad R_{s_1 s_2}(\tau) = 0 = -R_{s_1 s_2}(-\tau), \quad (3.93)$$

e

$$R_z(\tau) = \overline{R}_z(\tau) = A^2 R_s(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (3.94)$$

In tal caso specifico, lo spettro di potenza ha la stessa forma dello spettro medio del segnale DSB

$$P_z(f) = \frac{A^2}{2} [P_s(f - f_0) + P_s(f + f_0)]. \quad (3.95)$$

3.7.2 Efficienza spettrale

Il segnale QAM realizza piena efficienza spettrale ($\eta_{sQAM} = 1$) in quanto, nel bilancio totale, due segnali in banda base di banda B vengono convogliati su un canale passa-banda con larghezza di banda pari a $2B$.

3.7.3 Versione analitica

La scrittura del segnale QAM in termini di componenti in fase e in quadratura, consente di scrivere immediatamente l'espressione di segnale analitico e inviluppo complesso

$$\tilde{z}(t) = A (s_1(t) - js_2(t)) e^{j2\pi f_0 t}, \quad (3.96)$$

$$\tilde{z}(t) = s_1(t) - js_2(t). \quad (3.97)$$

L'inviluppo complesso del segnale QAM descrive una traiettoria nel piano complesso che ha sia una componente reale che una immaginaria. Il demodulatore QAM coerente estrae pertanto le due componenti proiettandole sui due assi. Si noti che anche per il segnale QAM c'è una modulazione sia di inviluppo che di fase.

3.8 Omodina ed Eterodina

La maggior parte gli schemi di modulazione e demodulazione lineare presentati finora sono basati sul prodotto tra un segnale a banda limitata e un segnale sinusoidale. Ad esempio, nella modulazione DSB si moltiplica un segnale in banda base, quindi centrato attorno allo zero, per una senoide a frequenza f_0 per ottenere un segnale passa-banda attorno a f_0 . Analogamente, nel demodulatore coerente il prodotto tra un segnale passa-banda attorno a f_0 e una senoide alla stessa frequenza consente di "riportare" il segnale in banda base dopo un filtraggio passa-basso. Quindi l'operazione di prodotto può essere usata sia per "salire" che per "discendere" sull'asse delle frequenze. Più in generale, un segnale centrato alla frequenza f_1 moltiplicato per una senoide a frequenza f_2 può essere traslato a $f_1 - f_2$ o $f_1 + f_2$. A seconda della relazione d'ordine esistente tra f_1 e f_2 , si possono ottenere conversioni in salita o in discesa. L'operazione, mostrata in figura 3.21, va sotto il nome di *eterodina*. Se $f_1 = f_2$ si parla di *omodina*.

Dalle ben note proprietà della trasformata di Fourier, un segnale $x_1(t)$ a frequenza f_1 , a valle del prodotto con una senoide $\cos 2\pi f_2 t$ nel dominio della frequenza diventa

$$\frac{1}{2}X_1(f - f_2) + \frac{1}{2}X_1(f + f_2). \quad (3.98)$$

Tutti i contributi frequenziali in $x_1(t)$ si trovano traslati di una quantità pari a f_2 sia a sinistra che a destra. E' opportuno enfatizzare che se $x_1(t)$ è passa-banda, $X_1(f)$ è composto da due porzioni di spettro, quella a frequenze

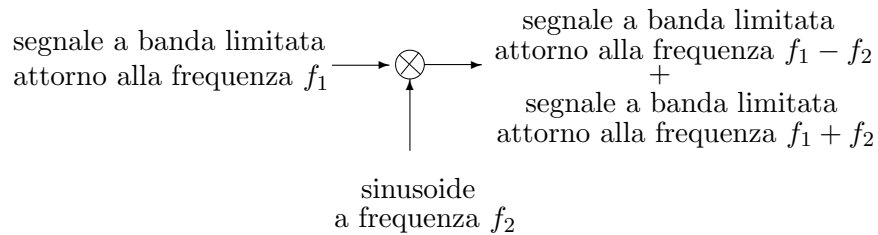


Figura 3.21: L'eterodina

positive e quella a frequenze negative. Pertanto dopo l'eterodina bisogna considerare quattro porzioni di spettro e valutare la loro posizione dopo la traslazione. L'eterodina può essere utilizzata per modulare, demodulare, e più in generale traslare i segnali sull'asse delle frequenze.

Nella terminologia classica della radiotecnica si dice che il segnale $x_1(t)$ lo si fa *battere* con la frequenza f_2 . La radice storica di questo termine viene dalle prime radio AM con sintonia manuale in cui la portante a frequenza f_1 , non ancora riportata a zero nella demodulazione durante la sintonia con una frequenza $f_2 = f_1 + \Delta$, si manifesta nell'audio come un segnale periodico alla *frequenza di battimento* $f_2 - f_1 = \Delta$, che scompare a sintonia raggiunta.

Nelle operazioni di eterodina, particolare attenzione va dedicata ai segnali passa-banda considerando con attenzione sempre tutto lo spettro, includendo anche le frequenze negative. L'emergenza di *bande immagine* deriva semplicemente dalle traslazioni sull'asse delle frequenze della coppia di porzioni dello spettro che possono anche oltrepassare lo zero. La figura 3.22 mostra due esempi in cui un segnale passa-banda non simmetrico attorno a f_1 , viene fatto battere con una frequenza f_2 . Si noti che per $f_2 < f_1 - B$ la traslazione crea due repliche a $f_1 + f_2$ e a $f_1 - f_2$ che non oltrepassano lo zero. Quando invece $f_2 > f_1 + B$, una delle due repliche oltrepassa l'origine e si trova a spettro invertito.

Varie combinazioni di f_1, f_2 e B sono utilizzate nei sistemi di modulazione per conversioni di frequenza, per inversione degli spettri (come ad esempio per trasformare un segnale da SSB-U a SSB-L), eccetera. Un popolare (non molto sicuro) sistema di criptazione del segnale televisivo analogico è basato sulla inversione dello spettro. Ulteriori esempi saranno presentati in seguito.

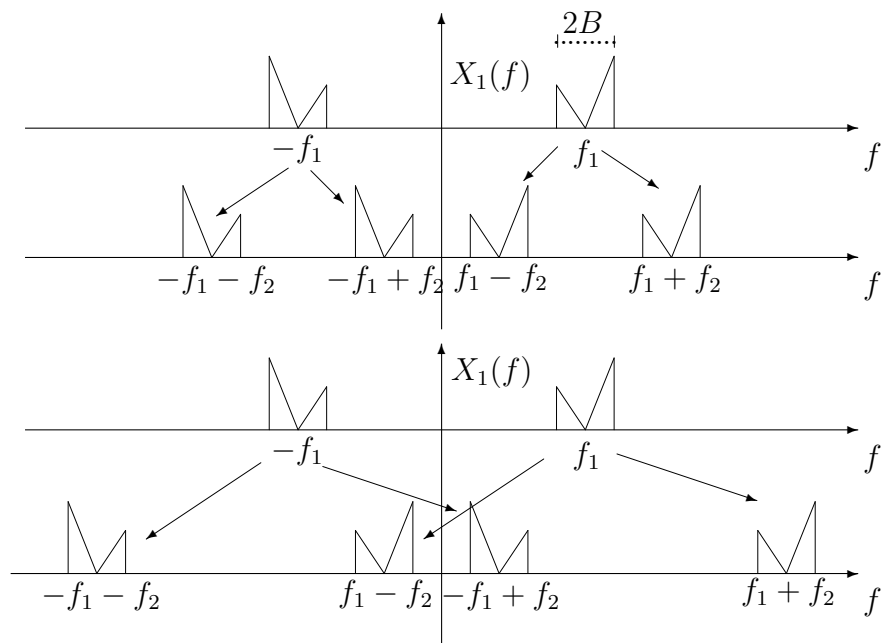


Figura 3.22: L'eterodina di segnale passa-banda con $f_2 < f_1 - B$ e con $f_2 > f_1 + B$

3.9 Problemi

Problema 3.1 Valutare l'effetto in uscita della deriva in frequenza di Δ Hz nell'oscillatore locale di un demodulatore coerente su un segnale DSB, quando il segnale modulante è costituito dalla sovrapposizione di due segnali sinusoidali $s_1(t) = A \cos 2\pi f_1 t$, $s_2(t) = \cos(2\pi f_2 t + \pi/5)$. La frequenza della portante sia 1 MHz e $f_1 = 10$ KHz, $f_2 = 17$ KHz, $\Delta = 2$ KHz. Si assuma sincronismo di fase perfetto.

Problema 3.2 Si ripeta il problema dell'esempio 3.2 assumendo che il segnale modulante sia distribuito in ampiezza secondo una pdf gaussiana e che abbia potenza P_s . Si valuti la probabilità che il segnale non soddisfa la condizione dell'involuppo e si schizzi un segmento distorto tipico dell'uscita del rivelatore di involuppo.

Problema 3.3 Sapendo che la trasformata di Hilbert dell'impulso rettangolare di ampiezza unitaria e di durata Δ è

$$\mathcal{HT} \left[\Pi \left(\frac{t}{\Delta} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t + \frac{\Delta}{2}}{t - \frac{\Delta}{2}} \right|, \quad (3.99)$$

schizzare il segnale modulato SSB-U nel dominio del tempo e della frequenza per il segnale modulante periodico

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{t - nT}{\Delta} \right), \quad \Delta = \frac{T}{3}. \quad (3.100)$$

Capitolo 4

Modulatori per la Modulazione Lineare

In questo capitolo vengono presentati alcuni degli schemi principali per realizzare modulatori lineari. L'enfasi resta rivolta agli aspetti metodologici della descrizione dei sistemi solo con brevi riferimenti a possibili realizzazioni circuitali. La discussione è limitata ai diagrammi a blocchi, con enfasi sulle caratteristiche funzionali e sulle loro implicazioni dal punto di vista analitico.

4.1 Introduzione

La tecnologia elettronica odierna è ricca di soluzioni che realizzano in maniera più o meno accurata le relazioni matematiche della modulazione. Le realizzazioni si basano su schemi circuitali che dipendono tipicamente dalle frequenze in gioco. A bassa frequenza è infatti abbastanza semplice realizzare moltiplicatori e filtri con buone precisioni. Alle alte frequenze invece, maggiori difficoltà sorgono a causa degli inevitabili effetti spuri degli accoppiamenti a microonde. Comunque la tecnologia elettronica si è molto evoluta dall'introduzione della *radiotecnica* e le soluzioni realizzative possono avvalersi oggi di circuiti integrati miniaturizzati a volte di costo bassissimo per operazioni che in passato erano ritenute molto complesse.

E' opportuno menzionare che grazie alla disponibilità di processori veloci, di convertitori A/D e D/A economici e precisi, si stanno sempre più diffondendo interessanti soluzioni basate su segnali campionati. Infatti, molte delle operazioni della modulazione analogica, definite mediante relazioni analitiche, possono essere implementate con notevole precisione con

processori numerici. Questa evoluzione tecnologica rivaluta certamente il ruolo della discussione analitica dei sistemi senza particolare riferimento a specifici schemi realizzativi.

4.2 Modulatori basati su moltiplicatori

L'operazione di prodotto che sta alla base di quasi tutti i sistemi di modulazione lineare può essere realizzata mediante dei circuiti integrati che la tecnologia elettronica attuale fornisce con ottime prestazioni, se le frequenze in gioco non sono troppo elevate. Alcune realizzazioni circuitali sono basate su amplificatori logaritmici, che sfruttando le proprietà del logaritmo $\log(\cdot)$ e dell'antilogaritmo $e^{(\cdot)}$, eseguono la moltiplicazione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ come

$$x(t) y(t) = e^{\log x(t) + \log y(t)}, \quad x(t), y(t) > 0 \quad (4.1)$$

L'operazione indicata, limitata a segnali entrambi positivi (*moltiplicatore a un quadrante*), può essere opportunamente organizzata nelle realizzazioni circuitali per ottenere anche moltiplicatori a *due* e *quattro quadranti*. In particolare l'operazione a due quadranti richiede che almeno uno dei due segnali sia sempre positivo (come nell'involuppo istantaneo dell'AM). Nella moltiplicazione a quattro quadranti non c'è invece alcun vincolo sul segno dei segnali da moltiplicare. Si incoraggia lo studente a consultare qualche catalogo di componenti elettronici per verificare la disponibilità di dispositivi di questo tipo.

4.3 Modulatori basati su non linearità

Le difficoltà (sempre relative) nella realizzazione dell'operazione di moltiplicazione, specialmente ad alta frequenza, impongono la ricerca di metodi alternativi indiretti come quello descritto nel diagramma a blocchi di figura 4.1.

Il modulatore utilizza un primo stadio in cui la somma di segnale e portante viene posta all'ingresso di una *Non Linearità Senza Memoria* (NLSM)¹ che realizza una sorta di "mescolamento" di $s(t)$ e $\alpha \cos 2\pi f_0 t$. Tra i vari prodotti di intermodulazione all'uscita del *mescolatore*, o *mixer*, il filtro passa-banda deve selezionare quello utile, ovvero quello che rappresenta

¹Una non linearità senza memoria è una funzione che opera una trasformazione istante per istante senza alcuna dispersione temporale.

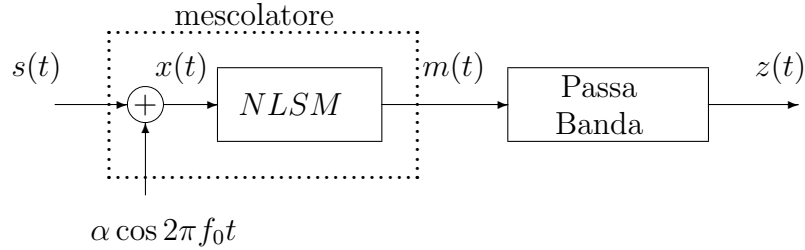


Figura 4.1: Il modulatore realizzato mediante una non linearità senza memoria

una quantità proporzionale al prodotto $s(t) \cos 2\pi f_0 t$. È evidente che è necessaria una attenta selezione della non linearità per ottenere un prodotto di intermodulazione che può essere isolato dagli altri termini, ovvero non contenga componenti residue.² Assumiamo che la non linearità $g(x)$ possa essere espressa come il polinomio

$$g(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n. \quad (4.2)$$

Il polinomio è tipicamente la funzione approssimante del comportamento di un dispositivo elettronico (diodo, transistor, FET, ecc.). L'uscita della NLSM è il segnale

$$m(t) = \sum_{n=0}^N a_n (s(t) + \alpha \cos 2\pi f_0 t)^n. \quad (4.3)$$

Più esplicitamente, utilizzando la formula di Newton, abbiamo

$$m(t) = \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_n \alpha^{n-i} s^i(t) \cos^{n-i} 2\pi f_0 t. \quad (4.4)$$

A seconda della non linearità, ovvero dell'ordine N e dei coefficienti a_0, a_1, \dots, a_N , i vari termini sono più o meno “pesanti” nella sommatoria ed è più o meno facile selezionare quello che ci interessa.

²Non linearità senza memoria vengono anche utilizzate per altre applicazioni, ad esempio nei moltiplicatori di frequenza, dove interessano i prodotti di ordine più elevato.

Per fissare meglio le idee sul funzionamento del sistema, analizziamo il caso in cui la NLSM sia descritta da un polinomio di ordine due. L'uscita della non linearità è

$$\begin{aligned} m(t) &= a_0 + a_1 (s(t) + \alpha \cos 2\pi f_0 t) + a_2 (s(t) + \alpha \cos 2\pi f_0 t)^2 \\ &= a_0 + a_1 s(t) + a_1 \alpha \cos 2\pi f_0 t \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$+ a_2 s^2(t) + a_2 \alpha^2 \cos^2 2\pi f_0 t + 2a_2 \alpha s(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (4.6)$$

che nel dominio della frequenza è

$$\begin{aligned} M(f) &= a_0 \delta(f) + a_1 S(f) + \frac{a_1 \alpha}{2} \delta(f - f_0) + \frac{a_1 \alpha}{2} \delta(f + f_0) \\ &+ a_2 (S * S)(f) + \frac{a_2 \alpha^2}{2} \delta(f) + \frac{a_2 \alpha^2}{4} \delta(f - 2f_0) + \frac{a_2 \alpha^2}{4} \delta(f + 2f_0) \\ &+ a_2 \alpha S(f - f_0) + a_2 \alpha S(f + f_0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

La figura 4.2 mostra i termini della sommatoria sull'asse delle frequenze. Notiamo la presenza di una componente continua, una componente sinusoidale a frequenza f_0 e una a $2f_0$. C'è anche una componente in banda base avente frequenza massima pari a $2B$ corrispondente al termine $s^2(t)$, ovvero alla convoluzione $(S * S)(f)$. Il termine utile è il segnale modulato a doppia banda laterale attorno a f_0 . Guardando la figura, affinché non ci sia sovrapposizione tra il termine utile e la frequenza massima delle componenti in banda base, è necessario che $f_0 - B > 2B$, ovvero $f_0 > 3B$. In tali condizioni, un filtro passa-banda su $[f_0 - B, f_0 + B]$ restituisce

$$z(t) = a_1 \alpha \cos 2\pi f_0 t + 2a_2 \alpha s(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (4.8)$$

ovvero una componente proporzionale al segnale modulato DSB più una componente sinusoidale a frequenza f_0 .

Lo schema di figura 4.1 realizza una modulazione DSB senza portante, se il termine sinusoidale residuo a f_0 non c'è, ovvero se la non linearità è tale che $a_1 = 0$ (vedremo in seguito come con uno schema bilanciato anche se $a_1 \neq 0$ sia possibile ottenere un segnale DSB senza la sinusoide residua).

Riscrivendo l'uscita del filtro passa-banda come

$$z(t) = a_1 \alpha \left(1 + 2 \frac{a_2}{a_1} s(t)\right) \cos 2\pi f_0 t, \quad (4.9)$$

riconosciamo che lo schema di figura 4.1 funziona come modulatore AM se regoliamo opportunamente l'ampiezza di $s(t)$ per soddisfare la condizione dell'involuppo

$$2 \left| \frac{a_2}{a_1} \right| |s(t)| < 1. \quad (4.10)$$

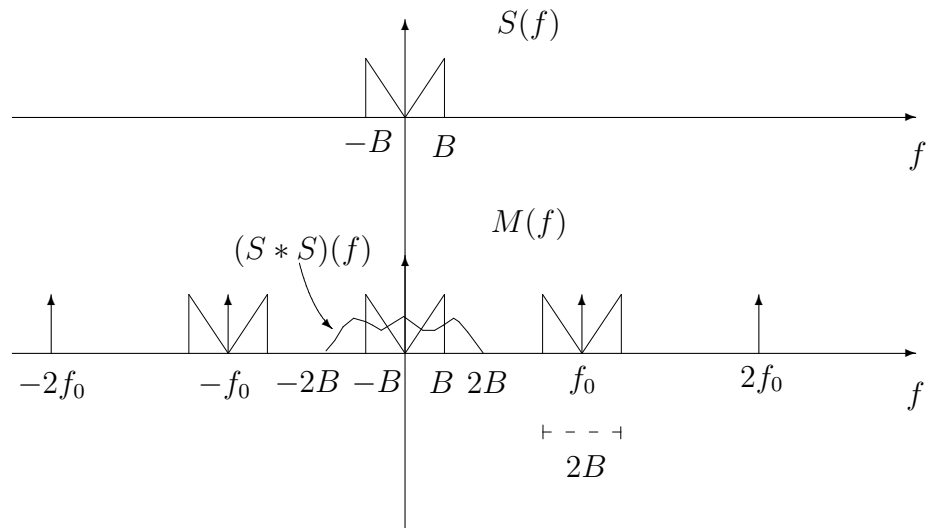


Figura 4.2: L'effetto della non linearità di ordine due nel dominio della frequenza (i vari termini non sono disegnati in scala).

Nel progettare circuiti reali è necessario tenere anche conto attentamente dei domini di variazione dei segnali in gioco in cui vale l'approssimazione polinomiale. L'analisi degli effetti di una non linearità di ordine $N = 3$ è suggerito negli esercizi.

4.4 Modulatori a interruzione

Segnali DSB possono anche essere generati mediante i cosiddetti *modulatori a interruzione*, o *a chopper*. La figura 4.3 mostra lo schema a blocchi di un modulatore a interruzione a semplice semiciclo. Il segnale periodico (non serve che sia esattamente sinusoidale) di frequenza f_0 interrompe il passaggio del segnale durante metà periodo durante il quale restituisce il valore zero.

La figura 4.4 mostra l'operazione nel dominio del tempo. L'interruzione periodica è equivalente al prodotto con un segnale rettangolare periodico, ovvero

$$c(t) = s(t) p(t), \quad (4.11)$$

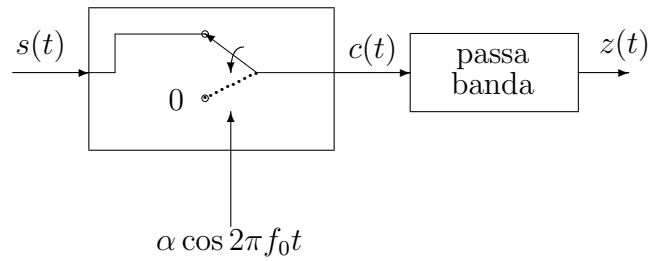


Figura 4.3: Il modulatore a chopper a semplice semiciclo

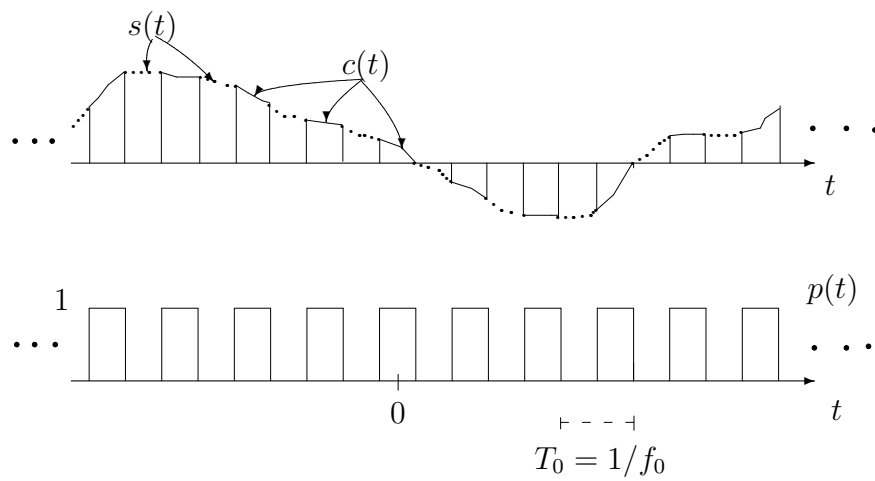


Figura 4.4: L'operazione di modulazione a chopper a semplice semiciclo nel dominio del tempo

dove

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{T_0/2}\right). \quad (4.12)$$

Nel dominio della frequenza

$$\begin{aligned} C(f) &= (S * P)(f) = S(f) * \left[\frac{T_0}{2} \operatorname{sinc} \frac{T_0}{2} f \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \right] \\ &= S(f) * \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} \delta(f - nf_0) \\ &= \frac{1}{2} \left[S(f) + \sum_{n \text{ dispari}} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} S(f - nf_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La figura 4.5 mostra schematicamente l'uscita del chopper nel dominio della frequenza. Si noti l'assenza delle componenti di ordine pari, la presenza di una componente attorno allo zero e le repliche attenuate ai multipli dispari di f_0 . Si osservi inoltre che la figura non è in scala poiché le repliche sono molto più attenuate rispetto a quelle mostrate. Le repliche a $\pm 3f_0, \pm 7f_0, \dots$ sono disegnate invertite per ricordare il segno della funzione sinc che determina l'ampiezza delle armoniche di $p(t)$. Se la replica utile centrata su f_0 non è sovrapposta a quella in banda base, ovvero se $f_0 - B > B$, o $f_0 > 2B$, un filtro passa-banda sulle frequenze $[f_0 - B, f_0 + B]$ fornisce in uscita il segnale DSB

$$Z(f) = \frac{1}{\pi} [S(f - f_0) + S(f + f_0)], \quad (4.14)$$

o nel dominio del tempo

$$z(t) = \frac{2}{\pi} s(t) \cos 2\pi f_0 t. \quad (4.15)$$

Il modulatore a chopper può anche essere realizzato a doppio semiciclo. La figura 4.6 mostra lo schema funzionale del sistema. Il chopper in mezzo ciclo trasferisce il segnale all'uscita, mentre nell'altro lo restituisce col segno cambiato. La figura 4.7 mostra il funzionamento del chopper su un segmento di segnale nel dominio del tempo. Il trasferimento e l'inversione periodica sono equivalenti al prodotto con il segnale rettangolare periodico rappresentato in figura 4.7, ovvero

$$d(t) = s(t) r(t), \quad (4.16)$$

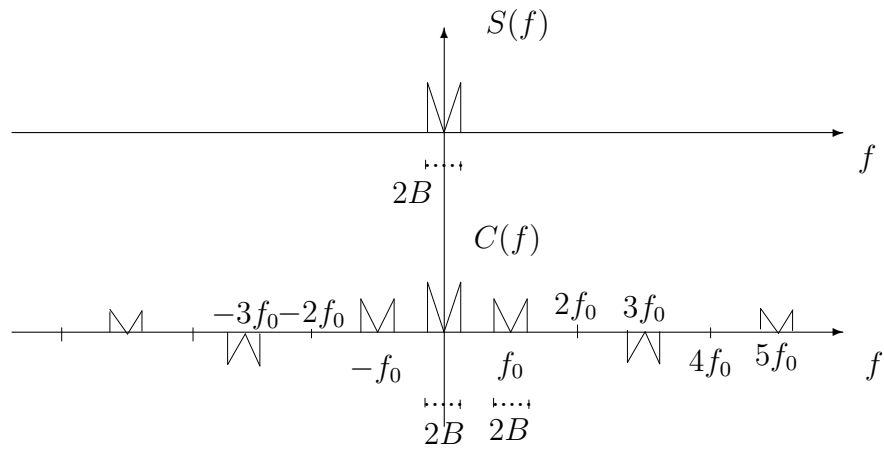


Figura 4.5: L'uscita del chopper a semplice semiciclo nel dominio della frequenza

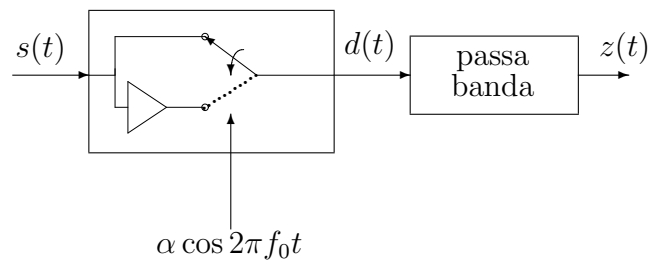


Figura 4.6: Il modulatore a chopper a doppio semiciclo

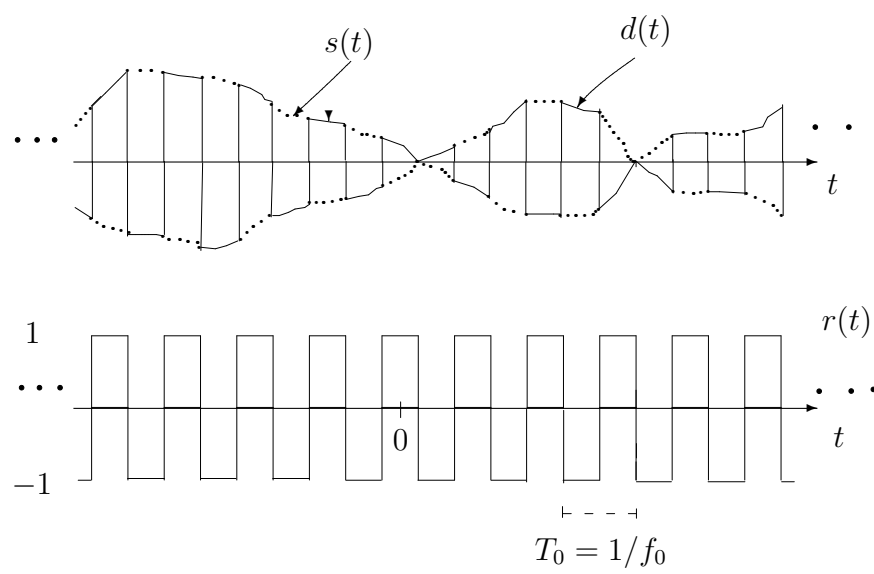


Figura 4.7: Il chopper a doppio semiciclo nel dominio del tempo

dove

$$r(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{T_0/2}\right) - 1 = 2p(t) - 1. \quad (4.17)$$

Il segnale periodico rettangolare $r(t)$ ha componente continua nulla ed è scritto in funzione del segnale $p(t)$ precedentemente introdotto. Il segnale all'uscita del chopper a doppio semiciclo nel dominio della frequenza si scrive

$$D(f) = (S * R)(f), \quad (4.18)$$

che usando il risultato già ottenuto per il caso a semplice semiciclo (4.13), ci fornisce

$$\begin{aligned} D(f) &= S(f) * (2P(f) - \delta(f)) = 2(P * S)(f) - S(f) \\ &= \sum_{n \text{ dispari}} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} S(f - nf_0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

La figura 4.8 rappresenta il segnale all'uscita del chopper nel dominio della frequenza. L'unica differenza con il chopper a semplice semiciclo è l'assenza della componente attorno allo zero. Questo implica che la condizione per il recupero del segnale modulato DSB sia semplicemente $f_0 - B > 0$, ovvero $f_0 > B$. Un filtro passa-banda ideale sull'intervallo $[f_0 - B, f_0 + B]$ restituisce il segnale DSB

$$Z(f) = \frac{2}{\pi} [S(f - f_0) + S(f + f_0)], \quad (4.20)$$

che nel dominio del tempo si scrive

$$z(t) = \frac{1}{\pi} s(t) \cos 2\pi f_0 t. \quad (4.21)$$

Modulatori a chopper sono realizzati con diodi, fotodiodi, FET, ecc. Nei sistemi più antichi essi venivano addirittura realizzati con interruttori meccanici con ovvi limiti di frequenza. La discussione sulle tante modalità di realizzazione circuitale di modulatori a chopper è decisamente al di là degli scopi di queste note. Rimandiamo pertanto il lettore ai testi di elettronica, ai riferimenti bibliografici, o a qualche catalogo aggiornato di componenti.

4.5 Modulatore bilanciato

Strutture bilanciate vengono spesso realizzate nei sistemi reali allo scopo di compensare, o cancellare, eventuali effetti indesiderati. Un tipico modulatore bilanciato è basato sulla struttura simmetrica mostrata in figura 4.9 dove i due rami comprendono due non linearità senza memoria identiche.

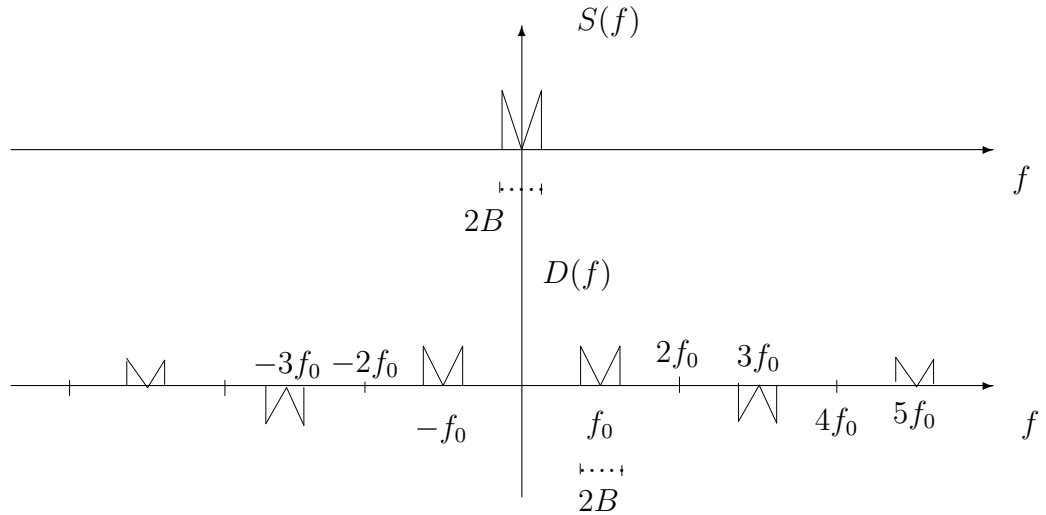


Figura 4.8: L'uscita del chopper a doppio semiciclo nel dominio della frequenza

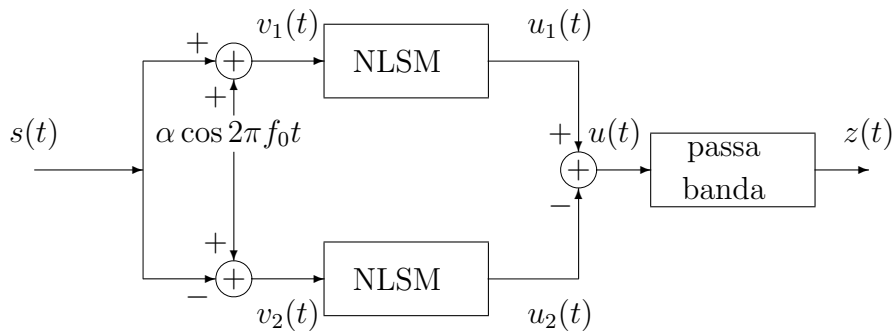


Figura 4.9: Un modulatore bilanciato basato su NLSM

L'idea chiave è ottenere una migliore precisione dell'operazione di modulazione mediante la cancellazione di qualche effetto spurio che si presenta in maniera identica sia nel primo che nel secondo ramo. Per meglio spiegare l'idea, che realizza una modulazione quasi ideale, analizziamo il caso in cui la non linearità sui due rami sia una funzione quadratica tale che

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t), \\ u_2(t) &= a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Le uscite delle non linearità sono rispettivamente

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_1(\alpha \cos 2\pi f_0 t + s(t)) + a_2(\alpha \cos 2\pi f_0 t + s(t))^2 \\ u_2(t) &= a_1(\alpha \cos 2\pi f_0 t - s(t)) + a_2(\alpha \cos 2\pi f_0 t - s(t))^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Eseguendo i quadrati, e sottraendo termine a termine, abbiamo che in uscita il segnale è

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) = 2a_1 s(t) + 4a_2 \alpha s(t) \cos 2\pi f_0 t. \quad (4.24)$$

Il termine DSB utile può essere facilmente selezionato dal filtro passa-banda sull'intervallo di frequenze $[f_0 - B, f_0 + B]$. Serve solo imporre una debole condizione di non sovrapposizione tra i due termini, ovvero che $f_0 - B > B$, o che $f_0 > 2B$.

Si noti che il modulatore bilanciato realizza un quasi perfetto prodotto tra il segnale $s(t)$ e la portante $\alpha \cos 2\pi f_0 t$. Lo schema può pertanto essere utilizzato anche come demodulatore coerente se all'ingresso poniamo il segnale modulato e all'uscita un filtro passa-basso. Tale applicazione è suggerita negli esercizi.

4.6 Modulatori SSB

4.6.1 Modulatori a più stadi

Per generare dei segnali modulati SSB lo schema principale di riferimento è stato già discusso nel capitolo precedente ed è mostrato in figura 3.12. Si tratta di un modulatore DSB seguito da un filtro che isola la banda di interesse, superiore o inferiore (Upper or Lower). Purtroppo quando il segnale modulante possiede delle componenti rilevanti alle basse frequenze, le caratteristiche del filtro SSB possono diventare critiche in quanto le distorsioni introdotte nella rimozione di una delle bande laterali si ripercuotono

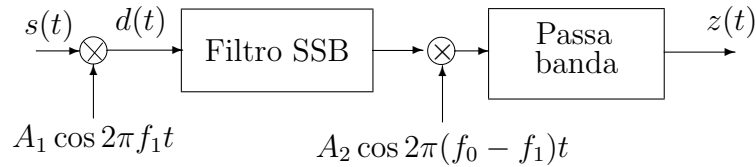


Figura 4.10: Un modulatore SSB realizzato mediante due stadi.

in una distorsione alle basse frequenze nel segnale recuperato a valle del demodulatore coerente. Tale problema è stato già discusso quando abbiamo introdotto la modulazione VSB. Quando il ricorso alla modulazione VSB non è necessario, per rendere comunque il progetto del filtro SSB meno critico, si preferisce operare una modulazione a più stadi. L'idea è mostrata in figura 4.10 dove si opera una prima modulazione DSB a frequenza f_1 , tipicamente molto più bassa di f_0 dove il filtro che deve selezionare la banda laterale è di più facile realizzazione. Successivamente il segnale SSB viene traslato alla frequenza desiderata f_0 mediante una ulteriore moltiplicazione. Il filtro passa-banda finale, non critico, deve solo eliminare la banda immagine a $f_0 - 2f_1$ o a $-f_0 + 2f_1$.

4.6.2 Modulatori che usano la Trasformata di Hilbert

Un sistema diretto per generare segnali SSB è basato sulla espressione (3.50) del segnale modulato, in cui compare la trasformata di Hilbert del segnale modulante. Lo schema è mostrato in figura 4.11 dove è presente un blocco che realizza la trasformata di Hilbert. Nonostante la trasformata di Hilbert corrisponda a un sistema lineare non fisicamente realizzabile, una versione causale e approssimata può facilmente essere realizzata.

Ricordiamo che un trasformatore di Hilbert ha risposta armonica $H_H(f) = \frac{\text{sgn}(f)}{j}$, ovvero l'ampiezza è costante e pari a uno, e la fase è $-\frac{\pi}{2}\text{sgn}(f)$. Ai fini di rendere il sistema fisicamente realizzabile, un trasformatore di Hilbert può essere progettato cercando di approssimare nel dominio della frequenza

$$|H(f)| = \text{cost}; \angle H(f) = -\frac{\pi}{2}\text{sgn}(f) - 2\pi t_0 f; \quad \forall f \in \mathcal{I}_s, \quad (4.25)$$

dove \mathcal{I}_s è l'insieme delle frequenze dello spettro di $s(t)$ e il ritardo t_0 viene opportunamente scelto. Quindi si cerca di ottenere la stessa risposta ritardata

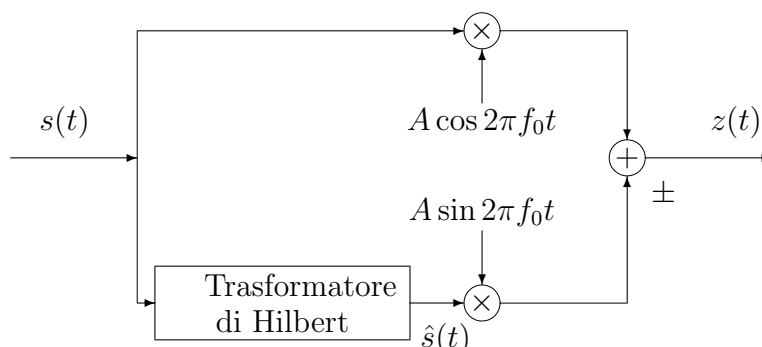


Figura 4.11: Il modulatore SSB realizzato mediante un trasformatore di Hilbert

per rendere il filtro causale e nel dominio della frequenza limitare l'attenzione alle sole frequenze di interesse. La figura 4.12 mostra una risposta impulsiva che ha estensione finita ed è causale. Essa differisce dalla risposta teorica perché è stata limitata in ampiezza, ritardata di t_0 e troncata a $t = 0$.

E' evidente che nel modulatore, se il trasformatore di Hilbert approssima $h_H(t - t_0)$, anche sul ramo superiore del modulatore va introdotto lo stesso ritardo. Lo schema del modulatore modificato è mostrato in figura 4.13 dove bisogna progettare un filtro $h_2(t)$ che approssimi un ritardo ideale di t_0 . Ricordiamo che il ritardo ideale ha specifiche desiderate

$$|H_d(f)| = 1; \quad \angle H_d(f) = -2\pi t_0 f, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (4.26)$$

La non idealità dei filtri $h_1(t)$ e $h_2(t)$ è facilmente tenuta in conto dall'analisi del sistema. Un approfondimento è suggerito negli esercizi.

4.6.3 Modulatore di Weaver

Lo schema di modulatore riportato in figura 4.14 è il cosiddetto *modulatore di Weaver*. L'idea è ottenere il segnale modulato SSB mediante uno schema bilanciato e due stadi successivi di modulazione. Mediante la composizione delle bande laterali, in fase e in quadratura, si ottiene la selezione della banda. Si noti che non è necessario alcun filtro passa-banda, ma solo un

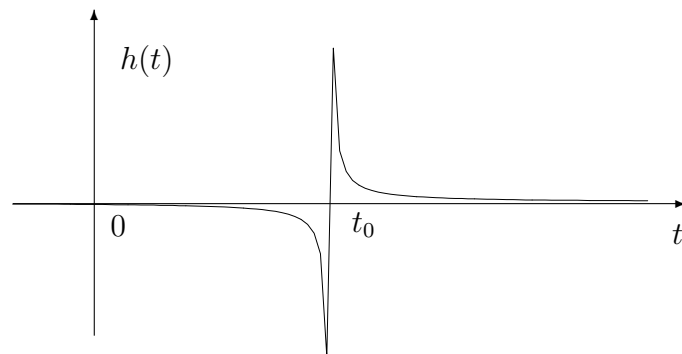


Figura 4.12: La risposta impulsiva di un trasformatore di Hilbert approssimato

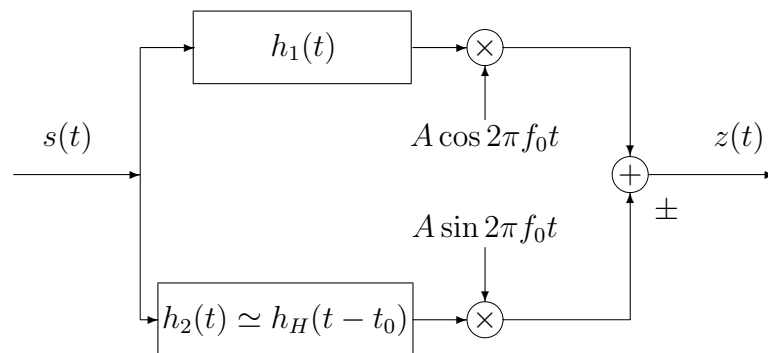


Figura 4.13: Il modulatore SSB basato su una approssimazione della trasformata di Hilbert

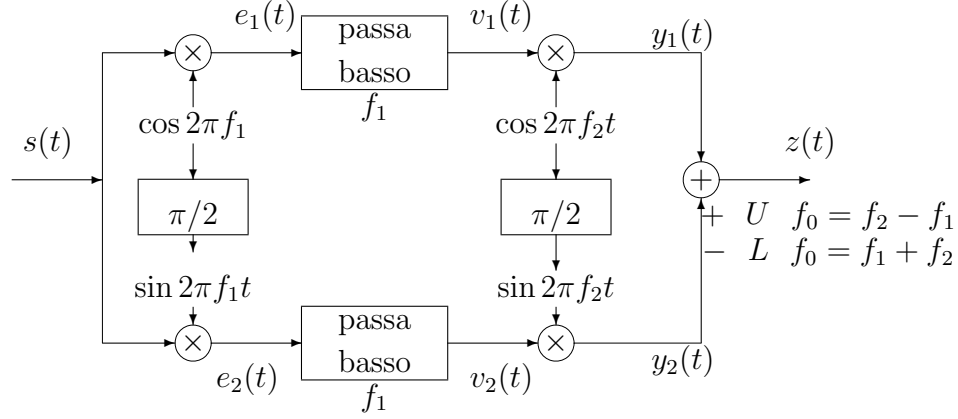


Figura 4.14: Il modulatore di Weaver

passa-basso. Il segnale in uscita è

$$z(t) = s(t) \cos \pi(f_2 - f_1)t - \hat{s}(t) \sin 2\pi(f_2 - f_1)t, \quad (4.27)$$

se all'uscita è selezionato il segno $+$. Lo schema di Weaver ha realizzato una SSB-U alla frequenza della portante $f_0 = f_2 - f_1$. Viceversa se il segno all'uscita è $-$, abbiamo

$$z(t) = s(t) \cos \pi(f_1 + f_2)t + \hat{s}(t) \sin 2\pi(f_1 + f_2)t, \quad (4.28)$$

che è un segnale SSB-L alla frequenza della portante $f_0 = f_1 + f_2$. Il funzionamento è analizzato in maniera grafica in figura 4.15. La frequenza f_1 deve essere scelta per isolare, mediante un filtro passa-basso con frequenza di taglio f_1 , le due bande attorno allo zero. Si noti che $f_1 > B/2$, altrimenti il segnale non può essere recuperato. Un esercizio di approfondimento è suggerito alla fine del capitolo.

Lo schema può anche essere studiato analiticamente osservando che il primo stadio del sistema realizza un modulatore SSB-L a frequenza f_1 . La particolarità è che f_1 può anche essere molto piccola con le due bande sovrapposte. Nel ramo superiore il segnale è modulato in fase e in quello inferiore in quadratura. In particolare

$$v_1(t) = s(t) \cos 2\pi f_1 t + \hat{s}(t) \sin 2\pi f_1 t; \quad (4.29)$$

$$v_2(t) = s(t) \sin 2\pi f_1 t - \hat{s}(t) \cos 2\pi f_1 t. \quad (4.30)$$

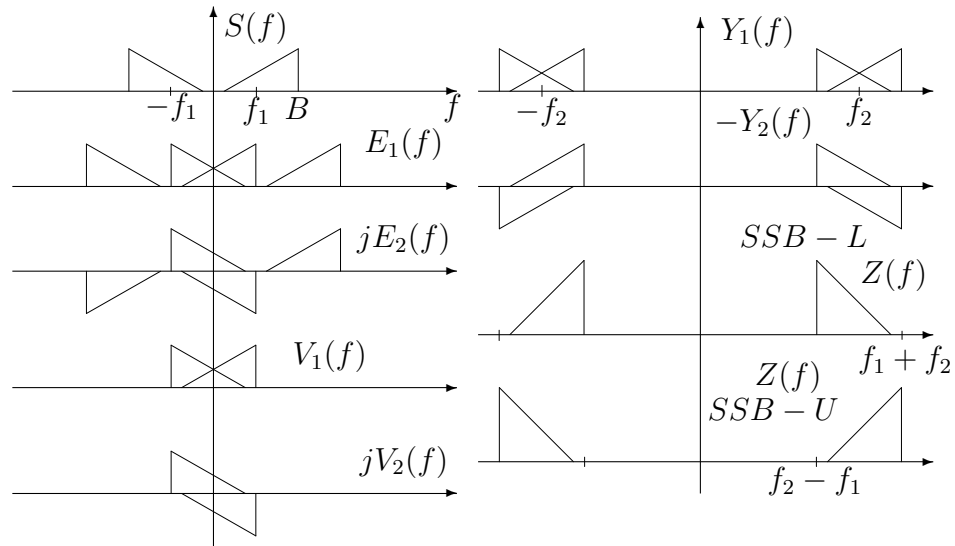


Figura 4.15: Il funzionamento del modulatore di Weaver nel dominio della frequenza

Le relazioni sono facilmente ottenibili utilizzando la stessa procedura di analisi del segnale SSB del capitolo 3. Semplici trasformazioni trigonometriche forniscono

$$y_1(t) = \frac{s(t)}{2} \cos 2\pi(f_1 + f_2)t + \frac{s(t)}{2} \cos 2\pi(f_2 - f_1)t \quad (4.31)$$

$$+ \frac{\hat{s}(t)}{2} \sin 2\pi(f_1 + f_2)t - \frac{\hat{s}(t)}{2} \sin 2\pi(f_2 - f_1)t; \quad (4.32)$$

$$y_2(t) = -\frac{s(t)}{2} \cos 2\pi(f_1 + f_2)t + \frac{s(t)}{2} \cos 2\pi(f_2 - f_1)t \quad (4.33)$$

$$- \frac{\hat{s}(t)}{2} \sin 2\pi(f_1 + f_2)t - \frac{\hat{s}(t)}{2} \sin 2\pi(f_2 - f_1)t. \quad (4.34)$$

Dalla somma e dalla differenza di $y_1(t)$ e $y_2(t)$ si ottengono i segnali SSB.

4.7 Problemi

Problema 4.1 Analizzare lo schema di figura 4.1 per una non linearità generica con $N = 3$.

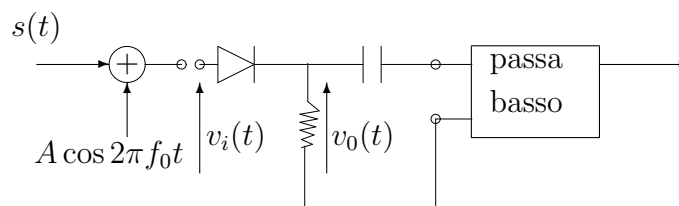
Problema 4.2 Si consideri un segnale $m(t) = s(t)p(t)$, dove $s(t)$ è un segnale in banda base con frequenza massima pari a B , e $p(t)$ è un generico segnale periodico con periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Dimostrare come sia possibile con un filtro passa-banda da $m(t)$ ottenere un segnale DSB. Discutere le eventuali implicazioni delle caratteristiche specifiche del segnale $p(t)$.

Problema 4.3 Studiare il funzionamento del modulatore bilanciato basato su non linearità del secondo ordine, usato come demodulatore coerente.

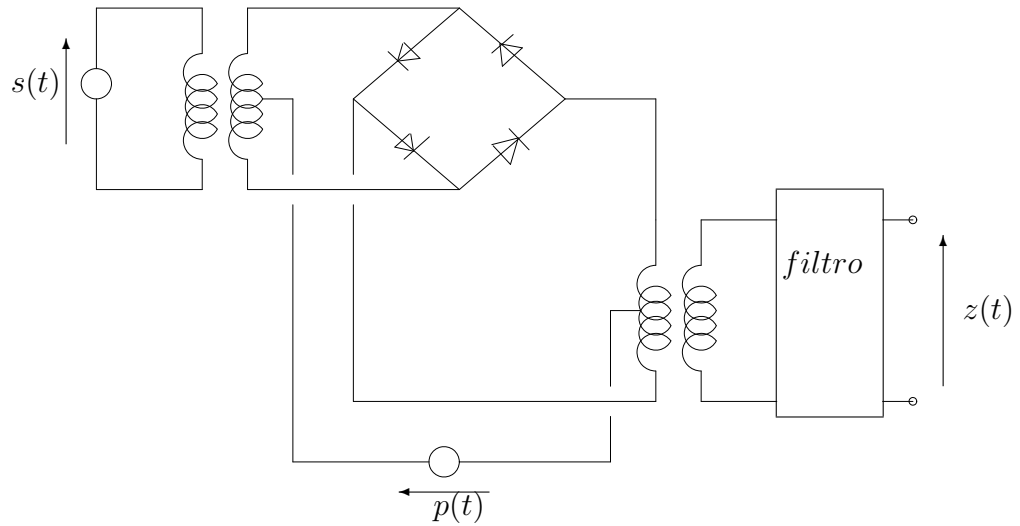
Problema 4.4 Si consideri il modulatore SSB mostrato in figura 4.13. Si valuti una espressione per il segnale recuperato a valle del demodulatore coerente in funzione delle risposte armoniche $H_1(f)$ e $H_2(f)$ commentando sulla distorsione introdotta come conseguenza della non idealità dei filtri.

Problema 4.5 Analizzare il funzionamento del modulatore di Weaver quando la frequenza f_1 è scelta pari a $f_1 = \{\frac{B}{3}, \frac{B}{2}, B, \frac{3}{2}B\}$. Commentare sulla criticità del filtro passa-basso nei vari casi.

Problema 4.6 Analizzare il funzionamento del modulatore di figura assumendo che la caratteristica tensione-corrente del diodo possa essere descritta da un polinomio del terzo ordine.



Problema 4.7 Analizzare il funzionamento del modulatore a interruzione di figura assumendo che le caratteristiche dei diodi siano ideali.



Problema 4.8 Calcolare la risposta armonica del filtro avente risposta impulsiva

$$h(t) = te^{-\alpha t}u(t) + te^{\alpha t}u(-t), \quad (4.35)$$

e verificarne il funzionamento come approssimatore di un trasformatore di Hilbert. Commentare sulla fisica realizzabilità.

Capitolo 5

Demodulatori per la Modulazione Lineare

In questo capitolo vengono introdotti i principali schemi di ricevitore utilizzati per segnali modulati linearmente. Vengono presentate varie soluzioni con particolare attenzione al problema del sincronismo di fase nel demodulatore coerente. Viene inoltre discusso il demodulatore di involuppo con qualche riferimento a schemi classici di realizzazione circuitale.

5.1 Introduzione

Il progetto di un ricevitore deve tenere conto di: (a) realizzabilità; (b) precisione; (c) robustezza alle distorsioni e al rumore. Le difficoltà nella realizzazione sono connesse prima all'esistenza di demodulatori che implementino con sistemi causali l'operazione descritta matematicamente, e successivamente alla semplicità dei circuiti. Come già accennato a proposito dei modulatori, la tecnologia elettronica consente soluzioni discrete e integrate con scelte realizzative principalmente dipendenti dalle frequenze in gioco. E' più semplice realizzare sistemi precisi a bassa frequenza, anche se la tecnologia è oggi estremamente evoluta con soluzioni circuitali integrate che si spingono fino a frequenze molto elevate.

Un demodulatore deve anche realizzare buone prestazioni a costi commisurati all'applicazione. Pertanto si può in qualche caso sacrificare accuratezza al costo. L'immunità a distorsioni e contaminazioni da rumore, a volte non prevedibili, condizionano ulteriormente la scelta di una soluzione. Il problema del sincronismo nella demodulazione coerente costituisce uno dei problemi principali e sarà affrontato nel seguito di questo capitolo.

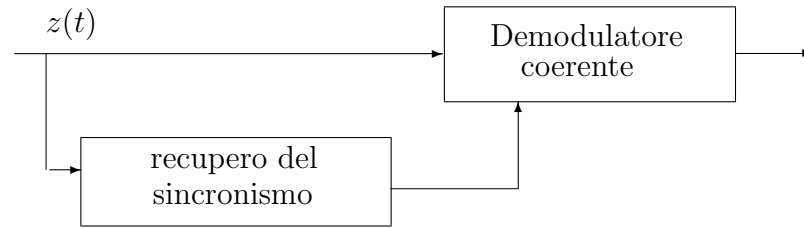


Figura 5.1: Il demodulatore coerente con il sistema di aggancio della portante

5.2 Sincronismo nel demodulatore coerente

Abbiamo già osservato nel capitolo 3 come il funzionamento del demodulatore coerente possa dipendere in maniera sensibile dal sincronismo dell'oscillatore locale. Ricordiamo che il demodulatore coerente può essere utilizzato per segnali DSB, SSB, VSB e AM (anche se nell'AM potrebbe non convenire trasmettere la portante se il ricevitore deve essere coerente). Anche nel demodulatore QAM è cruciale che la fase dell'oscillatore locale sia la stessa della portante. Quindi in generale errori di frequenza e di fase sono da minimizzare e gli effetti variano a seconda dello schema di modulazione utilizzato.

Nella maggioranza dei casi nel demodulatore coerente è necessario prevedere un meccanismo di sincronizzazione dell'oscillatore locale alla portante del segnale in arrivo come schematicamente indicato in figura 5.1

Lo schema di recupero deve poter estrarre la portante, o anche solo la fase, affinché l'omodina sia sincrona sia in frequenza che in fase con la portante. Vari schemi sono stati proposti nelle applicazioni. Descriveremo qui i più tipici.

5.2.1 Schema con la pilota

Uno dei metodi più semplici per la sincronizzazione del demodulatore coerente è l'introduzione esplicita di un segnale sinusoidale nel segnale modulato. Tale segnale detto *pilota*, a frequenza f_p , sincrono alla portante, deve essere tale da non sovrapporsi al segnale di informazione per essere estraibile al ricevitore e non contaminare il segnale utile. La frequenza della pilota può essere la frequenza della portante f_0 , in qual caso lo schema di recupero è

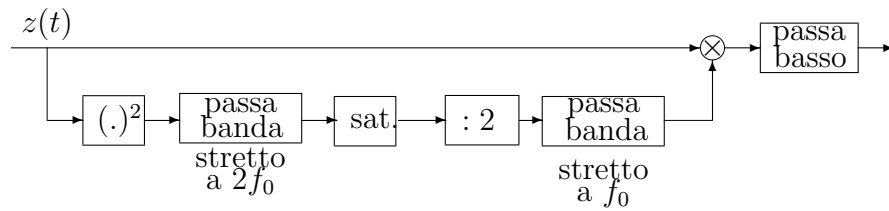


Figura 5.2: Il recupero della portante dalle bande laterali nel DSB

semplicemente un filtro passa-banda stretto attorno a f_0 . In tale schema il segnale di informazione non deve avere componenti rilevanti attorno alle basse frequenze ai fini della separabilità. Inoltre il filtro passa-basso all'uscita deve anche prevedere la rimozione della componente continua residua dalla portante.

Si noti che introdurre una pilota alla frequenza della portante su un segnale DSB, non equivale ad una modulazione AM poichè l'ampiezza della pilota è tipicamente piccola e non soddisfa la condizione dell'inviluppo.

La pilota può anche essere introdotta a frequenza diversa da f_0 , in qual caso lo schema di recupero è un passa-banda stretto attorno a f_p seguito da un convertitore di frequenza (un moltiplicatore e/o un divisore di frequenza). In tutte le realizzazioni dei sistemi di recupero della portante bisogna fare attenzione al ritardo costante introdotto dallo schema di recupero ai fini di un buon allineamento di fase tra portante del segnale modulato e segnale recuperato.

Va notato infine che l'aggiunta del segnale pilota comporta un aumento della potenza del segnale modulato. L'ampiezza da assegnare alla pilota deriva da un opportuno compromesso tra la capacità di recupero in condizioni di segnale rumoroso e tra il contenimento della potenza.

5.2.2 Recupero nel DSB dalle bande laterali

La natura passa-banda del segnale DSB suggerisce uno schema di recupero della portante direttamente dal segnale modulato senza alcuna aggiunta di portante o pilota. Il diagramma a blocchi è mostrato in Figura 5.2.

Il primo blocco della catena di recupero è un quadratore che fornisce il segnale

$$q(t) = z^2(t) = A^2 s^2(t) \cos^2 2\pi f_0 t = \frac{A^2}{2} s^2(t) + \frac{A^2}{2} s^2(t) \cos 2\pi 2f_0 t, \quad (5.1)$$

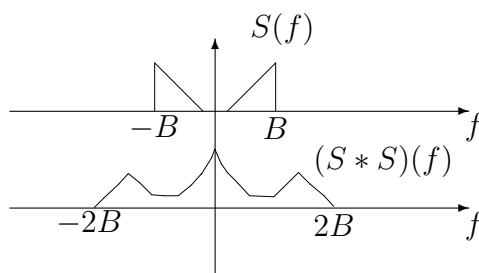


Figura 5.3: Il riversamento dalle bande laterali

che nel dominio della frequenza è

$$Q(f) = \frac{A^2}{2}(S * S)(f) + \frac{A^2}{4}(S * S)(f - 2f_0) + \frac{A^2}{4}(S * S)(f + 2f_0). \quad (5.2)$$

Gli ultimi due termini corrispondono ad una componente passa-banda sulla banda $[2f_0 - 2B, 2f_0 + 2B]$. Quindi anche se il segnale modulante $s(t)$ non ha componenti attorno allo zero, il segnale $(S * S)(f)$ è diverso da zero attorno all'origine e alle basse frequenze a causa del riversamento (*leakage*) dalle bande laterali. Uno schizzo è mostrato in figura 5.3 per uno spettro triangolare.

Il filtro passa-banda a banda stretta attorno a $2f_0$ recupera un segnale passa-banda a banda stretta. Ricordiamo che un segnale a banda stretta è molto simile a una sinusoide a frequenza $2f_0$ debolmente modulata. La potenza di tale segnale dipenderà dalla frazione di potenza contenuta attorno a $2f_0$, che comunque è sempre diversa da zero. Un amplificatore a saturazione elimina la modulazione residua e restituisce un segnale rettangolare periodico a frequenza $2f_0$. Un divisore di frequenza ne dimezza la frequenza e un filtro passa-banda a banda stretta a f_0 lo “smussa” riproducendo una sinusoide quasi pura in uscita. Maggiori approfondimenti sullo schema di recupero sono suggeriti negli esercizi.

5.2.3 Il loop di Costas

Gli schemi di aggancio esaminati sono basati sulla estrazione della portante, e/o della sua fase, dal segnale in arrivo e sono del tipo cosiddetto *feedforward*. L'idea del demodulatore di Costas è invece usare uno schema controreazionato (quindi con *feedback*) che condiziona “l'aggancio” del demodulatore ad una stima corrente della qualità della sincronizzazione. Lo

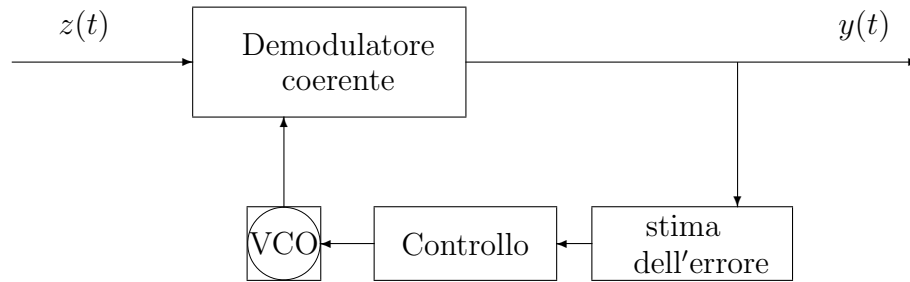


Figura 5.4: L'idea del loop di Costas come correzione dinamica degli errori di sincronismo

schema di principio è descritto nella figura 5.4 dove è mostrato uno schema a controreazione che realizza la correzione dinamica della fase e/o della frequenza istantanea dell'oscillatore locale sulla base di una stima dell'errore di sincronismo.¹ L'idea è ampiamente utilizzata in gran parte dei sistemi reali, analogici e numerici, perché realizza un inseguimento dinamico delle variazioni di fase della portante e una maggiore immunità al rumore. In genere la soglia di funzionamento in condizioni di basso rapporto segnale-rumore è più bassa dei sistemi non reazionati.

Ci limiteremo qui a descrivere il funzionamento del demodulatore di Costas per un segnale DSB. Lo schema è mostrato in figura 5.5 dove l'uscita del VCO viene moltiplicata per il segnale in arrivo $z(t)$ sul ramo superiore. Sul ramo inferiore lo stesso segnale in uscita al VCO viene sfasato di $\pi/2$ e moltiplicato per $z(t)$. In particolare abbiamo

$$\begin{aligned} p_1(t) &= b \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \theta), \\ p_2(t) &= b \sin(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \theta). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il VCO oscilla in un intorno della frequenza f_0 ed ha fase istantanea condizionata dall'ingresso. Ai fini dell'analisi assumeremo che Δf e θ siano piccole e che quindi il sistema si trovi in condizioni di "quasi aggancio."

Supponiamo che all'ingresso del sistema ci sia un segnale DSB senza rumore $z(t) = As(t) \cos 2\pi f_0 t$, con segnale modulante a frequenza massima pari a B . I filtri passa-basso sono ideali a guadagno unitario e hanno

¹Un oscillatore la cui fase e frequenza istantanea sono controllate da un ingresso variabile è comunemente detto VCO (Voltage-Controlled Oscillator) indipendentemente dalla realizzazione circuitale.

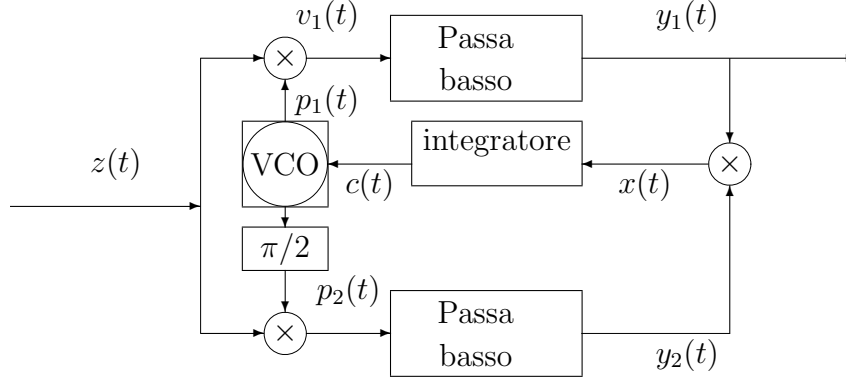


Figura 5.5: Il loop di Costas per il segnale DSB

frequenza di taglio pari a B . All'uscita dei filtri passa-basso abbiamo

$$y_1(t) = \frac{Ab}{2} s(t) \cos(2\pi \Delta f t + \theta), \quad (5.4)$$

$$y_2(t) = \frac{Ab}{2} s(t) \sin(2\pi \Delta f t + \theta). \quad (5.5)$$

Dopo il moltiplicatore

$$x(t) = y_1(t) y_2(t) = \frac{A^2 b^2}{8} s^2(t) \sin(2\pi 2 \Delta f t + 2\theta). \quad (5.6)$$

Il segnale $x(t)$ è un segnale a bassissima frequenza ($2 \Delta f$) modulato da $s^2(t)$, che ha certamente componenti attorno allo zero.² Quindi il ruolo dell'integratore è quello di filtro passa-basso a frequenza di taglio molto bassa che fornisce un segnale di controllo al VCO nullo se: (a) $\Delta f = 0$; $\theta = 0$; (b) $s^2(t) = 0$. Entrambi le situazioni sono da considerare condizioni di equilibrio del loop. La prima è la condizione desiderata di aggancio, in cui $y_1(t) = \frac{Ab}{2} s(t)$. La condizione $s(t) = 0$ può invece causare perdita di sincronismo. Nelle applicazioni il sistema viene opportunamente dimensionato nelle sue costanti di tempo per evitare derive di fase negli intervalli di assenza di segnale. L'analisi della dinamica dell'aggancio, è piuttosto

²Ricordiamo che $s^2(t)$ ha trasformata di Fourier $(S * S)(f)$ che ha componenti attorno allo zero che provengono dalle bande laterali, come già discusso nella sezione precedente.

complessa e viene tralasciata perché al di là degli scopi di queste note. Lo studente interessato faccia riferimento alla vasta letteratura disponibile sull'argomento.³

Ulteriori approfondimenti sul funzionamento del loop di Costas per modulazioni diverse dalla DSB è suggerito nei problemi alla fine del capitolo.

5.3 Demodulatore di inviluppo

Un segnale passa-banda può essere scritto come

$$z(t) = I_z(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_z(t)), \quad (5.7)$$

dove $I_z(t)$ è l'inviluppo istantaneo. Un rivelatore di inviluppo ideale deve restituire $I_z(t)$ da $z(t)$.

Un demodulatore di inviluppo molto semplice si realizza mediante la cascata di un raddrizzatore e di un filtro passa-basso. Lo schema è mostrato in figura 5.6 dove sono riportate due versioni che utilizzano rispettivamente un raddrizzatore a semplice semi-onda e uno a doppia semi-onda. In figura 5.7 è mostrata graficamente l'operazione nel dominio del tempo. C'è da aspettarsi una migliore risoluzione dal rivelatore con il raddrizzatore a doppia semi-onda poiché entrambi i semi-cicli della sinusoide vengono utilizzati per la ricostruzione.

Le realizzazioni circuitali del rivelatore di inviluppo possono essere estremamente semplici. In figura 5.8 sono mostrati due schemi elettrici tipici. Il primo utilizza un solo diodo raddrizzatore (a semplice semi-onda) mentre il secondo un ponte di diodi per il raddrizzamento a doppia semi-onda.

La realizzazione (a) è un circuito "storico." Le prime radio utilizzavano un tale circuito che non ha componenti attivi (senza batterie) e riesce a pilotare delle cuffie ad alta impedenza collegate ai morsetti finali. Queste semplici realizzazioni consentono l'ascolto delle radiodiffusioni AM anche con realizzazioni "di fortuna." Esse possono essere realizzate mediante lunghe antenne a filo e trasformatori fatti con fili di rame avvolti su cilindri di cartone. Quando non erano disponibili diodi (si utilizzavano in genere diodi al germanio) il raddrizzatore veniva realizzato mediante una pietra di galena su cui erano collegate degli elettrodi a spillo. La galena infatti ha proprietà raddrizzatrici (la corrente fluisce in un verso e non nell'altro).

³Maggiori commenti su sistemi come questo, che è in pratica un PLL (Phase-Locked Loop), saranno presentati a proposito della modulazione di frequenza.

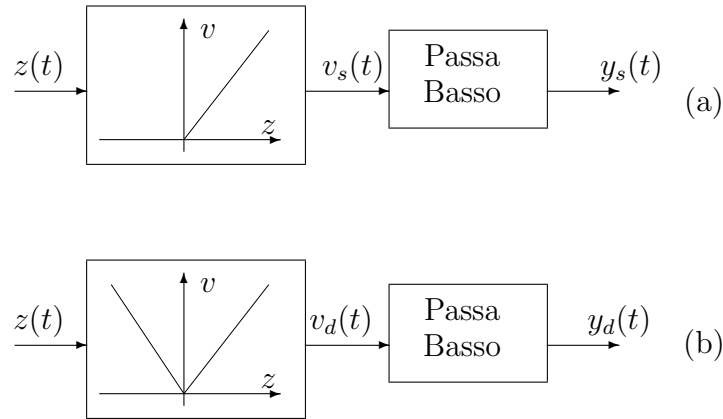


Figura 5.6: Il rivelatore di inviluppo con il raddrizzatore: (a) a semplice semi-onda; (b) a doppia semi-onda

5.3.1 Discussione analitica

Analizziamo il demodulatore di inviluppo con i due tipi di raddrizzatore per il segnale AM $z(t) = A(1 + ks(t)) \cos 2\pi f_0 t$, con $(1 + ks(t)) \geq 0$. Il segnale all'uscita rispettivamente di un raddrizzatore a semplice e doppia semi-onda è

$$v_s(t) = A(1 + ks(t)) u[\cos 2\pi f_0 t] |\cos 2\pi f_0 t|; \quad (5.8)$$

$$v_d(t) = A(1 + ks(t)) |\cos 2\pi f_0 t|. \quad (5.9)$$

Nel primo caso solo semicicli positivi vengono preservati mentre nel secondo entrambi sono presenti (vedi figura 5.7). Il raddrizzamento può essere schematizzato come il prodotto di $A(1 + ks(t))$ per il segnale periodico $p_s(t)$, o $p_d(t)$ dove

$$p_s(t) = u[\cos 2\pi f_0 t] |\cos 2\pi f_0 t| \quad (5.10)$$

$$p_d(t) = |\cos 2\pi f_0 t|. \quad (5.11)$$

$p_s(t)$ e $p_d(t)$ sono due segnali periodici di periodo rispettivamente $1/f_0$ e $1/2f_0$

$$p_s(t) = \left[\cos 2\pi f_0 t \Pi \left(\frac{t}{T_0/2} \right) \right] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0); \quad (5.12)$$

$$p_d(t) = \left[\cos 2\pi f_0 t \Pi \left(\frac{t}{T_0/2} \right) \right] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{T_0}{2}), \quad (5.13)$$

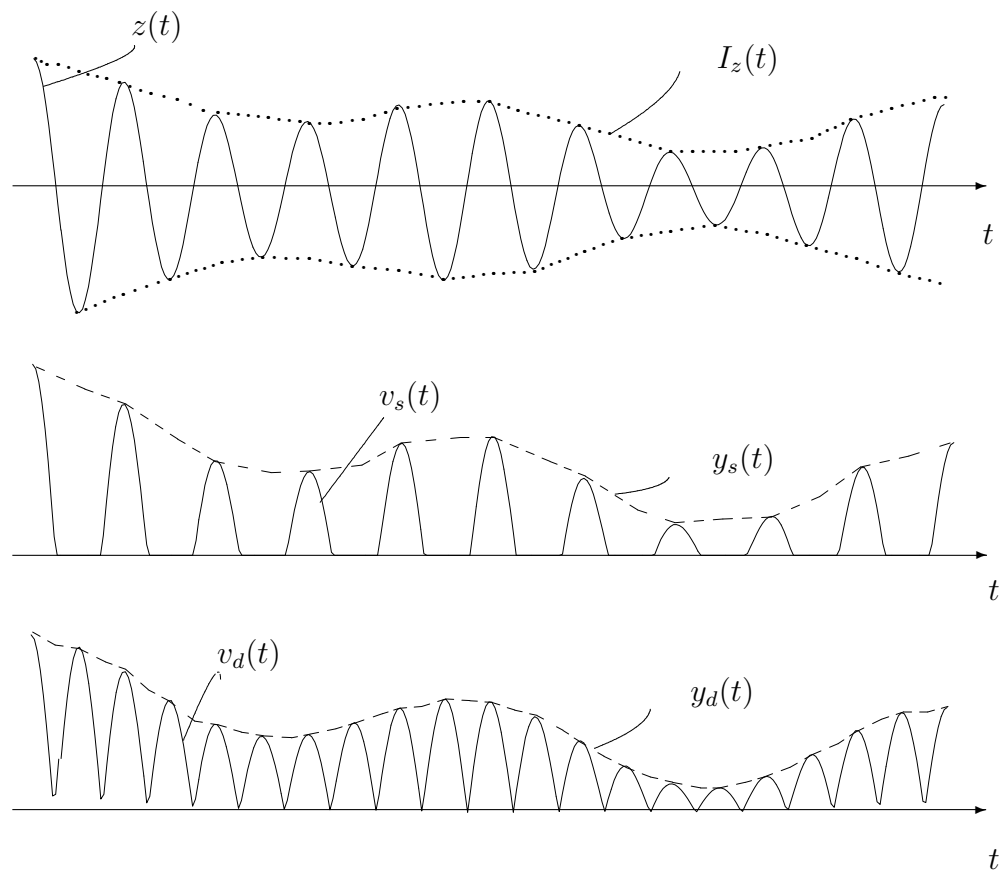


Figura 5.7: La rivelazione di involuppo mediante raddrizzamento: (a) a semplice semi-onda; (b) a doppia semi-onda

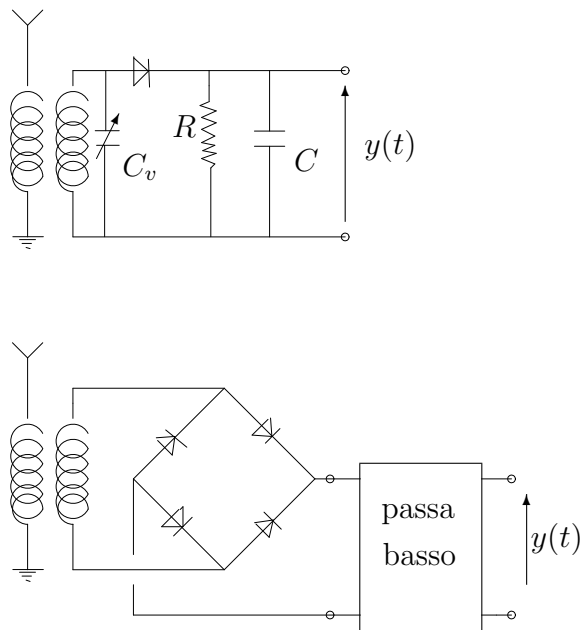


Figura 5.8: Due schemi elettrici tipici di rivelatore di inviluppo basati rispettivamente su un raddrizzatore: (a) a semplice semi-onda; (b) a doppia semi-onda

le cui trasformate sono facilmente valutabili

$$\mathcal{F} \left[\cos 2\pi f_0 t \Pi \left(\frac{t}{T_0/2} \right) \right] = \frac{T_0}{4} \operatorname{sinc} \frac{f - f_0}{2f_0} + \frac{T_0}{4} \operatorname{sinc} \frac{f + f_0}{2f_0}; \quad (5.14)$$

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \right] = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0); \quad (5.15)$$

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{T_0}{2}) \right] = \frac{2}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n2f_0); \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [p_s(t)] &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{sinc} \frac{n-1}{2} + \operatorname{sinc} \frac{n+1}{2} \right) \delta(f - nf_0) \\ &= \frac{1}{\pi} \delta(f) + \frac{1}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \\ &\quad + \frac{1}{3\pi} (\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)) + \sum_{n \text{ pari}} (\cdot) \delta(f - nf_0). \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} [p_d(T)] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{sinc} \frac{2n-1}{2} + \operatorname{sinc} \frac{2n+1}{2} \right) \delta(f - n2f_0);$$

Osservando che vale la relazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\operatorname{sinc} \frac{2n-1}{2} + \operatorname{sinc} \frac{2n+1}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi n - \frac{\pi}{2})}{\pi(n - \frac{1}{2})} + \frac{\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})}{\pi(n + \frac{1}{2})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n - \frac{1}{2})} + \frac{(-1)^n}{\pi(n + \frac{1}{2})} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{-(-1)^n}{n^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}; \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{F} [p_d(T)] = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \delta(f - n2f_0); \quad (5.18)$$

Poiché

$$\mathcal{F} [A(1 + ks(t))] = A\delta(f) + AkS(f), \quad (5.19)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} V_s(f) &= \frac{1}{\pi} A(\delta(f) + kS(f)) \\ &\quad + \frac{1}{4} A(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + kS(f - f_0) + kS(f + f_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3\pi} A(\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0) + kS(f - 2f_0) + kS(f + 2f_0)) \\
& + \sum_{n \text{ pari}} A(\cdot)(\delta(f - nf_0) + \delta(f + nf_0) + kS(f - nf_0) + kS(f + nf_0)); \\
V_d(f) = & \frac{2A}{\pi} \delta(f) + \frac{2Ak}{\pi} S(f) \\
& - \frac{2A}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \delta(f - n2f_0) - \frac{2kA}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} S(f - n2f_0).
\end{aligned}$$

La figura 5.9 mostra schematicamente il segnale AM e le armoniche dopo il raddrizzatore a semplice e a doppia semi-onda. Il filtro passa-basso ideale a guadagno unitario seleziona il primo termine, ovvero l'uscita è nei due casi

$$\begin{aligned}
y_s(t) &= \frac{A}{\pi} (1 + ks(t)), \\
y_d(t) &= \frac{2A}{\pi} (1 + ks(t)). \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Una successiva rimozione della componente continua completa il demodulatore. Si noti che nel raddrizzatore a semplice semi-onda la prima replica in $V_s(f)$ è a frequenza f_0 , mentre in quello a doppia semi-onda è a frequenza $2f_0$. Questo rende il progetto del filtro passa-basso meno critico nel secondo caso in cui anche la potenza del segnale raddrizzato è più concentrata sulla banda base.

5.4 Demodulatore con aggiunta locale della portante

Abbiamo visto come un segnale AM possa essere demodulato con un semplicissimo demodulatore di involuppo grazie alla presenza della portante e del suo rapporto di ampiezza con le bande laterali. Negli altri tipi di modulazione lineare, in cui la portante non è esplicitamente contenuta nel segnale modulato, le difficoltà connesse alla realizzazione del moltiplicatore nel demodulatore coerente, suggeriscono lo schema alternativo di figura 5.10. L'idea di questo ricevitore è aggiungere la portante localmente conferendo al segnale la struttura di un segnale modulato in involuppo. Infatti, almeno in linea di principio, l'ampiezza con la quale si aggiunge la portante al ricevitore può essere regolata a piacere per soddisfare sulla somma la condizione dell'involuppo. Ovviamente il ricevitore richiede ancora un oscillatore locale da sincronizzare ed è basato su un modello di canale ideale senza rumore.

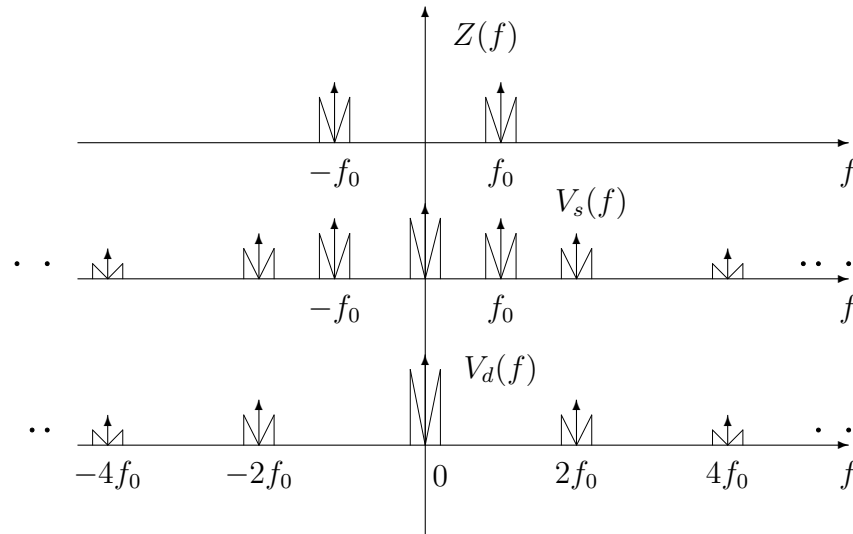


Figura 5.9: Il segnale AM prima e dopo il raddrizzatore a semplice e a doppia semi-onda nel dominio della frequenza

Per approfondire sull'idea, analizziamo il sistema di figura 5.10 assumendo che il segnale modulato sia del tipo

$$z(t) = As(t) \cos 2\pi f_0 t + Ag(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (5.21)$$

dove $s(t)$ è il segnale d'informazione e $g(t)$ è una componente in quadratura. Quindi all'ingresso abbiamo un segnale DSB se $g(t) = 0$, SSB se $g(t) = \pm \hat{s}(t)$ e VSB se $g(t) = \check{s}(t)$. In questi formati di modulazione è sempre la componente coseno a trasportare il segnale modulante. Nello schema di figura si è assunto perfetto sincronismo tra la sinusoidale aggiunta localmente e la portante del segnale in arrivo. L'ampiezza b della portante locale deve essere opportunamente dimensionata. Per ora assumiamo che essa sia sufficientemente grande rispetto al segnale modulato $z(t)$. Il segnale all'uscita del sommatore è

$$v(t) = (As(t) + b) \cos 2\pi f_0 t + Ag(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (5.22)$$

Il demodulatore di involuppo, assunto ideale, fornisce in uscita

$$y(t) = I_v(t) = \sqrt{(As(t) + b)^2 + A^2 g^2(t)}. \quad (5.23)$$

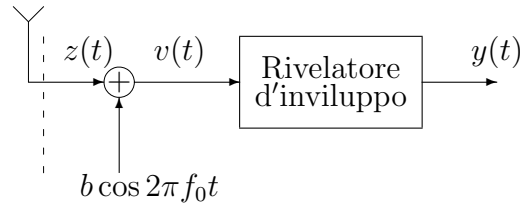


Figura 5.10: Il ricevitore coerente realizzato con un rivelatore di involuppo dopo l'aggiunta di una portante locale.

Svolgendo il quadrato e assumendo che $b^2 \gg A^2 (s^2(t) + g^2(t))$, si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{A^2 s^2(t) + A^2 g^2(t) + b^2 + 2Abs(t)} \\ &\simeq \sqrt{b^2 + 2Abs(t)} = b\sqrt{1 + \frac{2As(t)}{b}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ora poiché il termine $\frac{2As(t)}{b}$ sotto radice è piccolo, è possibile approssimazione la radice con l'espressione

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x, \quad \forall x \simeq 0. \quad (5.25)$$

In sintesi il risultato è

$$y(t) \simeq b + As(t), \quad \text{se } b^2 \gg A^2 (s^2(t) + g^2(t)). \quad (5.26)$$

Un filtro che blocca la componente continua completa il demodulatore. Il sistema, anche se in maniera approssimata, realizza un demodulatore coerente che estrae la componente coseno dal segnale modulato. La realizzazione è piuttosto semplice perchè non richiede alcun moltiplicatore, ma un semplice sommatore. Difficoltà nell'utilizzo di questo demodulatore comunque emergono quando sul canale c'è molto rumore, ovvero si è in condizioni di rapporto segnale-rumore all'ingresso sfavorevoli. L'analisi degli effetti del rumore sarà presentata in un capitolo successivo. Anche il mancato sincronismo della portante locale potrebbe creare qualche problema, in particolare per le modulazioni SSB e VSB. L'analisi è suggerita in uno degli esercizi.

5.5 Problemi

Problema 5.1 Proporre uno schema di demodulatore coerente per un segnale modulato AM.

Problema 5.2 Analizzare la distorsione su un segnale DSB demodulato mediante un demodulatore AM.

Problema 5.3 Si consideri un segnale $s(t)$ aleatorio gaussiano a media nulla e di potenza P_s . Si valuti la pdf dell'ampiezza del segnale in uscita a un demodulatore di inviluppo ideale in funzione di P_s , A e k .

Problema 5.4 Si analizzi lo schema di recupero dalle bande laterali supponendo che il segnale modulante sia un segnale aleatorio gaussiano nella banda vocale [300 3400] con spettro di potenza piatto.

Problema 5.5 Si analizzi il loop di Costas per un segnale modulante avente sia la componente in fase $I(t)$ che quella in quadratura $Q(t)$. Si commenti il funzionamento all'equilibrio del sistema per i vari schemi di modulazione lineare.

Problema 5.6 Analizzare lo schema di demodulatore con rivelatore di inviluppo e aggiunta della portante locale quando c'è una differenza di fase θ tra la portante in arrivo e quella aggiunta localmente. Commentare sugli effetti per modulazione DSB, SSB e VSB.

Capitolo 6

Applicazioni della Modulazione Lineare

Vengono qui presentati alcuni esempi di sistemi di telecomunicazione che utilizzano la modulazione lineare. L'obiettivo è fornire al lettore degli esempi realizzativi per i concetti sulla modulazione presentati finora.

6.1 Multiplex di frequenza

Nei collegamenti che si basano sulla propagazione del campo elettromagnetico in modalità libera o guidata, ogni segnale modulato è confinato ad una banda finita dello spettro. L'asse delle frequenze viene pertanto utilizzato da più canali simultanei, ognuno dei quali è localizzato su intervalli diversi dell'asse delle frequenze, realizzando quello che va sotto il nome di *Multiplex di frequenza*, o *FDM (Frequency Division Multiplex)*. La figura 6.1 mostra schematicamente l'FDM in cui diversi segnali d'informazione vengono modulati su varie bande di frequenze. La banda occupata da ogni canale è W Hz e sono previste delle *bande di guardia* che separano i vari canali. Lo scopo delle bande di guardia è evitare sconfinamenti tra canali adiacenti e non richiedere ai demodulatori dei filtri passa-banda troppo critici.

Esempio 6.1 **Esempio 6.2** *La radiodiffusione AM commerciale* nella banda delle onde medie (OM) è organizzata con canali allocati all'interno della banda 535-1600 KHz. Ad ogni canale è dedicata una porzione dello spettro di 10 KHz. Il segnale audio in banda base è limitato a 4.5 KHz. Si tratta di una banda piuttosto stretta che consente solo una limitata fedeltà nella riproduzione. La banda netta occupata è di 9 KHz alla quale va aggiunta una *banda di guardia*

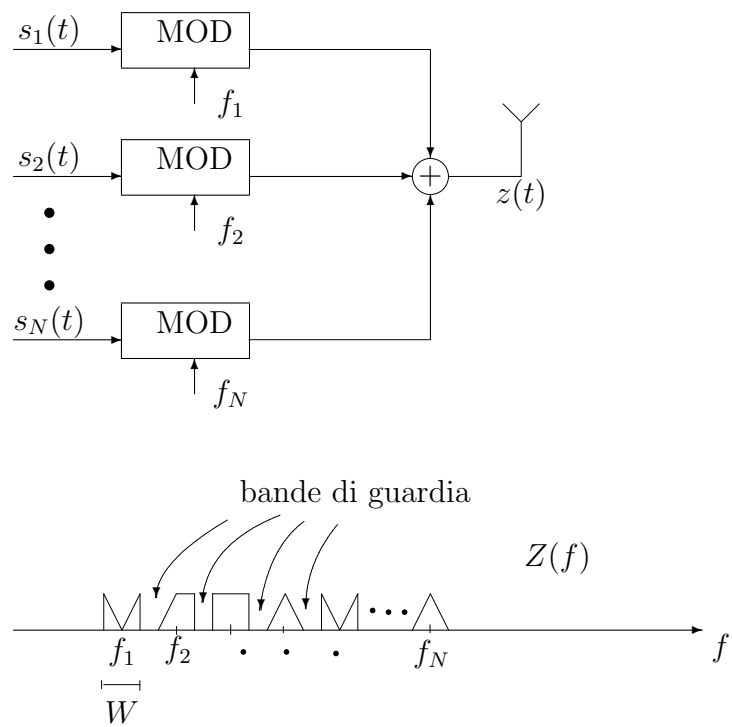


Figura 6.1: Il multiplex di frequenza

di 0.5 KHz sia a destra che a sinistra di ogni segnale modulato. I trasmettitori generano potenze dell'ordine dei KW regolate da opportune norme di copertura geografica. Si noti che la banda di circa 600 Hz attorno alle portanti non contiene componenti di segnali e rende l'operazione di blocco della componente continua poco critica.

Esempio 6.3 Nello standard della radiodiffusione dell'*FM commerciale*, i canali sono all'interno della banda 88-108 MHz. Ad ogni canale è dedicata una banda di 200 KHz. Le specifiche riguardano gli sconfinamenti nelle bande adiacenti conseguenti le sovrarmodulazioni. Maggiori dettagli sul multiplex FM saranno discussi dopo avere introdotto la modulazione FM.

Esempio 6.4 Nella *radiodiffusione della televisione analogica classica* il segnale televisivo è la sovrapposizione del segnale video, modulato in VSB-U, e del segnale audio modulato in FM e localizzato immediatamente a destra del segnale video sull'asse delle frequenze. Ad ogni canale televisivo è assegnata una banda di 7 MHz nella banda VHF III (174-230 MHz) e di 8MHz nella banda UHF IV e V (470-598 e 598-862 MHz). La portante video è sempre localizzata 1.25 MHz a destra del limite inferiore del canale. Ad esempio nella banda VHF III, al canale E8 è assegnata la banda 195-202 MHz con portante a frequenza 196.5 MHz; nella banda UHF IV, al canale 21 è assegnata la banda 470-478 MHz con portante a frequenza 471.25 MHz. Nel digitale terrestre le frequenze e le larghezze di banda sono le stesse, con differenti modalità di composizione del segnale audio e video.

6.2 Ricevitore a supereterodina

Un tipico demodulatore per trasmissioni broadcast, o più in generale provenienti da un canale su cui viaggia un multiplex di frequenza, deve prevedere la possibilità di sintonizzarsi sulla banda di frequenza (canale) desiderata. Piuttosto che progettare un demodulatore che possa essere regolato su tutte le frequenze del multiplex, si preferisce adottare lo schema a *supereterodina* introdotto da Armstrong e mostrato in figura 6.2. L'idea è anteporre al demodulatore che recupera il segnale in banda base, uno stadio variabile che converta il canale desiderato ad una frequenza fissa intermedia f_{IF} . In tal modo il demodulatore lavora sempre sullo stesso range di frequenza e può essere realizzato con migliore precisione rispetto ad uno schema dimensionato per operare su un vasto range di frequenze. Il ricevitore prevede un primo stadio costituito da un filtro passa-banda a frequenza di centro banda regolabile, non stretto, con larghezza di banda pari a W_{RF} e un mescolatore

con una sinusoidale a frequenza f_L , anch'essa variabile, collegata alla frequenza di centro banda del filtro RF. I primi due stadi costituiscono quindi un convertitore di frequenza che riporta una porzione del multiplex centrato alla frequenza del canale desiderato f_0 alla frequenza f_{IF} . Il resto del sistema seleziona una banda larga W attorno a f_{IF} e demodula il segnale fino al recupero in banda base. Lo schema a supereterodina viene anteposto a demodulatori AM, DSB, FM, o in generale a tutti i demodulatori che operano su un multiplex di frequenza.

La scelta della larghezza di banda del filtro RF e della frequenza dell'oscillatore f_L deve tenere conto dell'effetto possibile delle frequenze immagini. In figura 6.3 è mostrata schematicamente l'operazione di eterodina nel dominio della frequenza con $f_L = f_0 + f_{IF}$. Il filtro RF, centrato sul canale desiderato, seleziona il segmento del multiplex nella banda $\left[f_0 - \frac{W_{RF}}{2}, f_0 + \frac{W_{RF}}{2}\right]$. Dopo l'eterodina tale porzione dello spettro la si ritrova attorno a $2f_0 + f_{IF}$ e attorno a f_{IF} . Affinché le due repliche a f_{IF} e a $-f_{IF}$ non si sovrappongano è necessario che $f_{IF} - \frac{W_{RF}}{2} > 0$, ovvero $W_{RF} < 2f_{IF}$. In effetti un condizione meno stringente potrebbe richiedere solo che non ci sia sovrapposizione sulla banda $\left[f_{IF} - \frac{W}{2}, f_{IF} + \frac{W}{2}\right]$, ovvero

$$-f_{IF} + \frac{W_{RF}}{2} < f_{IF} - \frac{W}{2}; \quad (6.1)$$

che fornisce

$$W_{RF} + W < 4 f_{IF}. \quad (6.2)$$

La figura 6.4 mostra l'operazione di eterodina quando $f_L = f_0 - f_{IF}$. La situazione è analoga a quella precedente e le condizioni sulle frequenze immagini sono le stesse. Si noti che in questo caso le bande laterali si presentano all'ingresso del demodulatore a f_{IF} nell'ordine originale, mentre nell'altro caso con $f_L = f_0 + f_{IF}$, esse risultano invertite.

6.3 Segnale stereo compatibile

La trasmissione di musica in stereofonia richiede che due segnali diversi $s_R(t)$ (destra) e $s_L(t)$ (sinistra) siano trasmessi e ricevuti simultaneamente. Per ottenere un fedeltà di ascolto sufficiente si assume che entrambi i segnali possano avere componenti frequenziali fino a 15 KHz. La trasmissione stereofonica deve però consentire anche ai ricevitori monofonici di recuperare il segnale $m(t) = \frac{1}{2}(s_R(t) + s_L(t))$ (segnale monofonico). Pertanto si adotta lo schema di figura 6.5 che prevede il segnale somma alle frequenze

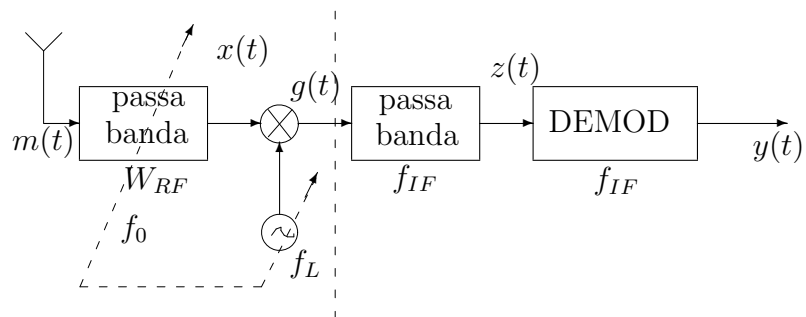


Figura 6.2: Il ricevitore a supereterodina

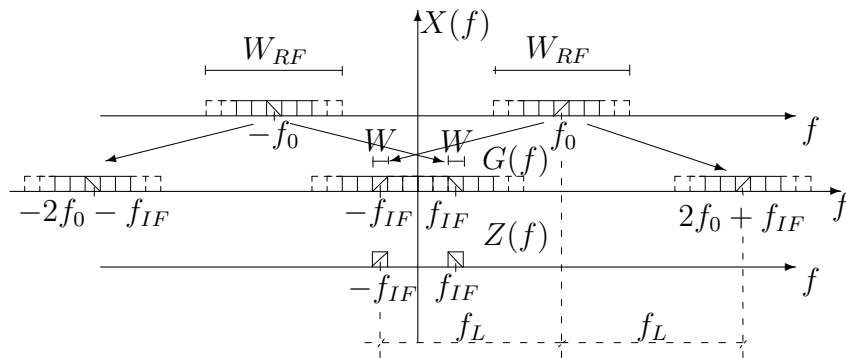


Figura 6.3: La supereterodina nel dominio della frequenza per $f_L = f_0 + f_{IF}$

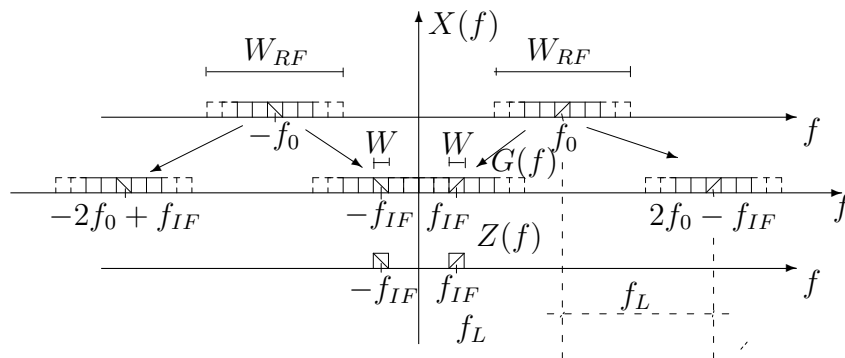


Figura 6.4: La supereterodina nel dominio della frequenza per $f_L = f_0 - f_{IF}$

originali e il segnale differenza che modula in DSB una portante a 38KHz. Ai fini della sincronizzazione del demodulatore, si inserisce anche una pilota a 19 KHz sincrona alla portante a 38 KHz, che ha anche lo scopo di consentire una rivelazione mono/stereo in ricezione. Tutti i contributi sommati costituiscono il segnale stereo compatibile, che ora ha frequenza massima pari a 53KHz. Il segnale così formattato viene fornito al modulatore che applicazioni commerciali è un modulatore FM. Il segnale stereo compatibile ha l'espressione

$$x(t) = \frac{s_L(t) + s_R(t)}{2} + (s_L(t) - s_R(t)) \cos 2\pi f_p t + b \cos 2\pi \frac{f_p}{2} t, \quad (6.3)$$

con $f_p = 38$ KHz. Il recupero dei segnali mono e stereo è mostrato in figura 6.7. Un semplice filtro passa-basso con frequenza massima pari a 15 kHz recupera il segnale somma (mono). La pilota a 19 kHz viene recuperata con un filtro passa-banda stretto. Dopo una moltiplicazione di frequenza per due, la pilota recuperata viene usata per demodulare il segnale differenza. Dalla somma e dalla differenza dei segnali somma e differenza si ottengono i segnali destro e sinistro. Si noti che il recupero della portante è molto importante affinché non ci sia mescolamento tra i due canali. Basta infatti che l'omodina per il segnale differenza sia fatta con una fase errata, che alle due uscite si presentino i due segnali mescolati. L'esercizio è suggerito nei problemi. Si noti che la rivelazione della presenza della pilota, che viene inserita quando $x(t)$ contiene anche il segnale differenza, costituisce anche un semplice indicatore stereo/mono.

6.4 Problemi

Problema 6.1 Si analizzi lo schema di ricezione di un segnale stereo compatibile, quando la conversione del segnale differenza viene realizzata con un oscillatore che è affetto da un errore di fase rispetto alla portante del segnale in arrivo.

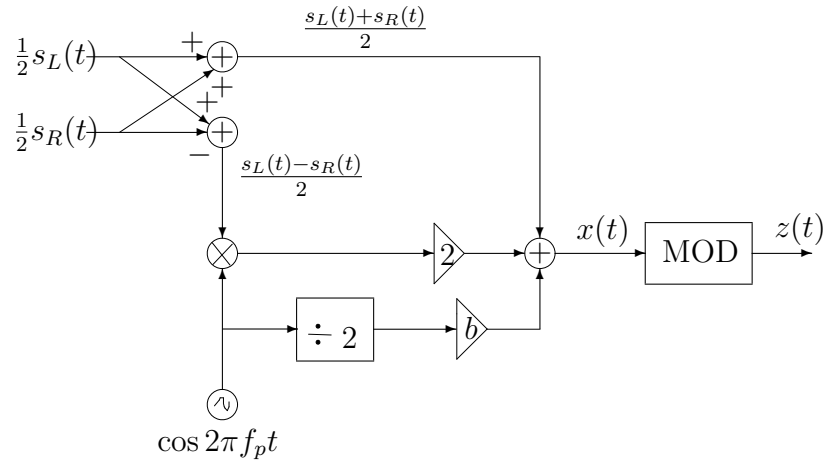


Figura 6.5: La generazione del segnale stereo compatibile

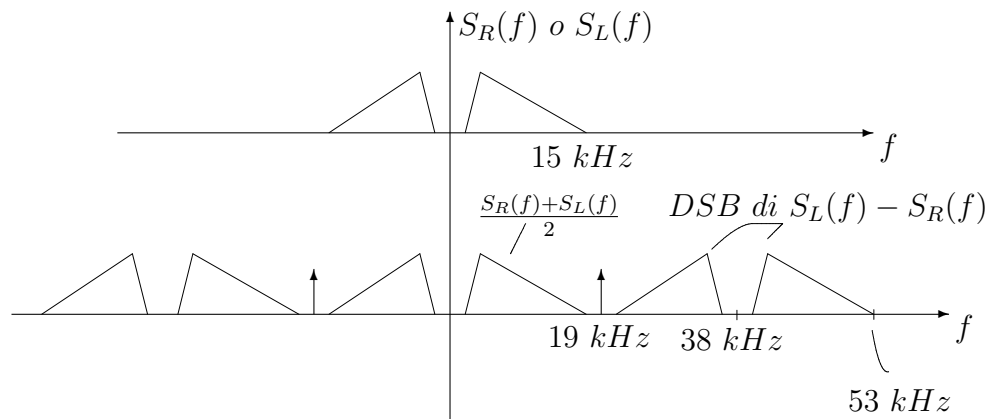


Figura 6.6: Il segnale stereo compatibile nel dominio della frequenza

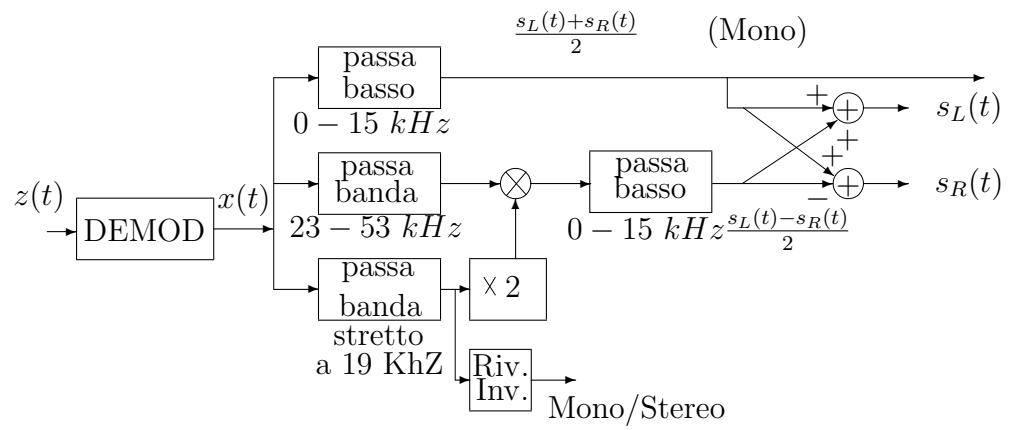


Figura 6.7: Il recupero dei segnali mono e stereo dal segnale stereo compatibile

Capitolo 7

Modulazione Lineare in Presenza di Rumore

I principali segnali modulati linearmente, già discussi nei capitoli precedenti, vengono qui studiati assumendo che sul canale sia stato introdotto rumore additivo. I confronti delle prestazioni sono presentati per canale non distorcente e rumore piatto nella banda del segnale.

7.1 Introduzione

I segnali della modulazione lineare sono tutti esprimibili secondo la rappresentazione passa-banda

$$z(t) = z_c(t) \cos 2\pi f_0 t + z_s(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (7.1)$$

con $\tilde{z}(t) = z_c(t) - jz_s(t)$. In particolare

$$\begin{array}{ll} DSB : & z_c(t) = As(t); \quad z_s(t) = 0 \\ AM : & z_c(t) = A(1 + ks(t)); \quad z_s(t) = 0 \\ & U \\ SSB : & z_c(t) = As(t); \quad z_s(t) = \mp A\hat{s}(t) \\ & L \\ & U \\ VSB : & z_c(t) = As(t); \quad z_s(t) = \mp A\check{s}(t) \\ & L \\ QAM : & z_c(t) = As_1(t); \quad z_s(t) = As_2(t). \end{array} \quad (7.2)$$

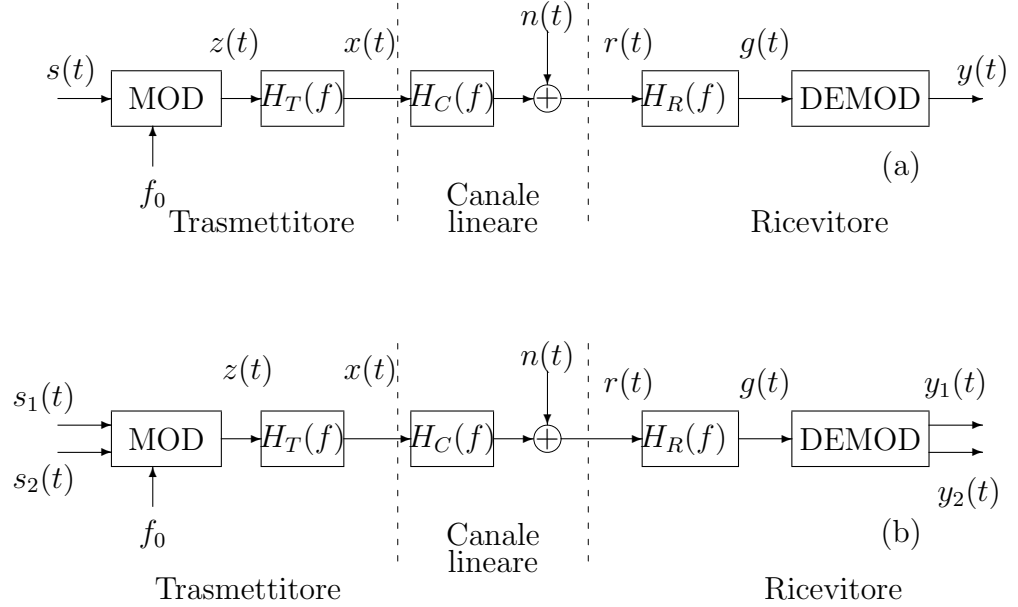


Figura 7.1: La catena di comunicazione per il segnale modulato su canale lineare: (a) modulazione AM, DSB, SSB, VSB; (b) modulazione QAM.

Nel dominio della frequenza i vari segnali occupano le seguenti bande:

$$\begin{aligned}
 DSB : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0 - B, f_0 + B] \\
 AM : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0 - B, f_0 + B] \\
 SSB - U : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0, f_0 + B] \\
 SSB - L : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0 - B, f_0] \\
 VSB - U : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0 - \frac{\epsilon}{2}, f_0 + B] \\
 VSB - L : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0 - B, f_0 + \frac{\epsilon}{2}] \\
 QAM : & \quad \mathcal{I}_z = [f_0 - B, f_0 + B].
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Il segnale modulato viene trasmesso sul canale utilizzando la banda che gli compete sulla quale potrà essere distorto e contaminato da rumore. La figura 7.1 mostra lo schema generale di una catena di comunicazione in cui il canale è assunto lineare e il rumore additivo. Sono stati inclusi anche possibili filtri trasmittente e ricevente.

Il segnale ricevuto all'ingresso del demodulatore è quindi

$$g(t) = (h_R * h_C * h_T * z)(t) + (h_R * n)(t) = z_i(t) + n_i(t), \tag{7.4}$$

dove abbiamo evidenziato la componente di segnale $z_i(t)$ e la componente di rumore $n_i(t)$. Analogamente nel dominio della frequenza

$$G(f) = H_R(f)H_C(f)H_T(f)Z(f) + H_R(f)N(f) = Z_i(f) + N_i(f). \quad (7.5)$$

Lo spettro di potenza all'ingresso del demodulatore è

$$P_g(f) = |H_R(f)|^2|H_C(f)|^2|H_T(f)|^2P_z(f) + |H_R(f)|^2P_n(f) = P_{z_i}(f) + P_{n_i}(f). \quad (7.6)$$

Trattandosi di segnali e sistemi passa-banda, può essere conveniente descrivere il sistema usando gli involucri complessi (equivalenti passa-basso). All'ingresso del demodulatore l'involuppo complesso è

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{8}(\tilde{h}_R * \tilde{h}_C * \tilde{h}_T * \tilde{z})(t) + \frac{1}{2}(\tilde{h}_R * \tilde{n})(t), \quad (7.7)$$

dove $\tilde{g}(t)$, $\tilde{h}_T(t)$, $\tilde{h}_C(t)$, $\tilde{h}_R(t)$, $\tilde{n}(t)$, sono le rappresentazioni passa-basso

$$\begin{aligned} g(t) &= g_c(t) \cos 2\pi f_0 t + g_s(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{g}(t) &= g_c(t) - jg_s(t); \\ h_R(t) &= h_{Rc}(t) \cos 2\pi f_0 t + h_{Rs}(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{h}_R(t) &= h_{Rc}(t) - jh_{Rs}(t); \\ h_C(t) &= h_{Cc}(t) \cos 2\pi f_0 t + h_{Cs}(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{h}_C(t) &= h_{Cc}(t) - jh_{Cs}(t); \\ h_T(t) &= h_{Tc}(t) \cos 2\pi f_0 t + h_{Ts}(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{h}_T(t) &= h_{Tc}(t) - jh_{Ts}(t); \\ n(t) &= n_c(t) \cos 2\pi f_0 t + n_s(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{n}(t) &= n_c(t) - jn_s(t); \end{aligned} \quad (7.8)$$

Si rimanda il lettore al capitolo 1 per i dettagli sugli equivalenti passa-basso e sul teorema della convoluzione ad essi applicato. Se il demodulatore è un demodulatore coerente (quindi appropriato per segnali AM, DSB, SSB, VSB) con oscillatore locale $b \cos 2\pi f_0 t$ e filtro passa-basso a guadagno unitario, l'uscita del demodulatore è proporzionale alla componente coseno di $g(t)$, ovvero

$$y(t) = \frac{bg_c(t)}{2} = \frac{b}{2}z_{ic}(t) + \frac{b}{2}n_{ic}(t) \quad (7.9)$$

dove

$$\begin{aligned} z_i(t) &= z_{ic}(t) \cos 2\pi f_0 t + z_{is}(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{z}_i(t) &= z_{ic}(t) - jz_{is}(t), \\ n_i(t) &= n_{ic}(t) \cos 2\pi f_0 t + n_{is}(t) \sin 2\pi f_0 t; & \tilde{n}_i(t) &= n_{ic}(t) - jn_{is}(t), \end{aligned} \quad (7.10)$$

sono le componenti a destinazione rispettivamente di segnale e di rumore.

Analogamente se il segnale modulato è QAM, le uscite del demodulatore da figura 7.1(a), con sincronismo di fase perfetto, sono

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{b}{2}g_c(t) = \frac{b}{2}z_{ic}(t) + \frac{b}{2}n_{ic}(t); \\ y_2(t) &= \frac{b}{2}g_s(t) = \frac{b}{2}z_{is}(t) + \frac{b}{2}n_{is}(t), \end{aligned} \quad (7.11)$$

dove abbiamo evidenziato le componenti di segnale e rumore a destinazione sui due rami.

In tutti i casi all'uscita del demodulatore l'effetto del rumore è lineare, manifestandosi come una componente additiva. Il rumore $n(t)$ che si aggiunge sul canale è assunto indipendente dal segnale ed è modellato come un processo aleatorio stazionario in senso lato che, dalle ben note proprietà presentate nel capitolo 1, ha componenti coseno e seno aventi spettro di potenza

$$P_{nc}(f) = P_{ns}(f) = P_n^-(f - f_0) + P_n^+(f + f_0). \quad (7.12)$$

7.2 Prestazioni su canale non distorto

Per fissare meglio le idee sul comportamento delle varie modulazioni in presenza di rumore, assumiamo che il filtro trasmettente, il canale e il filtro ricevente abbiano un comportamento ideale non distorto. In particolare assumiamo che ogni blocco della catena lineare a valle del modulatore si comporti come un sistema passa-banda ideale a guadagno unitario nella banda che compete la modulazione considerata. Ignorando anche l'inevitabile ritardo nella propagazione del segnale, avremo all'ingresso del demodulatore semplicemente

$$g(t) = z(t) + n(t). \quad (7.13)$$

In questo modello semplificato assumiamo che il rumore abbia un comportamento passa-banda ideale con densità spettrale di potenza

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2} & \forall |f| \in \mathcal{I}_z; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (7.14)$$

La figura 7.2 mostra la densità spettrale del rumore per le varie modulazioni.

L'effetto del rumore all'ingresso del demodulatore è descritto dal rapporto segnale-rumore

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{P_z}{P_n}. \quad (7.15)$$

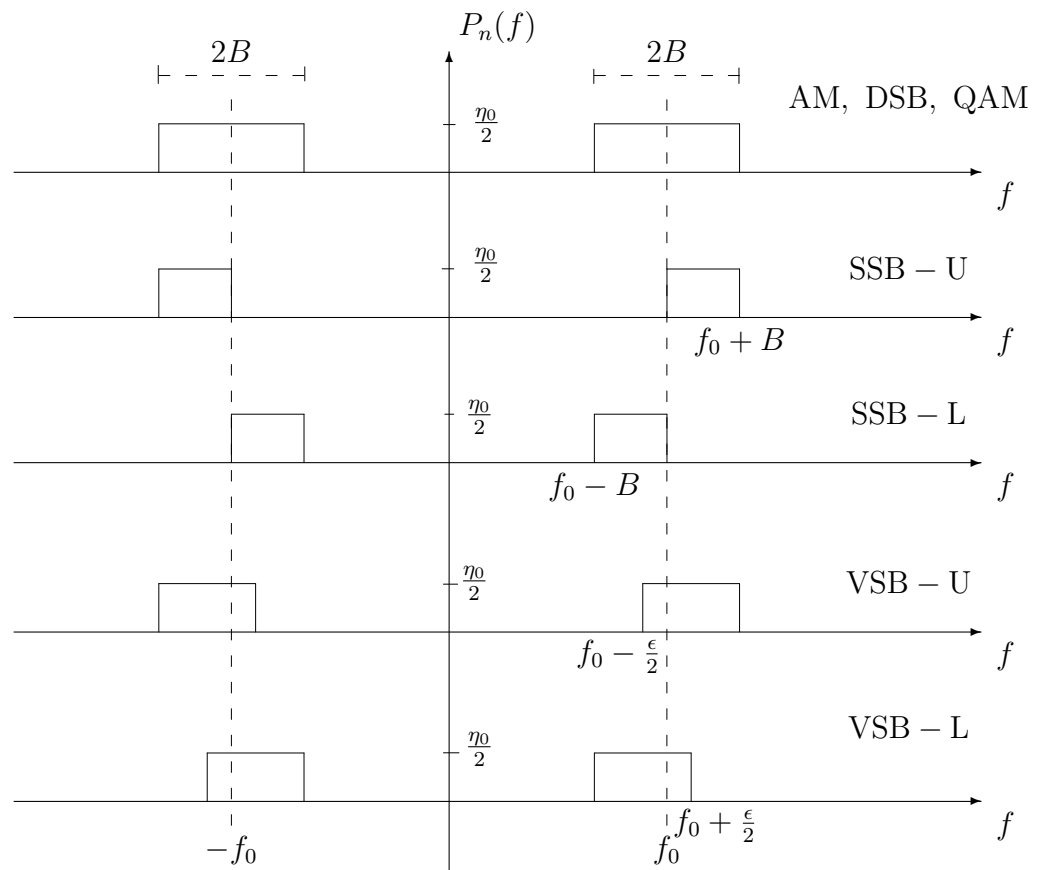


Figura 7.2: Lo spettro di potenza del rumore passa-banda per le varie modulazioni

Dal capitolo 1 e dalla figura 7.2 per le varie modulazioni abbiamo

$$\begin{aligned}
DSB: \quad \bar{P}_z &= \frac{A^2}{2} P_s; \quad P_n = 2\eta_0 B; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2}{4} \frac{P_s}{\eta_0 B}; \\
AM: \quad \bar{P}_z &= \frac{A^2}{2} (1 + k^2 P_s); \quad P_n = 2\eta_0 B; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2}{4} \frac{1+k^2 P_s}{\eta_0 B}; \\
SSB: \quad P_z &= A^2 P_s; \quad P_n = \eta_0 B; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2 P_s}{\eta_0 B}; \\
VSB: \quad \bar{P}_z &= \frac{A^2}{2} (P_s + P_{\bar{s}}); \quad P_n = \left(\frac{\epsilon}{2} + B\right)\eta_0; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2}{2} \frac{P_s + P_{\bar{s}}}{\left(\frac{\epsilon}{2} + B\right)\eta_0}; \\
QAM: \quad \bar{P}_z &= \frac{A^2}{2} (P_{s_1} + P_{s_2}); \quad P_n = 2\eta_0 B; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2}{4} \frac{P_{s_1} + P_{s_2}}{\eta_0 B}.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Nelle espressioni abbiamo usato la potenza media \bar{P}_z per i segnali ciclostazionari. All'uscita del demodulatore coerente abbiamo

$$y(t) = \frac{b}{2} z_c(t) + \frac{b}{2} n_c(t), \tag{7.17}$$

con $z_c(t) = As(t)$ nelle modulazioni DSB, SSB e VSB. L'effetto del rumore all'uscita del demodulatore è descritto dal rapporto segnale-rumore

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{P_{z_c}}{P_{n_c}}. \tag{7.18}$$

Si noti che la componente coseno $n_c(t)$ è diversa a seconda del tipo di modulazione. In particolare guardando alla figura 7.3, per le varie modulazioni abbiamo

$$\begin{aligned}
DSB: \quad P_{z_c} &= A^2 P_s; \quad P_{n_c} = 2\eta_0 B; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A^2 P_s}{2\eta_0 B}; \\
SSB: \quad P_{z_c} &= A^2 P_s; \quad P_{n_c} = \eta_0 B; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A^2 P_s}{\eta_0 B}; \\
VSB: \quad P_{z_c} &= A^2 P_s; \quad P_{n_c} = \left(\frac{\epsilon}{2} + B\right)\eta_0; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A^2 P_s}{\left(\frac{\epsilon}{2} + B\right)\eta_0}.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Nall'AM (ricevuto con un demodulatore coerente) $z_c(t) = A(1 + ks(t))$. Bisogna però ricordare che l'uscita finale $y_0(t)$ la si ottiene rimuovendo la componente continua. Quindi

$$y_0(t) = y(t)|_{HDC} = \frac{b}{2} z_c(t)|_{HDC} + \frac{b}{2} n_c(t)|_{HDC}. \tag{7.20}$$

Supponendo che la rimozione della continua sia ideale, ovvero sia realizzata con un filtro passa-basso a guadagno unitario e una banda oscura molto stretta (a spillo) attorno allo zero, abbiamo $z_c(t)|_{HDC} = Aks(t)$. Questo anche in considerazione del fatto che il segnale $s(t)$ nella modulazione AM non può avere componenti rilevanti attorno allo zero. Assumendo che il

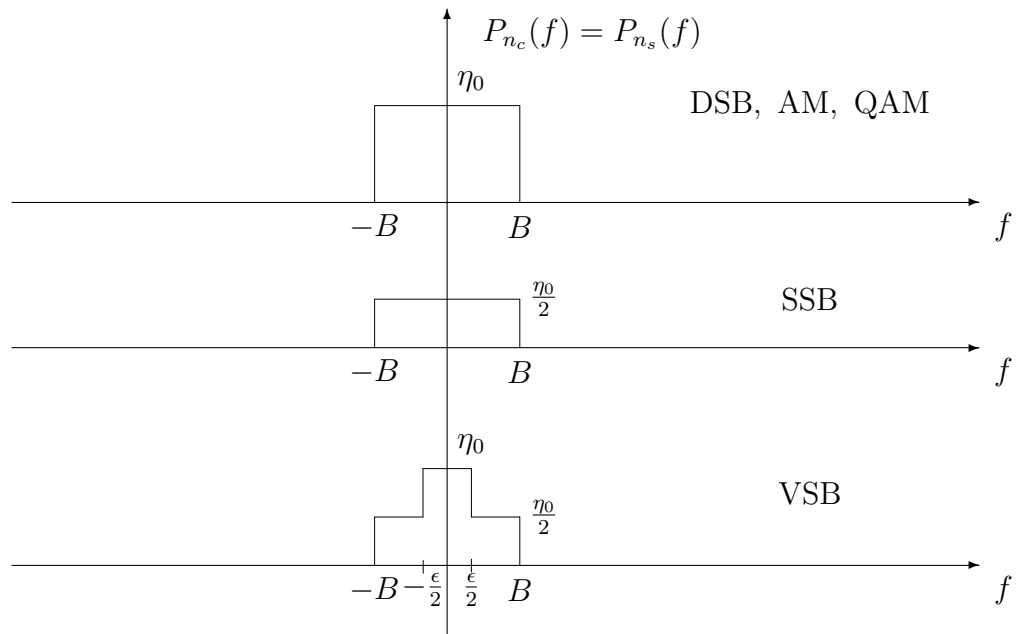


Figura 7.3: Lo spettro di potenza degli equivalenti passa-basso per le varie modulazioni

filtro a spillo abbia un effetto trascurabile anche sulla potenza del rumore, abbiamo

$$AM : P_{z_c(DC)} = A^2 k^2 P_s; P_{n_c(DC)} = 2\eta_0 B; \left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{A^2 k^2 P_s}{2\eta_0 B}; \quad (7.21)$$

Nel demodulatore QAM, le uscite sono

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{Ab}{2} s_1(t) + \frac{b}{2} n_c(t), \\ y_2(t) &= \frac{Ab}{2} s_2(t) + \frac{b}{2} n_s(t); \end{aligned} \quad (7.22)$$

Il rapporto segnale-rumore sulle due uscite è pertanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{out1} &= \frac{A^2 P_{s1}}{2\eta_0 B}; \\ \left(\frac{S}{N}\right)_{out2} &= \frac{A^2 P_{s2}}{2\eta_0 B}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

7.2.1 Demodulazione di inviluppo

Anche se il segnale AM può essere demodulato con un demodulatore coerente, esso è stato introdotto per essere demodulato con un demodulatore di inviluppo. Entro certi limiti, già discussi nel capitolo precedente, anche segnali modulati SSB, VSB e DSB possono essere demodulati con un demodulatore di inviluppo aggiungendo la portante localmente. E' necessario pertanto valutare come si ripercuote all'uscita del demodulatore di inviluppo la presenza di rumore additivo all'ingresso. Essendo l'operazione di estrazione dell'inviluppo una operazione non lineare, c'è da spettarsi un effetto non additivo sull'uscita. Per ottenere dei risultati facilmente interpretabili, discuteremo due casi: un primo in cui il rapporto segnale-rumore all'ingresso è elevato, ovvero $z(t) \gg n(t)$, e il caso opposto in cui $n(t) \gg z(t)$. I casi intermedi dovranno essere estrapolati dai risultati ottenuti.

Valutiamo il caso del segnale modulato AM. All'ingresso del demodulatore abbiamo

$$g(t) = z(t) + n(t) = A(1 + ks(t)) \cos 2\pi f_0 t + n_c(t) \cos 2\pi f_0 t + n_s(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (7.24)$$

All'uscita del demodulatore di inviluppo (assunto ideale) abbiamo

$$\begin{aligned} y(t) &= I_g(t) = |\tilde{g}(t)| = \sqrt{[A(1 + ks(t)) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \\ &= \sqrt{A^2(1 + ks(t))^2 + n_c^2(t) + 2A(1 + ks(t))n_c(t) + n_s^2(t)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Gli effetti del rumore e del segnale sono chiaramente mescolati in maniera non lineare. E' possibile però ottenere delle espressioni approssimate per i due casi seguenti:

$(S/N)_{in}$ elevato:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A(1 + ks(t)) \sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A(1 + ks(t))} + \frac{n_c^2(t) + n_s^2(t)}{A^2(1 + ks(t))^2}} \\
 &\simeq A(1 + ks(t)) \sqrt{1 + \frac{2n_c(t)}{A(1 + ks(t))}} \\
 &\simeq A(1 + ks(t)) \left[1 + \frac{n_c(t)}{A(1 + ks(t))} \right] \\
 &= A(1 + ks(t)) + n_c(t),
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi per rimuovere il terzo termine sotto radice e per utilizzare l'approssimazione $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$, $x \ll 1$. Il risultato mostra come il rivelatore d'involuppo in condizioni di rapporto segnale-rumore elevato si comporta quasi come un demodulatore coerente con la componente coseno del rumore che si aggiunge semplicemente al segnale in uscita. Ovviamente a valle del demodulatore d'involuppo c'è un filtro di blocco della componente continua, che fornisce

$$y_0(t) = y(t)|_{H_{DC}} \simeq A(1 + ks(t))|_{H_{DC}} + n_c(t)|_{H_{DC}}. \tag{7.27}$$

Anche qui supponendo che la rimozione della continua sia ideale, ovvero sia realizzata con un filtro passa-basso a guadagno unitario e una banda oscura molto stretta (a spillo) attorno allo zero, abbiamo $A(1 + ks(t))|_{H_{DC}} = Aks(t)$. Questo anche perché il segnale $s(t)$ nella modulazione AM non può avere componenti rilevanti attorno allo zero. Assumendo che il filtro a spillo abbia un effetto trascurabile anche sulla potenza del rumore, abbiamo un risultato identico a quello ottenuto per il demodulatore coerente

$$\begin{aligned}
 AM : \quad P_{A(1+ks(t))(DC)} &= A^2 k^2 P_s; \quad P_{n_c(DC)} = 2\eta_0 B; \\
 \left(\frac{S}{N}\right)_{out} &\simeq \frac{A^2 k^2 P_s}{2\eta_0 B}; \quad (S/N)_{in} \gg 1.
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

$(S/N)_{in}$ basso:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \sqrt{\frac{A^2(1 + ks(t))^2}{n_c^2(t) + n_s^2(t)} + \frac{2A(1 + ks(t))n_c(t)}{n_c^2(t) + n_s^2(t)} + 1} \\
 &\simeq \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \sqrt{\frac{2A(1 + ks(t))n_c(t)}{n_c^2(t) + n_s^2(t)} + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \left[1 + \frac{A(1 + ks(t))n_c(t)}{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \right] \\
&= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} + \frac{A(1 + ks(t))n_c(t)}{\sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}} \\
&= I_n(t) + A(1 + ks(t)) \cos \phi_n(t), \tag{7.29}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi $z(t) \ll n(t)$ per considerare trascurabile il primo termine sotto radice, e per usare l'approssimazione della radice. Il risultato mostra che in uscita si ha la sovrapposizione dell'involuppo del rumore e del segnale moltiplicato per il coseno della fase di $\tilde{n}(t)$. Questo è distruttivo per il segnale che non può essere recuperato. Si ricordi infatti che se il rumore è gaussiano, la fase $\phi_n(t)$ è uniforme, e $\cos \phi_n(t)$ è un segnale tra -1 e 1 che altera irrimediabilmente la struttura di $A(1 + ks(t))$. Per valutare anche l'uscita del filtro che blocca la componente continua riconosciamo che l'involuppo complesso $I_n(t)$ è distribuito secondo una pdf Rayleigh se $n(t)$ è gaussiano. Inoltre se $s(t)$ è a media nulla, anche $A(1 + ks(t)) \cos \phi_n(t)$ è a media nulla. Quindi il filtro DC rimuove solo la media di $I_n(t)$. Ricordando che la media di una Rayleigh è $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ abbiamo

$$y_0(t) = y(t)|_{H_{DC}} \simeq I_n(t) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{P_n} + A(1 + ks(t)) \cos \phi_n(t). \tag{7.30}$$

Poiché segnale e rumore restano mescolati in maniera non lineare non ha senso parlare di rapporto segnale-rumore.

La conclusione è che la demodulazione di involuppo va usata solo in condizioni di rapporto segnale-rumore sufficientemente elevato per non incorrere in tale effetto distruttivo. Dal punto di vista applicativo è necessario capire dove tra i due estremi si trovi la *soglia* per il rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore al di sotto della quale l'effetto moltiplicativo diventa dominante. Si assume in pratica che tale soglia sia il valore del rapporto segnale-rumore corrispondente all'ampiezza della portante A che supera I_n con probabilità del 99%.

La valutazione numerica è abbastanza semplice ricordando che la cdf della Rayleigh è $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}u(x)$. Pertanto l'ampiezza di soglia A_s si valuta come di seguito

$$\begin{aligned}
Pr\{A_s > I_n\} &= 0.99; & 1 - e^{-\frac{A_s^2}{2P_n}} &= 0.99; & A_s^2 &= P_n \cdot 2 \ln \frac{1}{0.01}; \\
A_s^2 &= P_n \cdot 9.2103. & & & & \tag{7.31}
\end{aligned}$$

Da questo segue il rapporto segnale-rumore di soglia assumendo per $K^2 P_s$ un valore tipico di 0.3

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in-soglia} = \frac{A_s^2(1 + k^2 P_s)}{2\eta_0 B} = 9.21 \cdot 1.3 \simeq 12 \simeq 10 \text{ dB}. \quad (7.32)$$

Un ulteriore approfondimento sulla demodulazione di involuppo per le altre modulazioni è suggerito nei problemi.

7.2.2 Confronto tra le varie modulazioni

I vari schemi di modulazione lineare sono stati analizzati nei rapporti segnale-rumore all'ingresso e all'uscita. Sorge naturale chiedersi se si possa operare un confronto tra le varie modulazioni che tenga conto della potenza trasmessa, della banda occupata e del rumore presente sul canale. Infatti in alcune delle modulazioni, quali la SSB, la QAM e la VSB la banda occupata sul canale è inferiore a quella necessaria alla DSB e all'AM, quindi anche la potenza di rumore che entra nel ricevitore è inferiore. C'è quindi una convenienza intrinseca nell'usare una modulazione piuttosto che un'altra?

Una prima valutazione è il confronto tra il rapporto segnale-rumore all'ingresso del ricevitore $\left(\frac{S}{N}\right)_{in}$ con quello in uscita $\left(\frac{S}{N}\right)_{out}$. Il demodulatore infatti nei casi a doppia banda laterale raccoglie il segnale all'ingresso su una banda più larga e consente un miglioramento.

Un altro aspetto molto importante è la valutazione delle prestazioni in funzione della potenza trasmessa P_z . E' evidente che aumentando la potenza in trasmissione, il rapporto segnale-rumore a destinazione migliora, ma è necessario valutare come ciò avvenga nelle varie modulazioni. Pertanto l'espressione del rapporto segnale-rumore viene riscritta qui di seguito con l'indicazione esplicita di P_z .

E' comune nella letteratura tenere in conto P_z mediante l'unica variabile adimensionale

$$\gamma = \frac{\text{Potenza del segnale trasmesso}}{\eta_0 B} = \frac{P_z}{\eta_0 B}, \quad (7.33)$$

che è direttamente proporzionale alla potenza trasmessa e inversamente proporzionale ad un fattore fisso che dipende dalla densità di rumore e dalla banda del segnale modulante.

Riscriviamo qui di seguito il rapporto segnale-rumore in uscita in per le varie modulazioni in funzione di $\left(\frac{S}{N}\right)_{in}$, P_z e γ . Useremo la potenza

media \bar{P}_z o la potenza P_z a seconda se si tratti di segnale ciclostazionario o stazionario.

Modulazione DSB:

$$\bar{P}_z = \frac{A^2}{2} P_s; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = 2 \left(\frac{S}{N} \right)_{in} = \frac{\bar{P}_z}{\eta_0 B}; \quad (7.34)$$

$$\gamma = \frac{A^2 P_s}{2 \eta_0 B}; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \gamma; \quad (7.35)$$

Modulazione SSB:

$$P_z = A^2 P_s; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \left(\frac{S}{N} \right)_{in} = \frac{P_z}{\eta_0 B}; \quad (7.36)$$

$$\gamma = \frac{A^2 P_s}{\eta_0 B}; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \gamma \quad (7.37)$$

Modulazione VSB:

$$\bar{P}_z = \frac{A^2}{2} (P_s + P_s); \quad (7.38)$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{2}{1 + \frac{P_s}{P_s}} \left(\frac{S}{N} \right)_{in} = \frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{2} + B \right) \eta_0} \frac{2}{1 + \frac{P_s}{P_s}} \bar{P}_z; \quad (7.39)$$

$$\gamma = \frac{A^2 (P_s + P_s)}{2 \eta_0 B}; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2B}} \frac{2}{1 + \frac{P_s}{P_s}} \gamma. \quad (7.40)$$

Se la banda ϵ fosse nulla, avremmo una modulazione SSB con $P_s = P_s = P_s$. Poichè la banda di transizione è piccola, se assumiamo che $P_s \simeq P_s = P_s$, abbiamo

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out} \simeq \left(\frac{S}{N} \right)_{in} \simeq \frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{2} + B \right) \eta_0} \bar{P}_z \simeq \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2B}} \gamma. \quad (7.41)$$

I fattori che moltiplicano \bar{P}_z e γ sono peggiorativi rispetto a DSB e SSB.

Modulazione AM (con demodulazione coerente):

$$\bar{P}_z = \frac{A^2}{2} (1 + k^2 P_s); \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{2}{1 + \frac{1}{k^2 P_s}} \left(\frac{S}{N} \right)_{in} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 P_s}} \frac{\bar{P}_z}{\eta_0 B}; \quad (7.42)$$

$$\gamma = \frac{A^2 (1 + k^2 P_s)}{2 \eta_0 B}; \quad \left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 P_s}} \gamma. \quad (7.43)$$

Si noti che il rapporto segnale-rumore in uscita è migliore di quello in ingresso, ma il miglioramento è inferiore a quello relativo alla DSB. Inoltre

il termine che moltiplica γ è < 1 , quindi è peggiorativo per il rapporto segnale-rumore.

Con il demodulatore d'inviluppo si ha approssimativamente lo stesso risultato quando il rapporto segnale-rumore all'ingresso è elevato, ovvero è al di sopra di una soglia. La soglia per γ è assunta essere dell'ordine

$$\gamma_{soglia} = \frac{A_s^2(1 + kP_s)}{\eta_0 B} = \frac{2A_s^2(1 + kP_s)}{P_n} \simeq 24 \simeq 13 \text{ dB}. \quad (7.44)$$

Modulazione QAM:

Poiché il segnale $z(t)$ trasporta due segnali, valutiamo le prestazioni rispetto a uno dei due supponendo di contare all'ingresso per ognuno metà della potenza spesa sul canale, ovvero

$$\frac{\bar{P}_z}{2} = \frac{A^2}{4}(P_{s1} + P_{s2}). \quad (7.45)$$

Il rapporto segnale-rumore all'ingresso da attribuire a ognuno non cambia poiché nel computo globale dobbiamo usare anche mezza banda. Supponendo per semplicità che i due segnali modulanti abbiano la stessa potenza, abbiamo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out1} = \left(\frac{S}{N}\right)_{in1} = \frac{\bar{P}_z/2}{\eta_0 B}. \quad (7.46)$$

Anche la definizione di γ deve fare riferimento a metà potenza e quindi

$$\gamma_1 = \frac{\bar{P}_z/2}{\eta_0 B} = \frac{A^2}{2} \frac{P_{s1}}{\eta_0 B}; \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{out1} = \gamma_1. \quad (7.47)$$

Confronto: I risultati sono tutti descritti nel grafico di figura 7.4 in funzione del parametro γ . Le prestazioni di DSB, SSB, QAM seguono l'andamento di γ e sono equivalenti rispetto alla potenza trasmessa. Un leggero peggioramento c'è nella modulazione VSB che aumenta all'aumentare della banda vestigiale ϵ . Nella modulazione AM, l'andamento è lineare su tutto il range di γ se si usa un demodulatore coerente con un peggioramento che dipende dal coefficiente di modulazione k a causa della potenza spesa sulla portante. Al crescere di k le prestazioni tendono a quelle del DSB. Nella modulazione AM con demodulazione di inviluppo, al di sotto di una soglia (attorno ai 10 dB) le prestazioni diventano catastrofiche. La figura mostra anche lo stesso grafico con γ e $(S/N)_{out}$ espressi in dB

$$\begin{aligned} DSB, SSB, QAM : \quad & \left(\frac{S}{N}\right)_{out \text{ dB}} = \gamma_{dB}; \\ VSB : \quad & \left(\frac{S}{N}\right)_{out \text{ dB}} \simeq 10 \log_{10} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2B}} + \gamma_{dB}; \\ AM : \quad & \left(\frac{S}{N}\right)_{out \text{ dB}} = 10 \log_{10} \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 P_s}} + \gamma_{dB}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

7.3 Interpretazione grafica

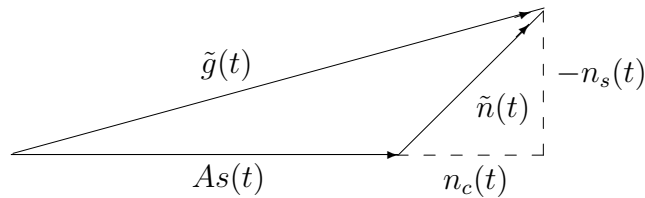
La descrizione in termini di involuপি complessi per le varie modulazioni consente una utile interpretazione grafica nel piano complesso. Si evidenzia in maniera efficace sia l'operazione di modulazione che di demodulazione. L'involuppo complesso all'ingresso del demodulatore è

$$\tilde{g}(t) = \tilde{z}(t) + \tilde{n}(t). \quad (7.49)$$

Per le varie modulazioni abbiamo:

DSB:

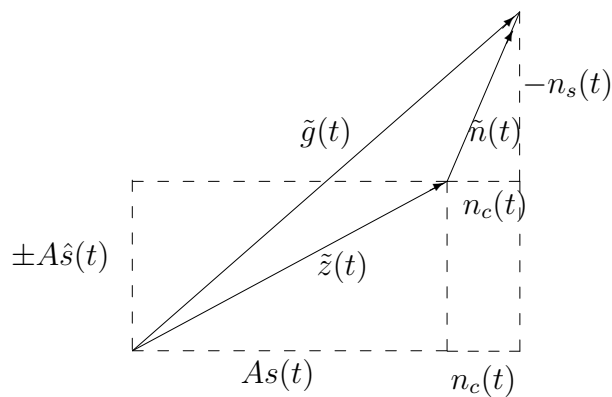
$$\tilde{z}(t) = As(t); \quad (7.50)$$



Il demodulatore coerente estrae (a meno di una costante moltiplicativa) la componente coseno (proiezione sull'asse reale) di $\tilde{g}(t)$ che è $As(t) + n_c(t)$.

SSB:

$$\tilde{z}(t) = As(t) \pm jA\hat{s}(t); \quad (7.51)$$



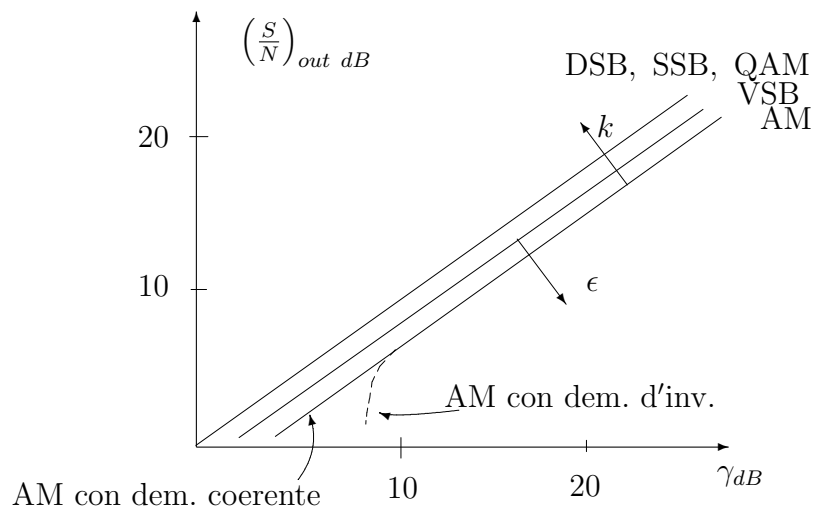
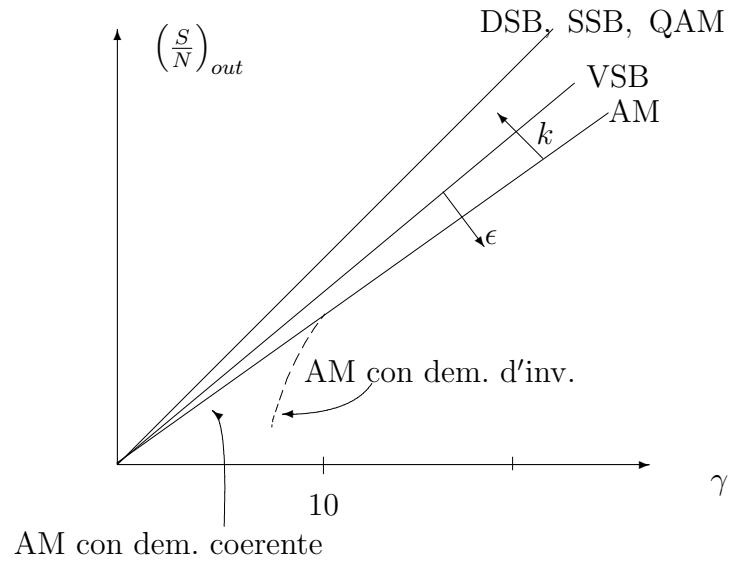
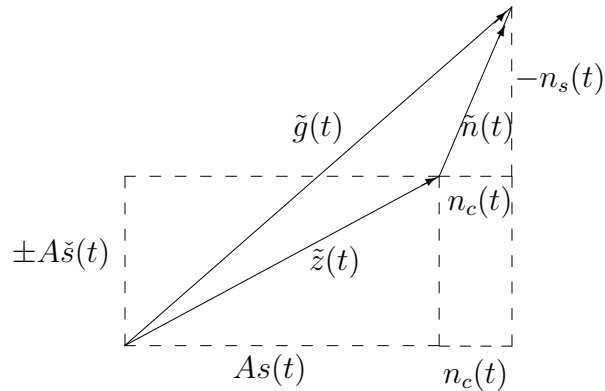


Figura 7.4: Il confronto tra le prestazioni delle modulazioni lineari in funzione di γ

Il demodulatore coerente estrae (a meno di una costante moltiplicativa) la componente coseno (proiezione sull'asse reale) di $\tilde{g}(t)$ che è $As(t) + n_c(t)$.

VSB:

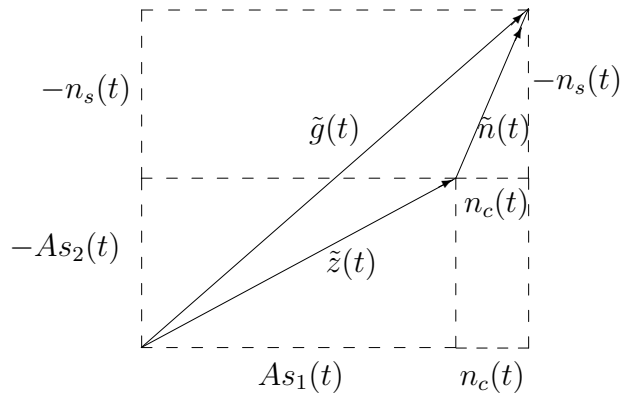
$$\tilde{z}(t) = As(t) \pm jA\check{s}(t); \quad (7.52)$$



Il demodulatore coerente estrae (a meno di una costante moltiplicativa) la componente coseno (proiezione sull'asse reale) di $\tilde{g}(t)$ che è $As_1(t) + n_c(t)$.

QAM:

$$\tilde{z}(t) = As_1(t) - jAs_2(t); \quad (7.53)$$

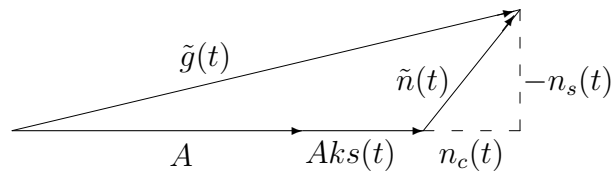


Il demodulatore coerente estrae (a meno di una costante moltiplicativa) la componente coseno (proiezione sull'asse reale) di $\tilde{g}(t)$ che è $As_1(t) + n_c(t)$ e

la componente seno (proiezione sull'asse immaginario) col segno cambiato, ovvero $As_2(t) + n_s(t)$.

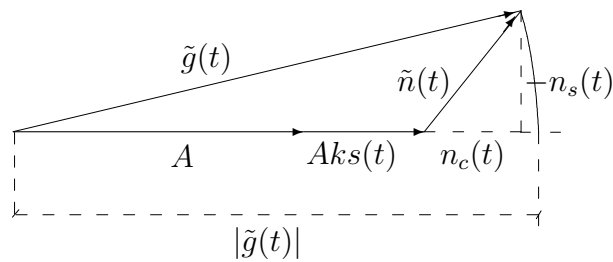
AM (con demodulatore coerente):

$$\tilde{z}(t) = A(1 + ks(t)); \quad (7.54)$$



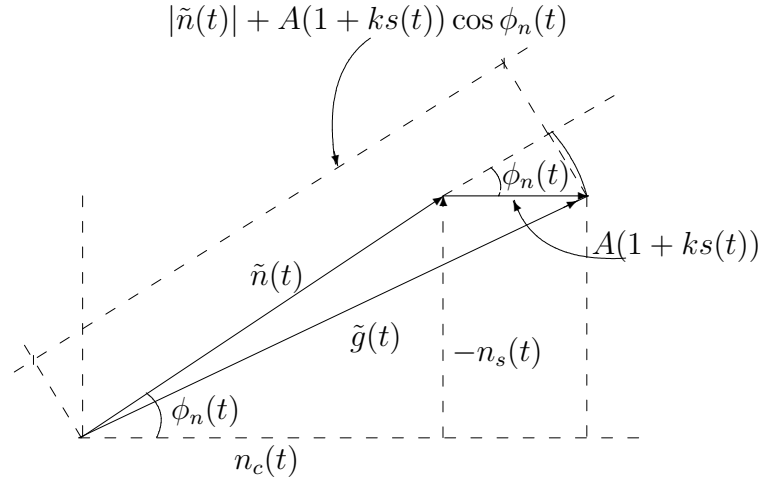
Il demodulatore coerente estrae (a meno di una costante moltiplicativa) la componente coseno (proiezione sull'asse reale) di $\tilde{g}(t)$ che è $A(1 + ks(t)) + n_c(t)$.

AM (con demodulatore d'involuppo, $(S/N)_{in} \gg 1$):



La figura mostra come il demodulatore d'involuppo riveli $|\tilde{g}(t)|$ che non è molto diverso dalla componente coseno di $\tilde{g}(t)$ se $n(t)$ non è molto grande rispetto a $A(1 + ks(t))$.

AM (con demodulatore d'involuppo, $(S/N)_{in} \ll 1$):



La figura mostra come il demodulatore d'involuppo che estrae $|\tilde{g}(t)|$ nel caso di rumore preponderante rispetto al segnale, dà in uscita $\simeq |\tilde{n}(t)| + A(1 + ks(t)) \cos \phi_n(t)$. Si noti nella figura la differenza con $|\tilde{g}(t)|$.

7.4 Errore di fase nel demodulatore coerente

Per tutti gli schemi di modulazione che usano un demodulatore coerente, le prestazioni peggiorano se c'è un errore di fase nell'oscillatore locale. Detto θ tale errore con riferimento ad un segnale generico $g(t) = z(t) + n(t)$, abbiamo che i due rami di un demodulatore coerente restituiscono rispettivamente

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{g_c(t)}{2} \cos \theta - \frac{g_s(t)}{2} \sin \theta \\ y_2(t) &= \frac{g_c(t)}{2} \sin \theta + \frac{g_s(t)}{2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Evidenziando segnale modulato e rumore abbiamo

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{z_c(t) + n_c(t)}{2} \cos \theta - \frac{z_s(t) + n_s(t)}{2} \sin \theta \\ y_2(t) &= \frac{z_c(t) + n_c(t)}{2} \sin \theta + \frac{z_s(t) + n_s(t)}{2} \cos \theta, \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \frac{z_c(t)}{2} \cos \theta - \frac{z_s(t)}{2} \sin \theta + \frac{n_c(t)}{2} \cos \theta - \frac{n_s(t)}{2} \sin \theta \\
 y_2(t) &= \frac{z_c(t)}{2} \sin \theta + \frac{z_s(t)}{2} \cos \theta + \frac{n_c(t)}{2} \sin \theta + \frac{n_s(t)}{2} \cos \theta. \quad (7.57)
 \end{aligned}$$

Su questa espressione è immediato valutare cosa succede nei vari formati di modulazione.

Per esempio nella DSB non c'è componente seno nel segnale modulato e il demodulatore coerente restituisce

$$y_1(t) = \frac{As(t)}{2} \cos \theta + \frac{n_c(t)}{2} \cos \theta - \frac{n_s(t)}{2} \sin \theta. \quad (7.58)$$

La potenza di segnale si è ridotta di un fattore $\cos^2 \theta$ mentre la potenza di rumore resta invariata poichè

$$\frac{P_{n_c} \cos^2 \theta}{4} + \frac{P_{n_s} \sin^2 \theta}{4} = \frac{P_{n_c}}{4}. \quad (7.59)$$

Nei problemi è soggetto un approfondimento per AM, SSB, e VSB.

Nella modulazione QAM l'errore di fase causa una interferenza co-canale. Anche se la potenza di rumore proveniente dal canale è la stessa del caso coerente, il rapporto segnale-rumore va definito come rapporto tra la potenza della componente di segnale desiderato e la somma delle potenze connesse al rumore dal canale e all'interferenza. Anche quest'analisi è suggerita nei problemi.

La figura 7.5 mostra graficamente che nel piano dell'involuppo complesso l'effetto dell'errore di fase è una semplice rotazione degli assi di riferimento.

7.5 Problemi

Problema 7.1 Si studi il comportamento del demodulatore d'involuppo dopo l'aggiunta locale della portante in presenza di rumore per la modulazione DSB, SSB e VSB.

Problema 7.2 Si valuti il rapporto segnale-rumore all'uscita di un demodulatore coerente che ha un errore di fase nell'oscillatore locale per segnali AM, SSB e VSB.

Problema 7.3 Si studi il comportamento del demodulatore QAM in presenza di rumore sul canale e di un errore di fase nell'oscillatore locale. Il rapporto segnale-rumore su ognuna delle due uscite deve tenere in conto anche il disturbo dall'interferenza co-canale.

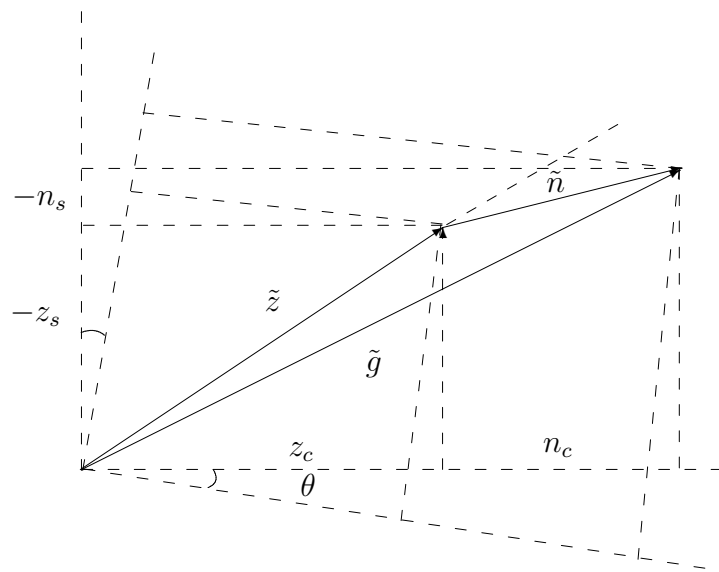


Figura 7.5: L'effetto dell'errore di fase del demodulatore nel piano dell'involuppo complesso.

Capitolo 8

Modulazione Angolare

In questo capitolo viene introdotta la modulazione angolare senza rumore. In particolare vengono discusse la modulazione di frequenza e la modulazione di fase. Il segnale modulato in angolo viene caratterizzato dal punto di vista spettrale.

8.1 Introduzione

Nella modulazione su portante sinusoidale l'informazione viene trasportata dalle variazioni istantanee di uno o più parametri di una sinusoidale. Nel caso nella modulazione angolare, alla variazione lineare della fase viene aggiunto una funzione $\psi(t)$ che dipende dal segnale modulante $s(t)$

$$z(t) = A \cos \phi(t) = A \cos (2\pi f_0 t + \psi(t)), \quad (8.1)$$

La relazione tra $\psi(t)$ e $s(t)$ determina il tipo di modulazione. Il segnale modulato in angolo può essere pensato come un segnale sinusoidale su cui è stata indotta una deformazione dell'asse dei tempi. Il segnale $z(t)$ è infatti la portante $A \cos 2\pi f_0 t$ con la variabile t rimpiazzata dalla funzione

$$m(t) = t + \frac{1}{2\pi f_0} \psi(t). \quad (8.2)$$

Nella *modulazione di fase (PM, Phase Modulation)* $\psi(t)$ è direttamente proporzionale al segnale modulante

$$\psi(t) = s_\phi s(t), \quad (8.3)$$

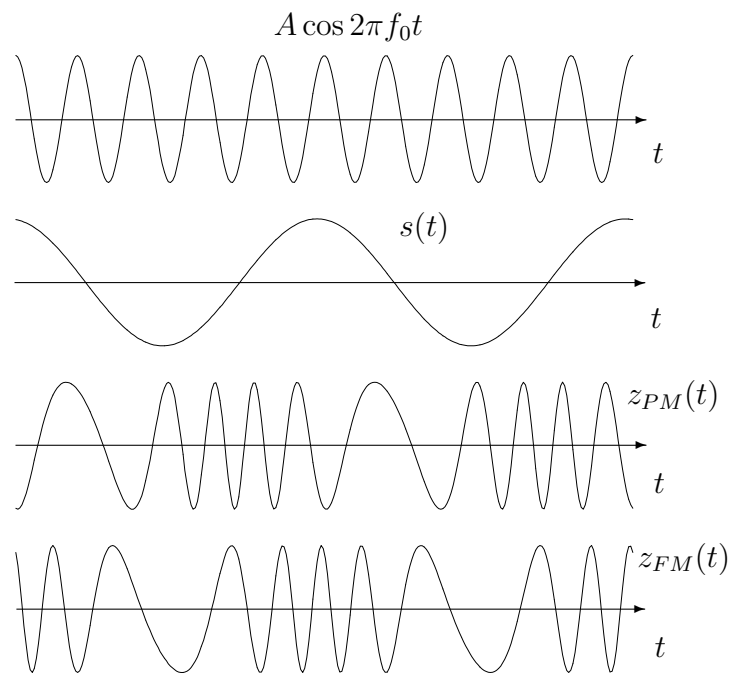


Figura 8.1: Un segmento di: portante, segnale modulante, segnale PM e segnale FM.

dove il parametro costante s_ϕ è detto *coefficiente di modulazione di fase*. Nella *modulazione di frequenza (FM, Frequency Modulation)* invece

$$\psi(t) = s_f \int^t s(\xi) d\xi, \quad (8.4)$$

dove s_f è il *coefficiente di modulazione di frequenza*.

La *frequenza istantanea* del segnale modulato è

$$f_z(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi f_0 t + \psi(t)) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t), \quad (8.5)$$

ed è linearmente dipendente dalla derivata della funzione $\psi(t)$. Quindi la nomenclatura è immediata se valutiamo la frequenza istantanea nei due casi

$$PM : \quad f_z(t) = f_0 + \frac{s_\phi}{2\pi} \dot{s}(t); \quad FM : \quad f_z(t) = f_0 + \frac{s_f}{2\pi} s(t). \quad (8.6)$$

Nella PM è la fase istantanea ad essere legata linearmente al segnale modulante, mentre nella FM tale ruolo è conferito alla frequenza istantanea. Si noti l'omissione del limite inferiore nell'integrale per il segnale FM, poiché esso è irrilevante ai fini della frequenza istantanea. Chiaramente le due modulazioni sono strettamente legate in quanto la PM è l'FM della derivata di $s(t)$, mentre l'FM è la PM dell'integrale di $s(t)$.

La figura 8.1 mostra graficamente un segmento di portante, di segnale modulante $s(t)$ e il corrispondente segnale modulato in fase e in frequenza. Si noti come le oscillazioni si infittiscono proporzionalmente al segnale modulante nell'FM e proporzionalmente alla derivata nella PM. Si noti anche come la frequenza istantanea sia valutabile contando il numero di intersezioni con lo zero (*zero crossings*) per unità di tempo.

Si definisce *deviazione di frequenza istantanea*, la variazione della frequenza istantanea attorno a f_0

$$\Delta f_z(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t), \quad (8.7)$$

che nei due casi è

$$PM : \quad \Delta f_z(t) = \frac{s_\phi}{2\pi} \dot{s}(t); \quad FM : \quad \Delta f_z(t) = \frac{s_f}{2\pi} s(t). \quad (8.8)$$

Assumendo che la derivata di $\psi(t)$ sia limitata, i.e. $|\dot{\psi}(t)| < |\dot{\psi}(t)|_{max}$, la *massima deviazione di frequenza* è

$$|\Delta f_z|_{max} = \frac{1}{2\pi} |\dot{\psi}(t)|_{max}. \quad (8.9)$$

Nei due casi PM e FM abbiamo

$$PM : \quad |\Delta f_z|_{max} = \frac{s_\phi}{2\pi} |\dot{s}(t)|_{max}; \quad FM : \quad |\Delta f_z|_{max} = \frac{s_f}{2\pi} |s(t)|_{max}. \quad (8.10)$$

La massima deviazione di frequenza determina approssimativamente la banda occupata dal segnale modulato come sarà discusso in seguito.

8.1.1 Invertibilità

La domanda naturale che ci si pone quando si definisce uno schema di modulazione, è se dal segnale modulato si possa risalire in maniera univoca al segnale modulante. Nel caso della modulazione angolare basta richiedere che la trasformazione tra t e $m(t)$ sia univoca. Questo impone che $m(t)$ sia strettamente crescente, ovvero

$$\dot{m}(t) = 1 + \frac{1}{2\pi f_0} \dot{\psi}(t) > 0 \quad \forall t. \quad (8.11)$$

La condizione richiede che la frequenza istantanea resti positiva su tutto l'asse dei tempi. In caso contrario si avrebbero dei ribaltamenti dell'asse dei tempi su se stesso con conseguente ambiguità di fase (fenomeno cosiddetto dell'*arrovolamento della fase*). La condizione è in generale

$$f_0 > \frac{1}{2\pi} |\dot{\psi}(t)|_{max}, \quad (8.12)$$

ovvero la frequenza della portante deve essere sufficientemente elevata rispetto alle massime variazioni della frequenza istantanea del segnale modulante. In particolare nell'FM e nella PM abbiamo che

$$PM : \quad f_0 > \frac{s_\phi}{2\pi} |\dot{s}(t)|_{max}; \quad FM : \quad f_0 > \frac{s_f}{2\pi} |s(t)|_{max}. \quad (8.13)$$

La Figura 8.2 mostra due segmenti di segnali FM. Nel primo la condizione $\dot{m}(t) > 0$ è rispettata, mentre nel secondo ci sono dei segmenti in cui $\dot{m}(t) < 0$. Questi creano ambiguità e “rompono” la struttura localmente sinusoidale del segnale modulato alterando anche le intersezioni con lo zero. Nel secondo caso si è forzata la frequenza istantanea aumentando s_f e quindi creando degli sconfinamenti della frequenza istantanea in valori negativi.

La condizione $\dot{m}(t) > 0$ è comunque piuttosto lasca poichè, come vedremo in seguito, la frequenza f_0 è in genere elevata rispetto alla banda occupata dal segnale modulato, che dipende da s_ϕ e $|\dot{s}(t)|_{max}$ nella PM e da s_f e $|s(t)|_{max}$ nell'FM.

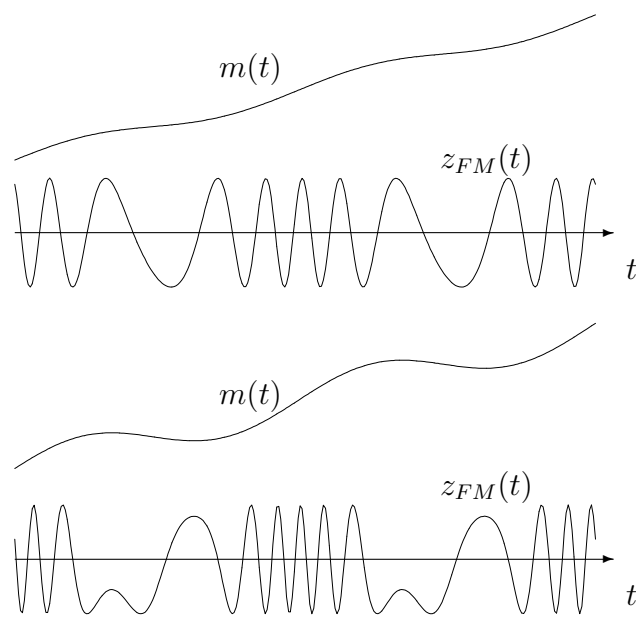


Figura 8.2: Due segmenti di segnali FM. La condizione $\dot{m}(t) > 0$ è rispettata nel primo e violata nel secondo.

8.2 Modulazione angolare a banda stretta

Lo studio del segnale modulato in angolo è di gran lunga più complicato di quello della modulazione lineare in quanto il segnale modulante entra nell'argomento del coseno e costituisce una trasformazione fortemente non lineare. In realtà l'occupazione in frequenza del segnale modulato in angolo è infinita. Infatti esprimendo il segnale modulato come

$$z(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)) = A \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_0 t} e^{j\psi(t)} \right], \quad (8.14)$$

ed espandendo il secondo esponenziale

$$e^{j\psi(t)} = 1 + j\psi(t) + j^2\psi^2(t) + j^3\psi^3(t) + \dots \quad (8.15)$$

il segnale si può scrivere come

$$z(t) = A \operatorname{Re} \left[\left(1 + j\psi(t) - \psi^2(t) - j\psi^3(t) + \dots \right) e^{j2\pi f_0 t} \right]. \quad (8.16)$$

Da questa espressione si evince che l'involuppo complesso ha uno spettro che è infinitamente largo poiché ogni termine $\psi^n(t)$ ha uno spettro n volte più largo di $\psi(t)$ in quanto

$$\mathcal{F}[\psi^n(t)] = (\Psi * \Psi * \dots * \Psi)(f), \quad (8.17)$$

ovvero la trasformata di $\psi^n(t)$ è la convoluzione della trasformata $\Psi(f)$ con se stessa n volte.

Lo studio delle caratteristiche del segnale modulato in angolo è un pò insidioso e si esegue considerando casi particolari e opportune approssimazioni. Il primo caso utile da considerare è quello in cui le variazioni di fase sono molto piccole, ovvero quando

$$|\psi(t)| \ll 1. \quad (8.18)$$

In tal caso troncando l'espansione di $e^{j\psi(t)}$ al secondo termine, abbiamo

$$z(t) \simeq A \operatorname{Re} \left[(1 + j\psi(t)) e^{j2\pi f_0 t} \right] = A \cos 2\pi f_0 t - A\psi(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (8.19)$$

Il segnale modulato in angolo con $|\psi(t)| \ll 1$ è approssimativamente la sovrapposizione della portante e di un segnale DSB in quadratura con segnale modulante $-\psi(t)$. Denominiamo pertanto il secondo termine dell'equazione *segnale modulato in angolo a banda stretta*

$$z_s(t) = A \cos 2\pi f_0 t - A\psi(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad (8.20)$$

e cerchiamo di studiarlo nel dettaglio. Nel dominio della frequenza $z_s(t)$ diventa

$$Z_s(f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) - \frac{A}{2j} (\Psi(f - f_0) - \Psi(f + f_0)). \quad (8.21)$$

Poiché

$$PM : \quad \Psi(f) = s_\phi S(f); \quad FM : \quad \Psi(f) = \frac{sf}{j2\pi f} S(f), \quad (8.22)$$

abbiamo che il segnale PM a banda stretta ha trasformata di Fourier

$$Z_s(f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) - \frac{As_\phi}{2j} (S(f - f_0) - S(f + f_0)), \quad (8.23)$$

e l'FM a banda stretta

$$Z_s(f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{As_f}{4\pi} \left(\frac{S(f - f_0)}{f - f_0} - \frac{S(f + f_0)}{f + f_0} \right). \quad (8.24)$$

Sia nella PM che nell'FM a banda stretta, abbiamo nel dominio della frequenza due delta di Dirac a $\pm f_0$ e delle bande laterali, che per segnale modulante avente frequenza massima B , occupano $2B$ attorno a $\pm f_0$. Si tratta di un segnale molto simile a quelli della modulazione lineare e in particolare all'AM. La peculiarità di $z_s(t)$ si vede evidenziando involuppo e fase istantanea

$$z_s(t) = A\sqrt{1 + \psi^2(t)} \cos(2\pi f_0 t + \arctan \psi(t)). \quad (8.25)$$

Quindi, poiché $|\psi(t)| \ll 1$, il segnale “debolmente” modulato in angolo è circa una sinusoide modulata (debolmente) in fase ($\arctan \psi(t) \simeq \psi(t)$), e (molto debolmente) in involuppo ($\sqrt{1 + \psi^2(t)} \simeq 1$).

8.2.1 La versione analitica

La natura del segnale a banda stretta è ancora più evidente se valutiamo il segnale analitico

$$\overset{\circ}{z}_s(t) = A(1 + j\psi(t))e^{j2\pi f_0 t}, \quad (8.26)$$

e l'involuppo complesso

$$\tilde{z}_s(t) = A + jA\psi(t). \quad (8.27)$$

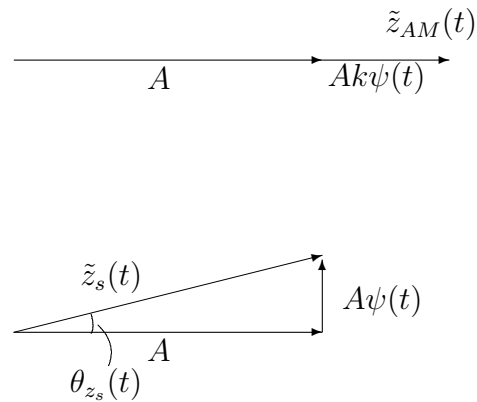


Figura 8.3: L'involuppo complesso a confronto di un segnale AM e di un segnale modulato in angolo a banda stretta.

Il segnale $z_s(t)$, messo a confronto con un segnale modulato AM, in cui avremmo $\tilde{z}_{AM}(t) = A + Ak\psi(t)$, è mostrato in Figura 8.3. Il diagramma vettoriale nel piano dell'involuppo complesso evidenzia come nell'AM il segnale sia tutto confinato all'asse delle ascisse, mentre nel nostro caso una modulazione angolare viene impressa mediante la presenza della componente seno $-A\psi(t)$. Se $\psi(t)$ è piccolo, la modulazione di ampiezza spuria è trascurabile e la fase di $\tilde{z}_s(t)$ è quasi proporzionale a $\psi(t)$.

8.2.2 Il modulatore di Armstrong

L'espressione approssimata (8.19) del segnale modulato in angolo quando $|\phi(t)| \ll 1$, suggerisce che per generare un segnale modulato PM o FM a banda stretta si può utilizzare il modulatore di Figura 8.4. Lo schema, detto modulatore di Armstrong, ha all'ingresso $\psi(t)$ proporzionale al segnale modulante $s(t)$ per generare un segnale PM, e all'integrale di $s(t)$ per un segnale FM. Il segnale ottenuto $z_s(t)$ viene spesso utilizzato come primo stadio per generare segnali FM e PM a banda larga. Al modulatore di Armstrong vengono fatti seguire uno o più moltiplicatori e convertitori di frequenza, che allargano la banda e determinano la frequenza di centro banda. Tali sistemi saranno presentati in seguito.

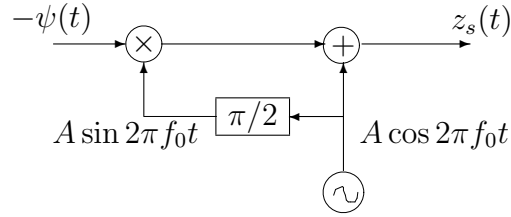


Figura 8.4: Il modulatore di Armstrong

8.2.3 Potenza e densità spettrale

Il segnale $z_s(t)$, per segnale $\psi(t)$ aleatorio, rientra nella classe dei segnali della modulazione lineare descritti nel Capitolo 2. Nel nostro caso $x_c(t) = A$ e $x_s(t) = -A\psi(t)$ e le condizioni di bilanciamento sono violate. Il segnale pertanto è ciclostazionario con autocorrelazione media descritta dall'equazione (2.145) che qui diventa

$$\bar{R}_{z_s}(\tau) = \frac{A^2 + A^2 R_\psi(\tau)}{2} \cos 2\pi f_0 \tau, \quad (8.28)$$

avendo assunto media nulla per $\psi(t)$ e quindi $R_{x_c x_s}(\tau) = E[A^2 \psi(t - \tau)] = 0$. La potenza media di $z_s(t)$ è la somma della potenza media della portante e delle bande laterali, ovvero

$$\bar{P}_{z_s} = \bar{R}_{z_s}(0) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} P_\psi. \quad (8.29)$$

Lo spettro di potenza medio è

$$\bar{P}_{z_s}(f) = \frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{A^2}{4} (P_\psi(f - f_0) + P_\psi(f + f_0)). \quad (8.30)$$

Poiché

$$PM : P_\psi(f) = s_\phi^2 P_s(f); \quad FM : P_\psi(f) = \frac{s_f^2}{4\pi^2 f^2} P_s(f), \quad (8.31)$$

abbiamo che nella PM

$$\bar{P}_{z_s}(f) = \frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{A^2 s_\phi^2}{4} (P_s(f - f_0) + P_s(f + f_0)), \quad (8.32)$$

e nell'FM

$$\bar{P}_{z_s}(f) = \frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{A^2 s_f^2}{16\pi^2} \left(\frac{P_s(f - f_0)}{(f - f_0)^2} + \frac{P_s(f + f_0)}{(f + f_0)^2} \right). \quad (8.33)$$

8.3 Modulazione a banda larga

L'utilità della modulazione angolare nelle applicazioni è collegata alla capacità di poter associare al segnale di informazione una banda più larga rispetto a quelle occupate dalle modulazioni lineari in cui $B < W < 2B$. Come vedremo dalle analisi che seguono, la maggiore occupazione in frequenza conferisce al segnale modulato in angolo maggiore robustezza rispetto al rumore, se il rapporto segnale-rumore è sufficientemente elevato. Avendo già considerato il caso a banda stretta, è necessario considerare ora valori più elevati di $\psi(t)$. Sfortunatamente, come già accennato in precedenza, l'analisi del segnale modulato per $\psi(t)$ generico non è possibile in forma chiusa ed è necessario limitarsi a considerare dei casi particolari. Lo scenario generale dovrà essere ottenuto come estrapolazione di quelli analizzati.

8.3.1 Modulante sinusoidale

Studiamo cosa succede al segnale modulato quando il segnale modulante è una semplice senoide a frequenza f_m

$$s(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \theta_m). \quad (8.34)$$

Il segnale modulato PM è

$$z(t) = A \cos(2\pi f_0 t + s_\phi A_m \cos(2\pi f_m t + \theta_m)), \quad (8.35)$$

e quello FM

$$z(t) = A \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{s_f A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t + \theta_m)\right), \quad (8.36)$$

La deviazione di frequenza istantanea e la deviazione di frequenza massima sono nei due casi

$$PM : \Delta f_z(t) = -s_\phi A_m f_m \sin(2\pi f_m t + \theta_m); \quad |\Delta f_z|_{max} = s_\phi A_m f_m \quad (8.37)$$

$$FM : \Delta f_z(t) = \frac{s_f A_m}{2\pi} \cos(2\pi f_m t + \theta_m); \quad |\Delta f_z|_{max} = \frac{s_f A_m}{2\pi} \quad (8.38)$$

Per $f_0 \gg 0$ possiamo scrivere

$$PM : z(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_0 t} e^{jk_\phi \cos(2\pi f_m t + \theta_m)} \right]; \quad (8.39)$$

$$FM : z(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_0 t} e^{jk_f \sin(2\pi f_m t + \theta_m)} \right]; \quad (8.40)$$

dove abbiamo posto

$$k_\phi = s_\phi A_m; \quad k_f = \frac{s_f A_m}{2\pi f_m}. \quad (8.41)$$

I secondi esponenziali in parentesi sono funzioni periodiche con periodo $1/f_m$ e possono essere espressi come serie di Fourier esponenziale

$$e^{jk_\phi \cos(2\pi f_m t + \theta_m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_m t}, \quad (8.42)$$

$$e^{jk_f \sin(2\pi f_m t + \theta_m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{j2\pi n f_m t}. \quad (8.43)$$

Il calcolo dei coefficienti è riportato qui di seguito.

$$\begin{aligned} \alpha_n &= f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{jk_\phi \cos(2\pi f_m t + \theta_m)} e^{-j2\pi n f_m t} dt \\ &= f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{jk_\phi \sin(2\pi f_m t + \theta_m + \frac{\pi}{2})} e^{-j2\pi n f_m t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi + \theta_m + \frac{\pi}{2}}^{\pi + \theta_m + \frac{\pi}{2}} e^{jk_\phi \sin \lambda} e^{-jn(\lambda - \theta_m - \frac{\pi}{2})} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k_\phi \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda e^{jn(\theta_m + \frac{\pi}{2})} \\ &= J_n(k_\phi) e^{jn(\theta_m + \frac{\pi}{2})}; \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} e^{jk_f \sin(2\pi f_m t + \theta_m)} e^{-j2\pi n f_m t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi + \theta_m}^{\pi + \theta_m} e^{jk_f \sin \lambda} e^{-jn(\lambda - \theta_m)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k_f \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda e^{jn\theta_m} \\ &= J_n(k_f) e^{jn\theta_m}; \end{aligned} \quad (8.45)$$

dove $J_n(x)$ è la funzione di Bessel del I tipo di ordine n (definizione e proprietà di $J_n(x)$ sono riportate in Appendice A). Mettendo insieme coefficienti e sviluppo in serie, ed estraendo la parte reale abbiamo

$$\begin{aligned} PM : z(t) &= A \cos [2\pi f_0 t + k_\phi \cos (2\pi f_m t + \theta_m)] & (8.46) \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_\phi) \cos \left[2\pi (f_0 + n f_m) t + n\theta_m + n\frac{\pi}{2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FM : z(t) &= A \cos [2\pi f_0 t + k_f \sin (2\pi f_m t + \theta_m)] & (8.47) \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_f) \cos [2\pi (f_0 + n f_m) t + n\theta_m]. \end{aligned}$$

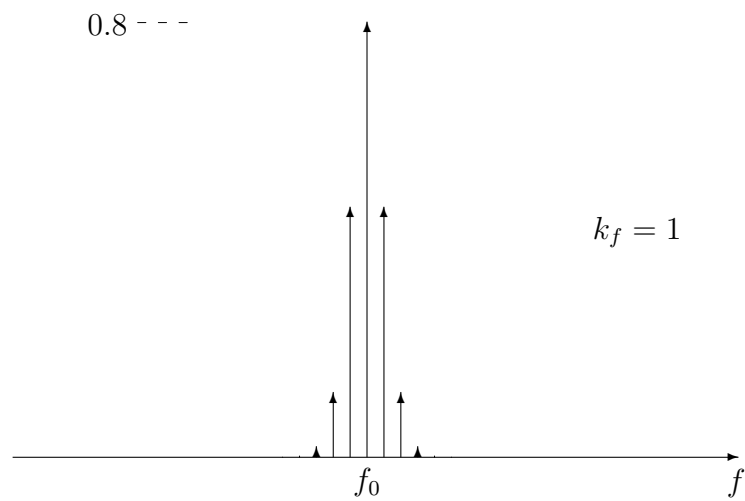
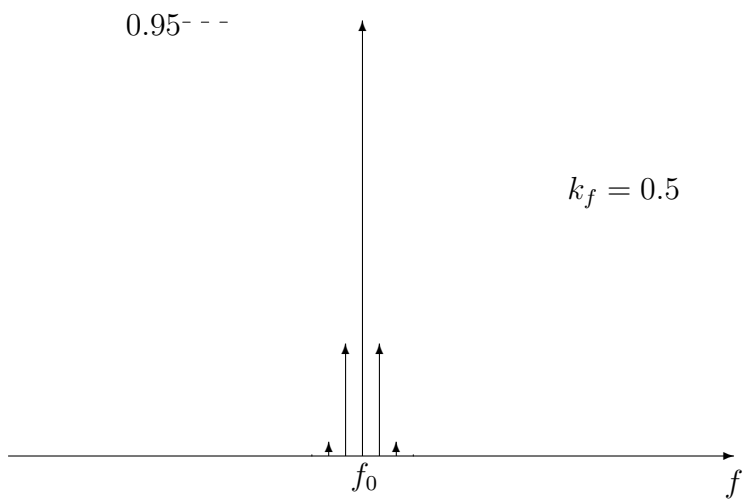
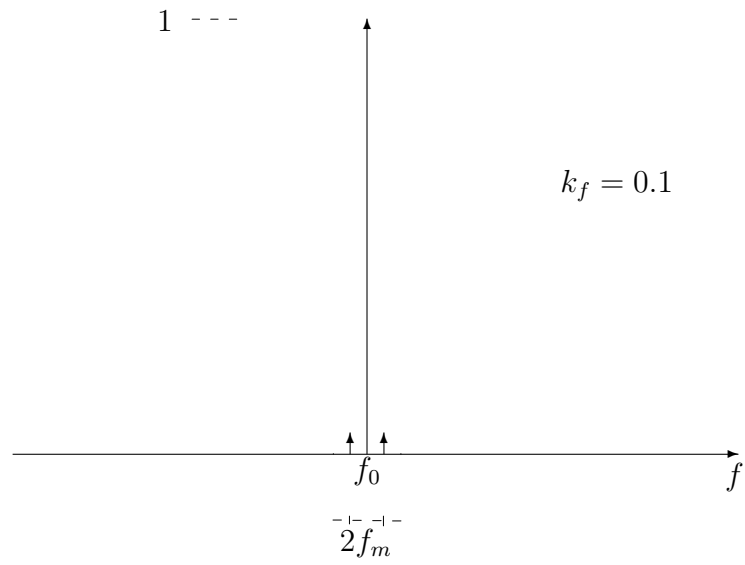
Quindi una sinusoidale modulata in fase da un'altra sinusoidale genera uno spettro con infinite righe spettrali alle frequenze $\pm f_0 + n f_m$. Si noti che il segnale $z(t)$ in generale non è periodico a meno che il rapporto tra f_0 e f_m non sia un numero razionale. L'ampiezza delle linee spettrali è determinata dall'andamento della funzione di Bessel $J_n(k)$. Quindi anche se a rigore la banda occupata è infinita, una valutazione della banda essenziale può essere fatta guardando l'andamento dei coefficienti.

La Figura 8.5 mostra il modulo dello spettro a righe attorno alla portante per diversi valori dell'indice di modulazione k_f (o k_ϕ - notiamo che lo spettro di ampiezza dei segnali (8.46) e (8.47) è identico). Per $k_f = 0.1$ abbiamo il comportamento atteso del segnale a banda stretta, con la portante e una componente sinusoidale per ogni banda laterale. Al crescere di k_f il comportamento appare piuttosto bizzarro con la comparsa di una varietà di linee spettrali. Quando k_f diventa più grande, ad esempio $k_f = 5$, o 10, le linee spettrali tendono a raggrupparsi. Abbiamo indicato nelle figure la larghezza di banda pari a $2k_f f_m$, che coincide con il doppio della massima deviazione di frequenza e che può essere considerata una stima per difetto della banda occupata. Si noti che le linee spettrali sono disegnate in scale di ordinate diverse.

La potenza del segnale modulato la si ottiene sommando la potenza delle linee spettrali. Pertanto

$$P_z = A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(k_f)}{2} = \frac{A^2}{2}, \quad (8.48)$$

per la proprietà (9) delle funzioni di Bessel (Appendice A). La potenza del segnale modulato coincide quindi con la potenza della sola portante. Questo esprime il fatto che nella modulazione angolare la potenza della portante si riversa tutta sulle bande laterali.



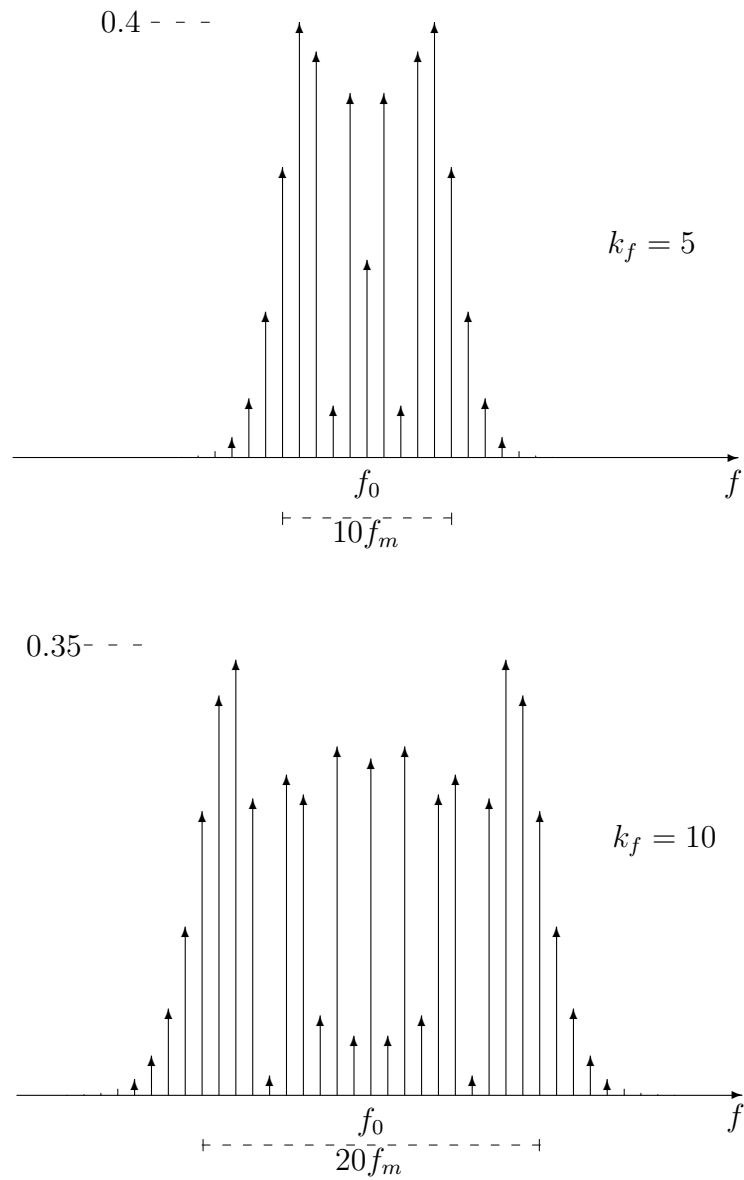


Figura 8.5: Lo spettro di ampiezza del segnale modulato in angolo con modulante sinusoidale per k_f pari a 0.1, 0.5, 1, 5, ,10.

8.3.2 Due modulanti sinusoidali

Studiamo ora il segnale modulato in angolo quando il segnale modulante è costituito dalla sovrapposizione di due segnali sinusoidali a frequenza f_1 e f_2 . Supponiamo che $f_0 \gg f_1, f_2$ e che il segnale modulante sia

$$s(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2). \quad (8.49)$$

Consideriamo per semplicità solo il caso FM in cui abbiamo

$$z(t) = A \cos[2\pi f_0 t + k_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1) + k_2 \sin(2\pi f_2 t + \theta_2)], \quad (8.50)$$

con

$$k_1 = \frac{A_1 s_f}{2\pi f_1}; \quad k_2 = \frac{A_2 k_f}{2\pi f_2}. \quad (8.51)$$

Scrivendo il segnale modulato come

$$z(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_0 t} e^{jk_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1)} e^{jk_2 \sin(2\pi f_2 t + \theta_2)} \right], \quad (8.52)$$

e usando la stessa espansione per gli esponenziali usata nella sezione precedente abbiamo

$$z(t) = A \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(k_1) J_{n_2}(k_2) \cos[2\pi(f_0 + n_1 f_1 + n_2 f_2)t + n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2]. \quad (8.53)$$

Lo spettro è formato da una doppia infinità di linee spettrali a frequenze $\pm f_0 + n_1 f_1 + n_2 f_2$, con n_1 e n_2 interi, con ampiezze che dipendono ognuna dal prodotto di due funzioni di Bessel.

La Figura 8.6 mostra lo spettro di ampiezza attorno alla portante per un segnale modulato con $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 10$. Notiamo la struttura più complessa di linee spettrali e la formazione di gruppi.

8.3.3 Più modulanti sinusoidali

Il caso più generale di segnale modulante somma di N sinusoidi si analizza in maniera analoga. Assumendo per il segnale modulante

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i), \quad (8.54)$$

usando gli stessi passaggi usati in precedenza, abbiamo

$$z(t) = A \sum_{n_1, \dots, n_N=-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^N J_{n_i}(k_i) \right) \cos \left[2\pi \left(f_0 + \sum_{i=1}^N n_i f_i \right) t + \sum_{i=1}^N n_i \theta_i \right], \quad (8.55)$$

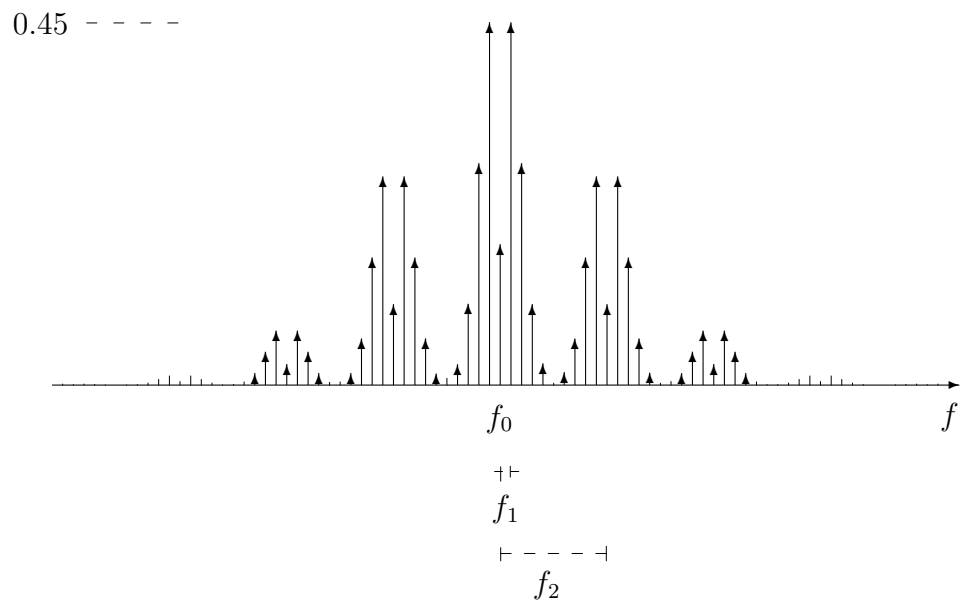


Figura 8.6: Lo spettro di ampiezza del segnale modulato in angolo con due modulanti sinusoidali con $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 10$.

dove

$$k_i = \frac{s_f A_i}{2\pi f_i}. \quad (8.56)$$

Lo spettro è ancora a righe alle frequenze $\pm f_0 \pm n_1 f_1 + \dots, n_N f_N$, con n_1, \dots, n_N interi, con una distribuzione delle ampiezze a complessità crescente all'aumentare di N .

Calcoliamo anche qui la potenza del segnale modulato. Dalla teoria dei segnali sappiamo che la potenza del segnale somma di componenti sinusoidali, è la somma della potenza delle singole componenti. Pertanto

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{A^2}{2} \sum_{n_1, \dots, n_N = -\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^N J_{n_i}^2(k_i) \right) \\ &= \frac{A^2}{2} \sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} J_{n_1}^2(k_1) \cdots \sum_{n_N = -\infty}^{\infty} J_{n_N}^2(k_N) = \frac{A^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Quindi la potenza del segnale modulato equivale alla potenza della sola portante.

8.3.4 Modulante aleatoria

Un altro caso che è possibile analizzare con buona approssimazione analitica è quando il segnale modulante è aleatorio e la modulazione angolare è a banda larga. In particolare assumiamo che nel segnale modulato

$$z(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)), \quad (8.58)$$

$\psi(t)$ sia un processo aleatorio stazionario in senso stretto almeno al II ordine (vedremo in seguito il perché di una tale ipotesi), e che la deviazione di frequenza sia superiore alla frequenza massima del segnale modulante, ovvero si sia in presenza di una modulazione a banda larga. In tali ipotesi, il processo aleatorio $z(t)$ ha spettro di potenza medio approssimativamente descritto dalla formula

$$\bar{P}_z(f) \simeq \frac{A^2 \pi}{2} [f_\psi(2\pi(f - f_0)) + f_\psi(2\pi(-f - f_0))], \quad (8.59)$$

dove $f_\psi(\cdot)$ è la funzione di densità di probabilità di $\dot{\psi}(t)$. Tale risultato mostra come la densità spettrale di potenza del segnale modulato in angolo, attorno alla frequenza della portante, abbia la forma della densità di

probabilità della frequenza istantanea. Questo appare intuitivo in quanto nella modulazione angolare a banda larga sono le ampiezze del segnale modulante a determinare la distribuzione spettrale.

In particolare nella modulazione PM, poichè $\dot{\psi}(t) = s_\phi \dot{s}(t)$,

$$f_\psi(x) = \frac{1}{s_\phi} f_s \left(\frac{x}{s_\phi} \right). \quad (8.60)$$

Pertanto

$$\bar{P}_z(f) \simeq \frac{A^2 \pi}{2s_\phi} \left[f_s \left(\frac{2\pi}{s_\phi} (f - f_0) \right) + f_s \left(\frac{2\pi}{s_\phi} (-f - f_0) \right) \right]. \quad (8.61)$$

Analogamente nella modulazione FM, poichè $\dot{\psi}(t) = s_f s(t)$,

$$f_\psi(x) = \frac{1}{s_f} f_s \left(\frac{x}{s_f} \right). \quad (8.62)$$

Pertanto

$$\bar{P}_z(f) \simeq \frac{A^2 \pi}{2s_f} \left[f_s \left(\frac{2\pi}{s_f} (f - f_0) \right) + f_s \left(\frac{2\pi}{s_f} (-f - f_0) \right) \right]. \quad (8.63)$$

Quest'ultima formula va sotto il nome di *Teorema di Woodward*.

Prova di (8.59): La autocorrelazione tempo-ritardo del segnale $z(t)$ si scrive come

$$\begin{aligned} R_z(t; \tau) &= A^2 E [\cos(2\pi f_0 t + \psi(t)) \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \psi(t - \tau))] \\ &= \frac{A^2}{2} E [\cos(2\pi f_0(2t - \tau) + \psi(t) + \psi(t - \tau))] \\ &\quad + \frac{A^2}{2} E [\cos(2\pi f_0 \tau + \psi(t) - \psi(t - \tau))] \\ &= \frac{A^2}{2} \text{Re} \left[e^{j2\pi f_0 2t} e^{-j2\pi f_0 \tau} E \left[e^{j\psi(t)} e^{j\psi(t - \tau)} \right] \right] \quad (I) \\ &\quad + \frac{A^2}{2} \text{Re} \left[e^{j2\pi f_0 \tau} E \left[e^{j\psi(t)} e^{-j\psi(t - \tau)} \right] \right] \quad (II) \end{aligned} \quad (8.64)$$

Definiamo il processo aleatorio $y(t) = e^{j\psi(t)}$. Nel termine (I) compare $E[y(t)y(t - \tau)]$ che, avendo assunto $\psi(t)$ stazionario in senso stretto almeno al secondo ordine, non dipende da t ma solo dal τ . Analogamente nel termine (II) compare la autocorrelazione di $y(t)$, $E[y(t)y^*(t - \tau)]$ che, nelle ipotesi di stazionarietà del

teorema, dipende solo da τ . Il processo $z(t)$, a causa della dipendenza da t nel termine (I), è ciclostazionario con periodo $1/2f_0$. Mediando sul periodo abbiamo che il termine (I) si annulla e la autocorrelazione media diventa

$$\overline{R}_z(\tau) = \frac{A^2}{2} \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_0 \tau} R_y(\tau) \right]. \quad (8.65)$$

Ricordando che $\operatorname{Re}[x] = \frac{x+x^*}{2}$, e che $R_y^*(\tau) = R_y(-\tau)$, abbiamo

$$\overline{R}_z(\tau) = \frac{A^2}{4} \left(e^{j2\pi f_0 \tau} R_y(\tau) + e^{-j2\pi f_0 \tau} R_y(-\tau) \right). \quad (8.66)$$

Nel dominio della frequenza lo spettro medio di potenza è

$$\overline{P}_z(f) = \frac{A^2}{4} (P_y(f - f_0) + P_y(-f - f_0)). \quad (8.67)$$

Resta quindi da analizzare autocorrelazione e spettro di $y(t)$. Notiamo che per τ piccolo rispetto alle variazioni di $\psi(t)$, possiamo adottare l'approssimazione

$$\psi(t) - \psi(t - \tau) \simeq \tau \dot{\psi}(t), \quad (8.68)$$

che ci fornisce

$$R_y(\tau) = E \left[e^{j(\psi(t+\tau) - \psi(t))} \right] \simeq E \left[e^{j\tau \dot{\psi}} \right]. \quad (8.69)$$

La approssimazione è valida se $R_y(\tau) \neq 0$, solo per τ piccolo, quindi solo se siamo in presenza di modulazione a banda larga. Applicando il teorema della media, riconosciamo il collegamento con la trasformata di Fourier di $f_\psi(\xi)$

$$\begin{aligned} E \left[e^{j\tau \dot{\psi}} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\tau \xi} f_\psi(\xi) d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f \tau} f_\psi(2\pi f) df \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \left[f_\psi(2\pi f) \right]. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Pertanto otteniamo il risultato cercato

$$\overline{P}_z(f) \simeq \frac{A^2}{4} 2\pi \left[f_\psi(2\pi(f - f_0)) + f_\psi(2\pi(-f - f_0)) \right]. \quad (8.71)$$

Anche nel caso di modulante aleatoria possiamo dimostrare che la potenza del segnale modulato è pari circa alla potenza della sola portante infatti

$$\overline{P}_z = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P}_z(f) df \simeq \frac{A^2}{2}, \quad (8.72)$$

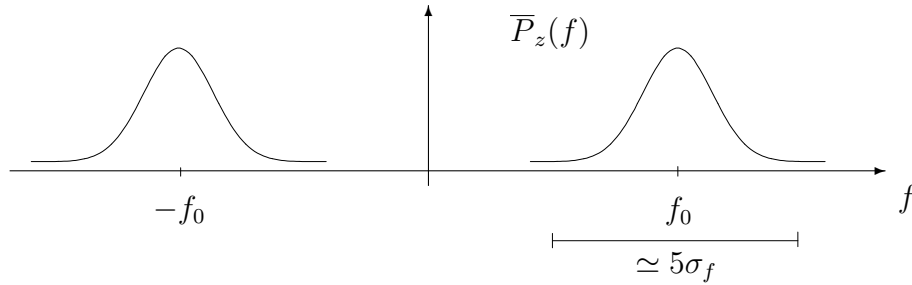
poiché

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_\psi(2\pi(f - f_0)) df = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_\psi(2\pi(-f - f_0)) df = 1. \quad (8.73)$$

Esempio 8.1 (*Segnale modulante gaussiano*) Consideriamo la modulazione FM quando il segnale modulante è un processo aleatorio $s(t)$ gaussiano stazionario di potenza (varianza) P_s . Usando il teorema di Woodward, lo spettro di potenza medio è approssimato come segue

$$\bar{P}_z(f) \simeq \frac{A^2}{2s_f} \sqrt{\frac{\pi}{2P_s}} \left(e^{-\frac{2\pi^2}{s_f^2 P_s} (f-f_0)^2} + e^{-\frac{2\pi^2}{s_f^2 P_s} (f+f_0)^2} \right), \quad (8.74)$$

ed è mostrato in figura.



La dispersione in frequenza σ_f è regolata quindi dalla varianza (potenza) di $s(t)$ ed è

$$\sigma_f = \frac{s_f \sqrt{P_s}}{2\pi}. \quad (8.75)$$

Dalle proprietà della gaussiana, una banda di $5\sigma_f$ contiene circa il 99 % della potenza monolaterale.

Esempio 8.2 (*Modulante sinusoidale a fase aleatoria*) Consideriamo la modulazione FM quando il segnale modulante è il processo aleatorio

$$s(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \theta), \quad (8.76)$$

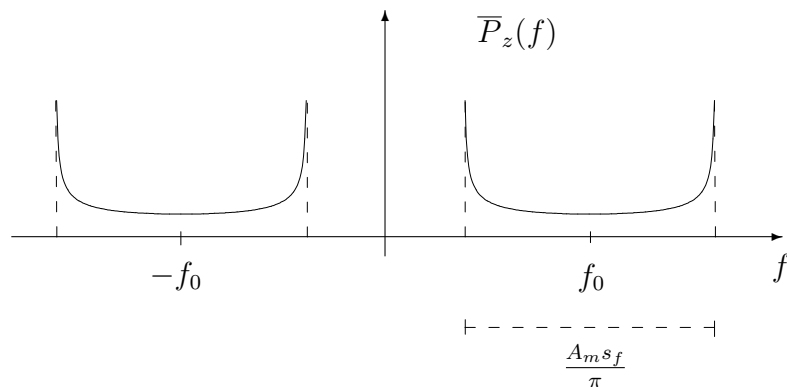
con θ variabile aleatoria uniforme in $[-\pi, \pi]$. Dalla teoria dei segnali sappiamo che $s(t)$ è un segnale con distribuzione stazionaria delle ampiezze descritta dalla pdf

$$f_s(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A_m^2 - \xi^2}} & -A_m < \xi < A_m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}. \quad (8.77)$$

Dal Teorema di Woodward, lo spettro medio di potenza del segnale modulato è approssimato dall'espressione

$$\bar{P}_z(f) \simeq \frac{A^2\pi}{2s_f} \left(\frac{1}{\sqrt{A_m^2 - \frac{4\pi^2}{s_f^2}(f - f_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{A_m^2 - \frac{4\pi^2}{s_f^2}(f + f_0)^2}} \right), \quad (8.78)$$

per $|f| \in \left[f_0 - \frac{A_m s_f}{2\pi}, f_0 + \frac{A_m s_f}{2\pi} \right]$, e zero altrove.



L'andamento dello spettro predetto dal Teorema di Woodward è mostrato in figura. Si noti la caratteristica a “corna” della pdf del coseno e la differenza rispetto allo spettro ottenuto per singola modulante sinusoidale deterministica, che dava linee spettrali discrete. Infatti la fase aleatoria della modulante “mescola” le componenti e fornisce lo spettro medio mostrato. Si noti che la banda occupata da questa stima è ancora $W = \frac{A_m s_f}{\pi}$ che è il doppio della massima deviazione di frequenza. Ricordiamo che ci troviamo nelle ipotesi di modulazione a banda larga.

8.4 La banda di Carson

Nei casi di modulazione angolare esaminati abbiamo visto come sia piuttosto difficile avere una trattazione unitaria del comportamento spettrale del segnale modulato PM o FM. In particolare abbiamo verificato come la situazione sia molto diversa nei casi a banda stretta e a banda larga. Nella modulazione a banda stretta il comportamento spettrale è facilmente

valutabile trattandosi di un segnale che è ben approssimato con un segnale modulato linearmente e pertanto la banda occupata è semplicemente il doppio della banda occupata dal segnale modulante. All'aumentare del coefficiente di modulazione e dell'ampiezza del segnale modulante purtroppo le cose diventano piuttosto bizzarre e la forma dello spettro si complica. In tali casi, indipendentemente dai dettagli di forma, la massima deviazione di frequenza istantanea ci fornisce comunque delle utili indicazioni sull'estensione dello spettro attorno alla portante predicendo, in genere un pò per difetto, la larghezza di banda.

Per tenere conto in maniera approssimata di entrambi gli scenari, si usa la cosiddetta *Regola di Carson*, o *Banda di Carson*. Essa suggerisce che per un segnale modulato in angolo si assuma una banda pari a

$$W_{Cr} = 2B(1 + m), \quad (8.79)$$

dove B è la frequenza massima del segnale modulante e m è l'*indice di modulazione* definito come rapporto tra la massima deviazione di frequenza istantanea e B

$$m = \frac{|\Delta f_z|_{max}}{B}. \quad (8.80)$$

Quindi se la massima deviazione di frequenza è piccola rispetto alla banda del segnale modulante, siamo in presenza di modulazione a banda stretta, $m \simeq 0$ e $W_{Cr} \simeq 2B$. Altrimenti se la deviazione di frequenza è decisamente superiore della banda del segnale in banda base, ovvero siamo in presenza di modulazione a banda larga, $m \gg 1$ e quindi $W_{Cr} \simeq 2|\Delta f_z|_{max}$.

Per i casi intermedi, la banda di Carson in qualche misura "interpola" le due stime e fornisce una utile indicazione di massima.

Capitolo 9

Segnali PM e FM e Sistemi

In questo capitolo vengono trattati i segnali modulati in angolo propagati in sistemi lineari e non lineari. In particolare viene introdotta l'approssimazione “quasi statica” per la caratterizzazione del segnale FM all'uscita di un sistema lineare tempo-invariante. Viene inoltre analizzato come, con delle non linearità senza memoria, sia possibile ottenere la “moltiplicazione” della frequenza istantanea di un segnale passa-banda.

9.1 Segnali modulati FM in sistemi lineari

Nei sistemi di comunicazione che amplificano, propagano, o più in generale trattano il segnale modulato in angolo, alcune delle difficoltà formali riscontrate nello studio del segnale stesso si ripropongono. Ad esempio, un segnale modulato $z(t)$ propagato in un sistema lineare con risposta impulsiva $h(t)$ è in uscita $y(t) = (h * z)(t)$ e nel dominio della frequenza $Y(f) = H(f)Z(f)$. Ma se abbiamo difficoltà a manipolare il segnale $z(t)$ e non riusciamo a scrivere in maniera esatta $Z(f)$, come sarà possibile caratterizzare $Y(f)$?

E' necessario anche in questo caso adottare delle approssimazioni. Ricordiamo che un segnale modulato in angolo in cui la modulazione è “lenta” rispetto alla frequenza di oscillazione della portante appare localmente come una sinusoidale ad ampiezza costante e frequenza pari alla frequenza istantanea. Pertanto, l'uscita del sistema lineare può essere approssimata come la concatenazione di sinusoidi filtrate dalla risposta armonica del sistema lineare. Questa è la cosiddetta *approssimazione quasi-statica*. In termini più formali:

Approssimazione quasi-statica: Dato un segnale modulato in angolo

$$z(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)) = \operatorname{Re} \left[\overset{\circ}{z}(t) \right] = \operatorname{Re} \left[A e^{j(2\pi f_0 t + \psi(t))} \right], \quad (9.1)$$

e un sistema lineare con risposta armonica

$$H(f) = \mathcal{F} [h(t)], \quad (9.2)$$

se la frequenza istantanea di $z(t)$ è lentamente variabile, l'uscita del sistema può essere approssimata come

$$y(t) \simeq \operatorname{Re} \left[\overset{\circ}{z}(t) H \left(f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t) \right) \right]. \quad (9.3)$$

Più esplicitamente:

$$y(t) \simeq A \left| H \left(f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t) \right) \right| \cos \left(2\pi f_0 t + \psi(t) + \angle H \left(f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t) \right) \right). \quad (9.4)$$

Prova: A dispetto del risultato intuitivo e di facile interpretazione, la prova è un pò tediosa. Consideriamo la seguente espansione di Taylor di $H(f)$ rispetto a $j2\pi f$,

$$H(f) = H(f_0) + \dot{H}(f_0) j2\pi(f - f_0) + \frac{\ddot{H}(f_0)}{2} (j2\pi)^2 (f - f_0)^2 + \dots \quad (9.5)$$

dove

$$\dot{H}(f_0) = \left. \frac{\partial H(f)}{\partial j2\pi f} \right|_{f=f_0}, \quad \ddot{H}(f_0) = \left. \frac{\partial^2 H(f)}{\partial (j2\pi f)^2} \right|_{f=f_0}, \dots \quad (9.6)$$

L'espansione mette in evidenza l'azione differenziale del sistema poiché tra il dominio della frequenza e quello del tempo sono ben note le relazioni

$$j2\pi f \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad (j2\pi f)^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \dots \quad (9.7)$$

La risposta del sistema all'ingresso $\overset{\circ}{z}(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \psi(t))}$ può essere ottenuta per sovrapposizione come la risposta ai singoli termini di (9.5). Quindi l'uscita del filtro lineare è

$$y(t) = \operatorname{Re} \left\{ H(f_0) \overset{\circ}{z}(t) + \dot{H}(f_0) \left[\frac{\partial \overset{\circ}{z}(t)}{\partial t} - j2\pi f_0 \overset{\circ}{z}(t) \right] + \frac{\ddot{H}(f_0)}{2} \left[\frac{\partial^2 \overset{\circ}{z}(t)}{\partial t^2} - 4\pi^2 f_0^2 \overset{\circ}{z}(t) - 4\pi f_0 j \frac{\partial \overset{\circ}{z}(t)}{\partial t} \right] + \dots \right\} \quad (9.8)$$

Le derivate sono facilmente calcolate

$$\frac{\partial \overset{\circ}{z}(t)}{\partial t} = A e^{j(2\pi f_0 t + \psi(t))} j (2\pi f_0 + \dot{\psi}(t)) = \overset{\circ}{z}(t) j (2\pi f_0 + \dot{\psi}(t)); \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial^2 \overset{\circ}{z}(t)}{\partial t^2} = \overset{\circ}{z}(t) j^2 (2\pi f_0 + \dot{\psi}(t))^2 + \overset{\circ}{z}(t) j \ddot{\psi}(t). \quad (9.10)$$

Sostituendo, l'uscita diventa

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left\{ H(f_0) \overset{\circ}{z}(t) + \dot{H}(f_0) \left[\overset{\circ}{z}(t) j (2\pi f_0 + \dot{\psi}(t)) - j 2\pi f_0 \overset{\circ}{z}(t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ddot{H}(f_0)}{2} \left[\overset{\circ}{z}(t) j^2 (2\pi f_0 + \dot{\psi}(t))^2 + j \overset{\circ}{z}(t) \ddot{\psi}(t) - 4\pi^2 f_0^2 \overset{\circ}{z}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - j 4\pi f_0 \overset{\circ}{z}(t) j (2\pi f_0 + \dot{\psi}(t)) \right] + \dots \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{z}(t) \left[H(f_0) + j \dot{H}(f_0) \dot{\psi}(t) + \frac{\ddot{H}(f_0)}{2} (j \ddot{\psi}(t) - \dot{\psi}^2(t)) + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

Ricordiamo che la frequenza istantanea del segnale $z(t)$ è $f_z(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t)$, e che espandendo in maniera analoga $H(f_z(t))$, abbiamo

$$\begin{aligned} H(f_z(t)) &= H\left(f_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\psi}(t)\right) \\ &= H(f_0) + \dot{H}(f_0) j 2\pi (f_z(t) - f_0) + \frac{\ddot{H}(f_0)}{2} j^2 4\pi^2 (f_z(t) - f_0)^2 + \dots \\ &= H(f_0) + \dot{H}(f_0) j \dot{\psi}(t) - \frac{\ddot{H}(f_0)}{2} \dot{\psi}^2(t) + \dots \end{aligned} \quad (9.11)$$

Confrontando direttamente le due espressioni e trascurando il termine in $\ddot{\psi}(t)$, abbiamo il risultato cercato, ovvero che in prima approssimazione

$$y(t) \simeq \operatorname{Re} \left[\overset{\circ}{z}(t) H(f_z(t)) \right]. \quad (9.12)$$

9.2 Moltiplicazione di frequenza

Un moltiplicatore di frequenza è un sistema che da un ingresso oscillante ad una certa frequenza ne produce un altro con frequenza di oscillazione moltiplicata per un fattore intero. Il metodo classico per generare segnali moltiplicati in frequenza è la cascata di una non linearità senza memoria (NLSM) e di un filtro passa-banda come mostrato in Figura 9.1. La non

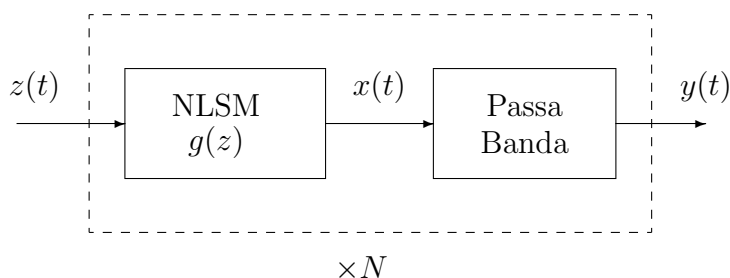


Figura 9.1: Lo schema a blocchi di un moltiplicatore di frequenza

linearità genera delle repliche di $z(t)$ a frequenze armoniche della portante e il filtro passa-banda seleziona quella corrispondente alla frequenza di centro banda Nf_0 . L'analisi che segue è basata su una semplice scomposizione in serie di Fourier di $x(t)$.

Assumiamo che l'ingresso al sistema sia un generico segnale con ampiezza e fase tempo-variante

$$z(t) = A(t) \cos \phi(t). \quad (9.13)$$

Tale espressione include praticamente tutti i segnali della modulazione su portante sinusoidale. L'uscita della non linearità è

$$x(t) = g[A(t) \cos \phi(t)]. \quad (9.14)$$

Concentriamo la nostra attenzione sulla relazione tra x e ϕ ad ogni istante t . Notiamo che $x(\phi)$ è una funzione periodica in ϕ con periodo 2π visto che la funzione g è istantanea (non introduce dispersione temporale). Inoltre la parità della funzione coseno conferisce parità anche alla funzione $x(\phi)$ che può essere espansa in serie di Fourier coseno

$$x(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\phi, \quad (9.15)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g[A \cos \xi] d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g[A \cos \xi] d\xi, \quad (9.16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g[A \cos \xi] \cos n\xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g[A \cos \xi] \cos n\xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.17)$$

per la parità della funzione coseno e di $g[A \cos \xi]$. Reintroducendo la dipendenza da t , notiamo che i coefficienti a_0 e a_n dipendono da t solo tramite $A(t)$

$$a_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g[A(t) \cos \xi] d\xi = a_0[A(t)], \quad (9.18)$$

$$a_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g[A(t) \cos \xi] \cos n\xi d\xi = a_n[A(t)], \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.19)$$

Quindi

$$x(t) = a_0[A(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n[A(t)] \cos n\phi(t). \quad (9.20)$$

In particolare per un generico segnale modulato in ampiezza e in angolo con fase istantanea $2\pi f_o t + \phi(t)$, otteniamo

$$x(t) = a_0[A(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n[A(t)] \cos(2\pi n f_o t + n\psi(t)). \quad (9.21)$$

La non linearità ha generato una sovrapposizione di componenti che hanno frequenza di centro banda $n f_o$ e costanti di modulazione moltiplicate per n . In teoria ogni termine della sommatoria ha banda infinita, come puntualizzato all'inizio della nostra discussione sui segnali modulati in angolo. In pratica però la banda essenziale di ogni termine della sommatoria dipenderà dal peso relativo conferito dal coefficiente a_n . Se siamo interessati ad una moltiplicazione per N , bisognerà selezionare il termine N -esimo mediante un filtro passa-banda opportunamente dimensionato e assicurarsi che non vi sia sovrapposizione in banda con le componenti alle frequenze adiacenti. In tal caso avremmo

$$y(t) \simeq a_0[A(t)] + a_N[A(t)] \cos(2\pi N f_o t + N\psi(t)). \quad (9.22)$$

Si noti che non solo è stata moltiplicata per N la frequenza di centro banda, ma anche la frequenza istantanea e quindi la banda occupata dal segnale.

Nelle realizzazioni circuitali dei moltiplicatori, solo piccoli fattori di moltiplicazione vengono in pratica realizzati a causa dell'aumento della banda delle armoniche. I valori tipici sono $N=2,3,5$. Per realizzate coefficienti di moltiplicazione più alti si utilizzano cascate di più moltiplicatori. Altri sistemi di moltiplicazione sono basati sul modulatore ad aggancio di fase (PLL), che sarà discusso in un prossimo capitolo.

Esempio 9.1 Si consideri la non linearità $g(z) = M_0 \operatorname{sgn}(z)$. Il segnale restituito oscilla tra i soli valori $\pm M_0$. Il calcolo dei coefficienti è immediato.

$$\begin{aligned} a_0[A(t)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g[A(t) \cos \xi] d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} M_0 d\xi - \int_{\pi/2}^\pi M_0 d\xi \right] = 0, & A(t) > 0 \\ \frac{1}{\pi} \left[-\int_0^{\pi/2} M_0 d\xi + \int_{\pi/2}^\pi M_0 d\xi \right] = 0, & A(t) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.23)$$

quindi non c'è componente continua. Per $n = 1, 2, 3, \dots$ e per $A(t) > 0$

$$\begin{aligned} a_n[A(t)] &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g[A(t) \cos \xi] \cos n\xi d\xi, \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} M_0 \cos n\xi d\xi - \int_{\pi/2}^\pi M_0 \cos n\xi d\xi \right] \\ &= \frac{2M_0}{\pi} \left[\frac{\sin n\xi}{n} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin n\xi}{n} \Big|_{\pi/2}^\pi \right] \\ &= \frac{4M_0}{\pi} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} = 2M_0 \operatorname{sinc} \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Analogamente per $A(t) < 0$

$$a_n[A(t)] = -2M_0 \operatorname{sinc} \frac{n}{2}. \quad (9.25)$$

In sintesi

$$x(t) = 2M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} \operatorname{sgn}[A(t)] \cos n\phi(t). \quad (9.26)$$

Si noti che il coefficiente dello sviluppo è nullo per n pari. Pertanto la non linearità può essere usata per $N = 3, 5, \dots$. Va opportunamente valutata la attenuazione relativa, che decresce con n e la larghezza di banda che è stata moltiplicata per n . A rigore i termini con n elevato hanno una banda sempre più larga. Fortunatamente essi hanno anche coefficienti più piccoli per cui il loro effetto può diventare trascurabile.

9.3 Problemi

Problema 9.1 Si valuti la possibilità di realizzare un moltiplicatore di frequenza mediante la non linearità $g(z) = |z|$.

Problema 9.2 Si valuti la possibilità di realizzare un moltiplicatore di frequenza mediante un amplificatore con saturazione.

Capitolo 10

Modulatori e Demodulatori per la Modulazione Angolare

Vengono qui discussi i principali schemi di modulazione e demodulazione angolare con particolare riferimento alla modulazione di frequenza. Vengono introdotti il discriminatore di frequenza, l'anello ad aggancio di fase (PLL) e l'FMFB.

10.1 Introduzione

Per generare un segnale modulato in angolo bisogna concepire un sistema che sia in grado di imprimere ad un segnale sinusoidale una variazione dinamica della fase. Le relazioni dirette esistenti tra la modulazione di fase (PM) e la modulazione di frequenza (FM) ci consentono di concentrarci su uno solo dei due casi in quanto segnali PM e FM possono essere realizzati entrambi a partire da un modulatore PM o FM. La figura 10.1 mostra le quattro possibili configurazioni.

Ci concentreremo per il momento sul modulatore FM, riservandoci di riportare commenti più specifici sulla PM in seguito.

10.2 Modulazione FM diretta

Un segnale modulato FM è una senoide a cui viene variata dinamicamente la frequenza istantanea. Quindi un oscillatore sinusoidale controllato da un segnale modulante $s(t)$ che ne varia la frequenza istantanea linearmente, realizza un modulatore FM. Tale sistema è più comunemente detto

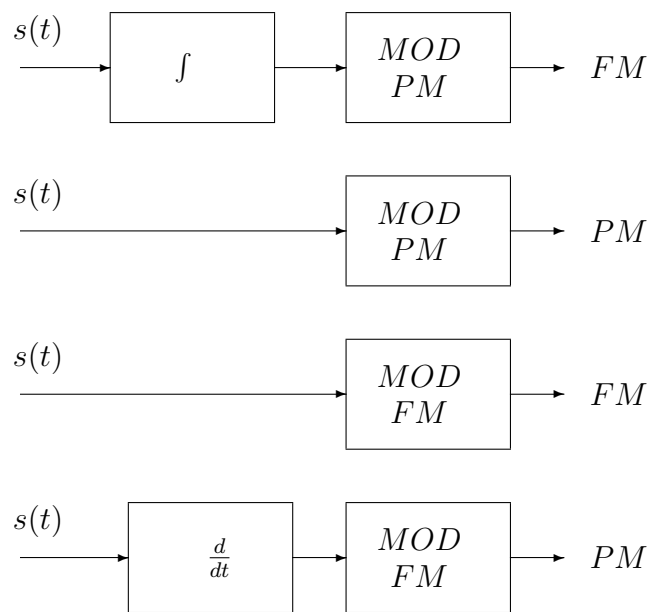


Figura 10.1: L'equivalenza tra modulatori PM e FM

VCO (*Voltage-Controlled Oscillator*) indipendentemente dalla natura della soluzione circuitale (per ragioni storiche). I circuiti che consentono di generare una sinusoide a frequenza variabile sono molteplici. La letteratura sull'elettronica e i cataloghi di componenti sono ricchi di soluzioni che si caratterizzano per frequenza di lavoro, massima deviazione di frequenza ottenibile, linearità di tale deviazione e stabilità della frequenza di centro banda.

Lo schema più classico è basato su un oscillatore accordato sulla frequenza di antirisonanza di uno stadio LC la cui frequenza di oscillazione è

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (10.1)$$

Facendo variare dinamicamente la capacità, tipicamente mediante un diodo Varactor, è possibile variare la frequenza istantanea di oscillazione, che per piccole variazioni può essere considerata una funzione lineare attorno a f_0 . Se il rapporto di deviazione di frequenza $\Delta f/f_0$ così ottenuto non è sufficientemente elevato per le esigenze specifiche, si può ricorrere ad un moltiplicatore di frequenza. In generale dalla combinazione di moltiplicatori e convertitori di frequenza si possono ottenere la deviazione e la frequenza di centro banda desiderate.

Il mercato dell'elettronica è ricchissimo di soluzioni integrate analogiche, numeriche e ibride che realizzano eccellenti prestazioni. Sugeriamo allo studente interessato di dare uno sguardo ai cataloghi dei produttori di componenti.

10.3 Modulazione FM indiretta

Abbiamo dimostrato nel capitolo 8 come la generazione di segnali FM a banda stretta sia piuttosto semplice. Il modulatore di Armstrong infatti consente di generare facilmente un segnale debolmente modulato in angolo mediante alcune operazioni tipiche della modulazione lineare. Il segnale generato dal modulatore di Armstrong non ha certo la deviazione di frequenza sufficiente per costituire un utile segnale FM e viene in genere usato solo come primo stadio di una catena in cui uno o più moltiplicatori di frequenza espandono la banda agendo sulla frequenza istantanea. Nel capitolo 9 abbiamo visto come un moltiplicatore di frequenza di fattore N ($\times N$) fornisce in uscita un segnale con una frequenza di centro banda e una deviazione di frequenza entrambi moltiplicate per N . Pertanto un segnale FM con preassegnate deviazione di frequenza e deviazione di frequenza può

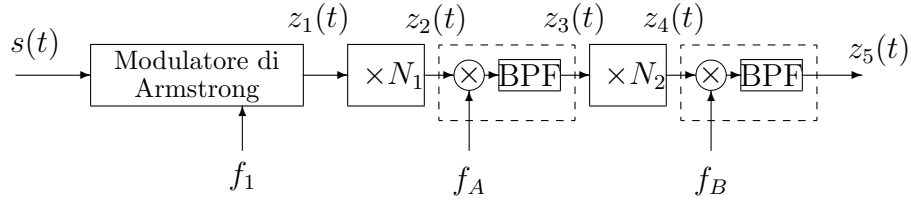


Figura 10.2: Generazione indiretta di un segnale FM

essere ottenuto mediante la opportuna combinazione di un modulatore di Armstrong, di moltiplicatori e convertitori di frequenza. Un esempio di tale schema di *generazione FM indiretta* è mostrato nell'esempio di figura 10.2.

Nella figura il primo stadio è un modulatore a banda stretta, seguito da un moltiplicatore di frequenza e da un convertitore. Il moltiplicatore aumenta di un fattore N_1 sia la deviazione di frequenza che la frequenza di centro banda. Il convertitore successivo con una eterodina trasla il segnale sull'asse delle frequenze ad una nuova frequenza di centro banda (in salita o in discesa). L'operazione può essere ripetuta per ottenere la desiderata deviazione di frequenza alla frequenza di centro banda desiderata. Riassumiamo di seguito i parametri dello schema di figura 10.2.

$s(t)$: segnale modulante con frequenza massima pari a B ;

$z_1(t)$: segnale modulato a banda stretta in $[f_1 - B, f_1 + B]$,

$$\text{Deviazione di frequenza} = \Delta f_1 = \frac{s_f |s(t)|_{max}}{2\pi} \ll B, \quad m_1 = \frac{\Delta f_1}{B} \ll 1; \quad (10.2)$$

$z_2(t)$: segnale approssimativamente nella banda

$$[f_2 - \Delta f_2, f_2 + \Delta f_2]; \quad f_2 = N_1 f_1, \quad \Delta f_2 = N_1 \Delta f_1; \quad (10.3)$$

$z_3(t)$: segnale approssimativamente nella banda

$$[f_3 - \Delta f_3, f_3 + \Delta f_3], \quad f_3 = f_2 - f_A; \quad \Delta f_3 = \Delta f_2. \quad (10.4)$$

Il convertitore è stato usato in discesa e il filtro passa banda (BPF) è centrato sulla frequenza $f_2 - f_A$;

$z_4(t)$: segnale approssimativamente nella banda

$$[f_4 - \Delta f_4, f_4 + \Delta f_4]; \quad f_4 = N_2 f_3, \quad \Delta f_4 = N_2 \Delta f_3; \quad (10.5)$$

$z_5(t)$: segnale approssimativamente nella banda

$$[f_5 - \Delta f_5, f_5 + \Delta f_5], \quad f_5 = f_4 + f_B; \quad \Delta f_5 = \Delta f_4. \quad (10.6)$$

Il convertitore è stato usato in salita e il filtro passa banda (BPF) è centrato sulla frequenza $f_1 + f_B$.

Vari schemi di modulazione di frequenza indiretta possono essere progettati a seconda della desiderata deviazione di frequenza, della frequenza di centro banda, dei moltiplicatori disponibili e delle frequenze di lavoro dei dispositivi.

10.4 Demodulazione di fase

Un demodulatore di fase deve estrarre dal segnale modulato la fase istantanea (PM) o la frequenza istantanea (FM). In virtù delle relazioni esistenti tra i due tipi di modulazione, se si dispone di un demodulatore PM è facilmente demodulabile anche un segnale FM. Analogamente se si dispone di un demodulatore FM è possibile ottenere immediatamente anche un demodulatore PM. Le equivalenze sono mostrate in figura 10.3. Discuteremo nel seguito per semplicità solo la demodulazione FM.

10.4.1 Il discriminatore di frequenza

La frequenza istantanea per un segnale modulato FM, come mostrato graficamente nel segmento di segnale di figura 10.4(b), è linearmente collegata alla struttura tempo-variante delle intersezioni con l'asse dei tempi (*zero-crossings*).

Se guardiamo attentamente la figura, notiamo anche che attorno a tali intersezioni la pendenza della forma d'onda varia al variare della frequenza istantanea. Quindi l'informazione sulla frequenza istantanea è contenuta anche nella derivata del segnale. Valutando la derivata prima del segnale FM abbiamo

$$\frac{d}{dt}z(t) = -A(2\pi f_0 + s_f s(t)) \sin\left(2\pi f_0 t + s_f \int^t s(\xi) d\xi\right), \quad (10.7)$$

che è un segnale modulato sia in angolo che in inviluppo. Figura 10.4(c) mostra un segmento del segnale derivata che evidenzia la comparsa della modulazione di inviluppo in aggiunta a quella di fase.

Pertanto un segnale FM può essere demodulato estraendo prima la derivata e poi l'inviluppo. Tale schema, detto *discriminatore di frequenza* è

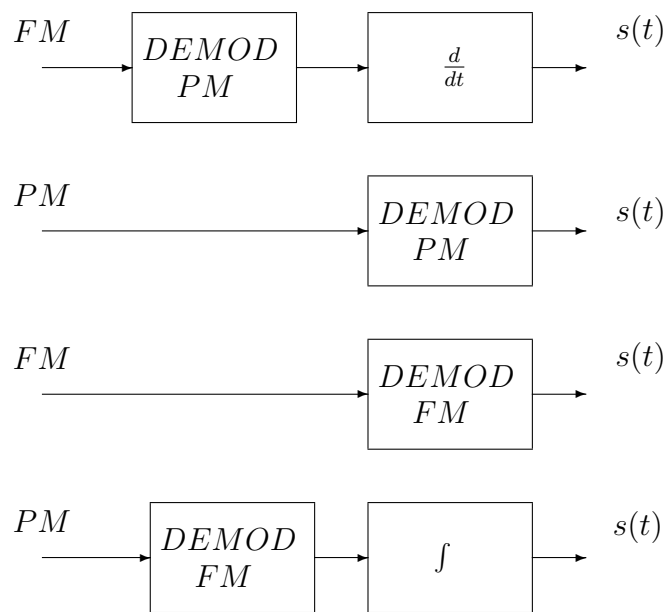


Figura 10.3: L'equivalenza tra demodulatori PM e FM

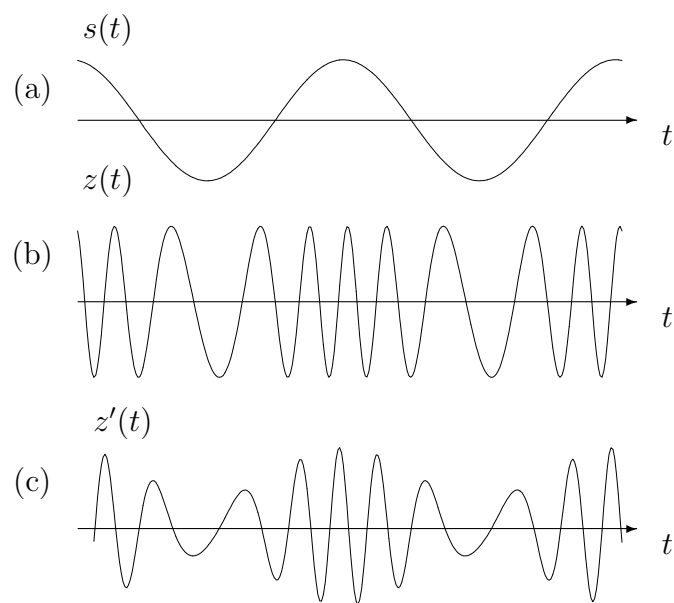


Figura 10.4: (a) Segnale modulante; (b) Segnale FM; (c) Derivata del segnale FM.

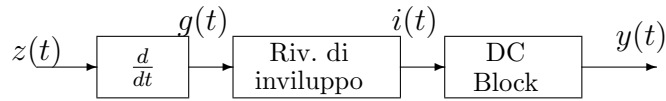


Figura 10.5: Il discriminatore di frequenza

mostrato in figura 10.5 e costituisce il *metodo diretto* per la demodulazione di frequenza.

Notiamo che la condizione dell'involuppo $2\pi f_0 - s_f |s(t)|_{max} > 0$, ovvero $f_0 > \frac{s_f |s(t)|_{max}}{2\pi}$ è piuttosto lasca (ricordiamo che essa è anche la condizione di invertibilità della modulazione FM). Lo schema del demodulatore va completato con un filtro di blocco della continua che produce infine un segnale proporzionale a $s(t)$ (a meno delle ben note possibili distorsioni alle basse frequenze).

Nell'estrazione della derivata (10.7) dal segnale modulante è importante che l'ampiezza del segnale modulato sia costante. Nei discriminatori di frequenza reali si antepone pertanto al blocco derivatore una non linearità che limita l'ampiezza del segnale all'ingresso (*Limitatore*).

La realizzazione del discriminatore è piuttosto semplice visto che l'azione derivativa (che sembrerebbe impossibile trattandosi di una operazione a rigore non fisicamente realizzabile) è necessaria solo nella banda del segnale $z(t)$. La figura 10.6 mostra la risposta armonica del derivatore ideale evidenziata solo nella banda di interesse $\mathcal{I}_z = \{f : |f| \in [f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]\}$. Il rivelatore di inviluppo, già discusso nel capitolo sulla modulazione lineare, va dimensionato tenendo conto che il segnale da cui si estrae l'involuppo è modulato anche in angolo.

A ulteriore conferma della semplicità della realizzazione del discriminatore, invece di cercare di realizzare un derivatore partendo dalla risposta $j2\pi f$, supponiamo che si disponga di un dispositivo che ha risposta armonica localmente lineare

$$H(f) \simeq a_1(f - f_0) + a_2, \quad |f| \in \mathcal{I}_z. \quad (10.8)$$

Applicando il metodo quasi statico a $z(t)$, dove la frequenza istantanea è

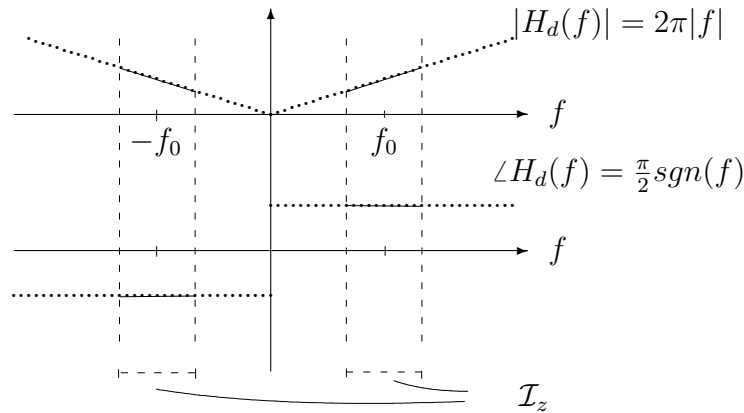


Figura 10.6: Il derivatore per il discriminatore di frequenza: $H_d(f) = j2\pi f$, $|f| \in \mathcal{I}_z = [f_0 - \Delta f \ f_0 + \Delta f]$.

$f_0 + \frac{s_f s(t)}{2\pi}$, abbiamo all'uscita il segnale

$$g(t) \simeq A \left| \frac{a_1 s_f}{2\pi} s(t) + a_2 \right| \cos \left(2\pi f_0 t + s_f \int^t s(\xi) d\xi + \phi \left(f_0 + \frac{s_f s(t)}{2\pi} \right) \right), \quad (10.9)$$

dove $\phi(f)$ è la fase di $H(f)$ che ha valori 0 e π nella banda del segnale ed è ininfluenza.

Se le costanti a_1 e a_2 sono tali da soddisfare la condizione dell'involuppo, basta un rivelatore di involuppo seguito da un blocco della continua per recuperare il segnale modulante.

L'elettronica dei dispositivi è oramai piuttosto matura e consente realizzazioni di discriminatori di frequenza molto accurate con circuiterie integrate. Poiché per l'azione derivativa basta un circuito con una risposta armonica localmente lineare, molte sono le soluzioni circuitali possibili. Riportiamo qui di seguito quattro schemi circuitali classici.

Il primo schema, descritto in figura 10.7 è basato sulla cascata di un filtro CR e di un rivelatore di involuppo. Il filtro CR ha risposta armonica

$$H(f) = \frac{j2\pi RC f}{1 + j2\pi RC f}, \quad (10.10)$$

che per $|f| \ll \frac{1}{2\pi RC}$, ha la caratteristica lineare desiderata

$$H(f) \simeq j2\pi RC f. \quad (10.11)$$

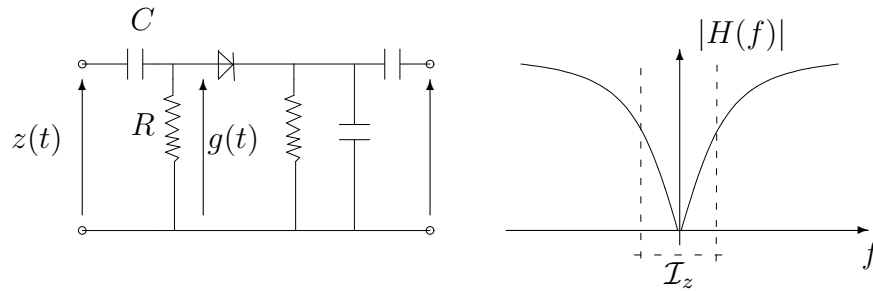


Figura 10.7: Un discriminatore di frequenza con un filtro CR come “slope detector” passa-basso.

Il modulo di $H(f)$ è mostrato schematicamente in figura 10.7. Il circuito realizza la derivata, ovvero è uno “slope detector,” alle basse frequenze.

Il secondo schema, descritto in figura 10.8, è basato sulla cascata di un filtro RL e di un rivelatore di involuppo. Il filtro RL ha risposta armonica

$$H(f) = \frac{j2\pi \frac{L}{R} f}{1 + j2\pi \frac{L}{R} f}, \quad (10.12)$$

che per $|f| \ll \frac{R}{2\pi L}$, ha la caratteristica lineare desiderata

$$H(f) \simeq j2\pi \frac{L}{R} f. \quad (10.13)$$

Il modulo di $H(f)$ è del tutto analogo a quello del filtro CR ed è mostrato schematicamente in figura 10.8.

Il terzo schema, descritto in figura 10.9 è una versione passa-banda dello slope detector ed è basato sulla cascata di una sezione RLC e di un rivelatore di involuppo. La figura 10.9 mostra anche l’andamento tipico della risposta in frequenza della sezione lineare e l’intervallo di frequenza di utilizzo a sinistra della frequenza di risonanza del circuito RLC. E’ possibile usare anche l’intervallo di linearità a destra della frequenza di risonanza (non mostrato in figura).

Il quarto schema, descritto in figura 10.10, è basato su una struttura speculare con due sezioni LC. Ogni sezione ha frequenza di risonanza diversa dimensionata in modo da realizzare per differenza un intervallo di linearità più ampio. In figura 10.10 è riportato anche un grafico che mostra

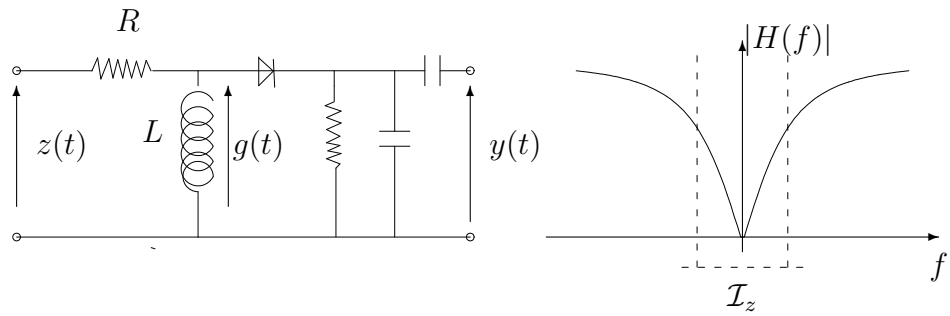


Figura 10.8: Un discriminatore di frequenza con un filtro RL come “slope detector” passa-basso.

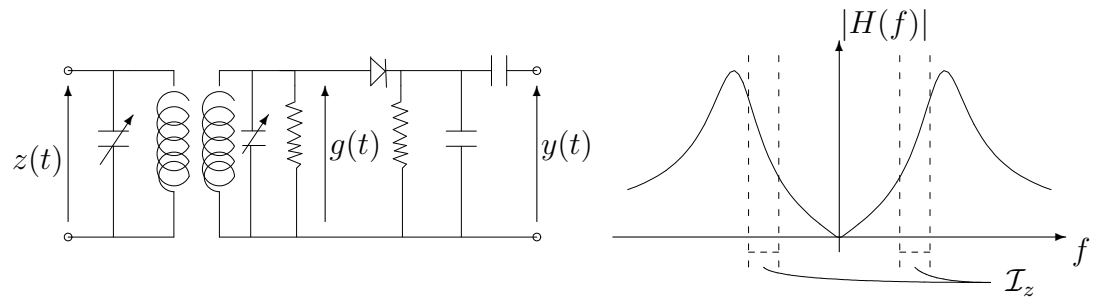


Figura 10.9: Un discriminatore di frequenza con uno stadio RLC come “slope detector” passa-banda.

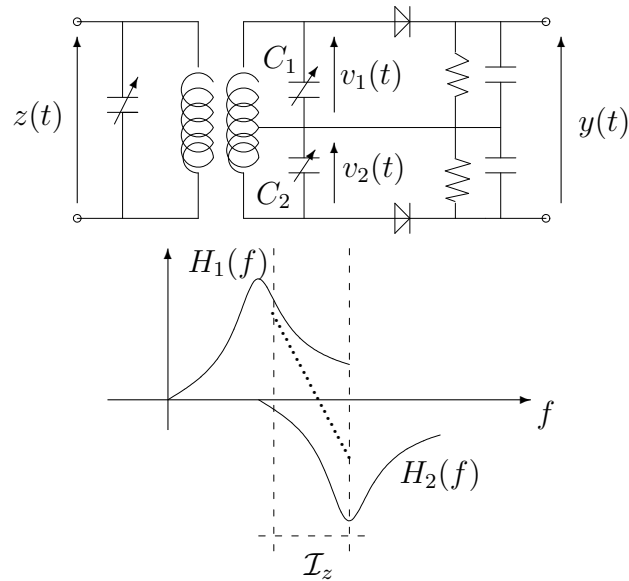


Figura 10.10: Un discriminatore di frequenza con due sezioni LC affacciate per ottenere un intervallo di linearità in frequenza più ampio

il principio di sovrapposizione degli spettri nel dominio della frequenza. Per maggiori dettagli sul funzionamento dei circuiti, rimandiamo il lettore a qualche buon testo di elettronica.

10.4.2 Schema basato sugli zero-crossing

La frequenza istantanea del segnale modulato in angolo è anche direttamente proporzionale alla frequenza delle intersezioni con l'asse dei tempi, come abbiamo più volte osservato nel Capitolo 8. Infatti se la frequenza della portante è sufficientemente elevata rispetto alle variazioni di frequenza istantanea, possiamo pensare localmente sull'asse dei tempi al segnale FM come un segmento di senoide a frequenza $f_0 + s_f x(t)$. Pertanto un *rivelatore-contatore di intersezioni con lo zero* (*zero-crossing detector-counter*) può servire a ottenere un semplice demodulatore. Ovviamente la durata della finestra temporale su cui il conteggio viene effettuato va opportunamente dimensionata rispetto alle frequenze in gioco. In particolare se la finestra è

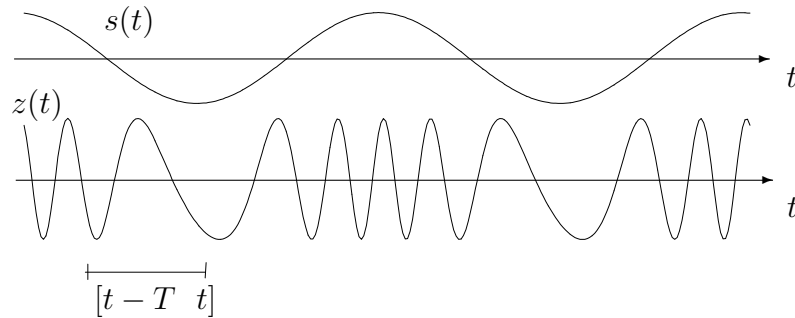


Figura 10.11: Il rivelatore-contatore degli zero crossing che opera con una finestra mobile sul segnale FM. La scala temporale qui è solo indicativa. Infatti nella figura l'indice di modulazione è stato esagerato per consentire la visualizzazione su un breve segmento. Nei casi pratici l'indice di modulazione e la finestra di conteggio sono tali che il rivelatore “vede” un segmento di sinusoidi approssimativamente stazionario.

$[t - T, t]$ (la finestra trasla sul'asse dei tempi) possiamo assumere che

$$f(t) \simeq \frac{\# \text{ di intersezioni con lo zero in } [t - T, t]}{2T}. \quad (10.14)$$

La figura 10.11 mostra un segmento segnale modulato FM e la finestra mobile che trasla su di essa contando il numero di intersezioni con lo zero. Il segnale ottenuto dopo una opportuna smussatura (passa-basso) e rimozione della continua costituisce una stima del segnale modulante $s(t)$.

Il rivelatore-contatore delle intersezioni con lo zero può essere realizzato in tantissimi modi. Tipicamente il segnale FM, mediante un dispositivo a saturazione, viene preliminarmente ridotto ad un'onda quadra modulata solo in fase per eliminare qualunque modulazione di ampiezza residua. Successivamente, per stimare il numero di oscillazioni nell'unità di tempo si può, ad esempio, usare un contatore bistabile.

Un altro schema realizzativo totalmente analogico è suggerito in figura 10.12 dove il segnale FM dopo essere stato saturato, viene ritardato su un ramo parallelo per ottenere il segnale differenza $z_d(t) = z(t) - z(t - \Delta)$. La figura 10.13 mostra un segmento di segnale modulato propagato nello schema di figura 10.12. Il segnale differenza è impulsivo con impulsi localizzati agli zero-crossing. Ora è semplice contare gli impulsi. Basta

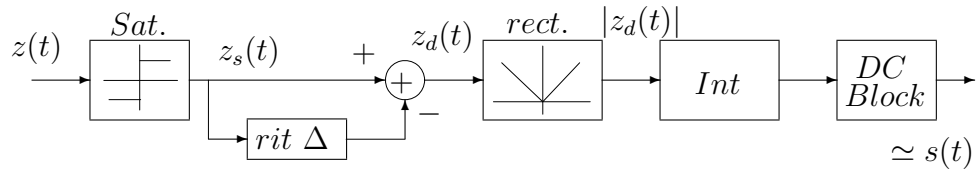


Figura 10.12: Uno schema di rivelatore-contatore di zero-crossing

ribaltare gli impulsi negativi con un raddrizzatore a doppia semi-onda e filtrare passa-basso. Il passa-basso opera una sorta di integrazione che valuta dinamicamente una quantità proporzionale all'area sottesa dagli impulsi. Tale area è una approssimazione della frequenza istantanea del segnale.

E' interessante notare come lo schema di demodulatore proposto è di fatto un discriminatore di frequenza. Infatti l'operazione di estrazione del segnale differenza è una sorta di derivata discreta. Il raddrizzatore e il filtro passa-basso sono il rivelatore di inviluppo.

10.4.3 Il PLL

L'Anello ad Aggancio di fase, o Phase-Locked Loop (PLL), è uno schema a controreazione molto usato nel progetto dei demodulatori. L'idea, che viene applicata anche nei demodulatori numerici, anche se qui discuteremo solo l'applicazione all'FM, è basata su un anello di controreazione che tende a realizzare una condizione di equilibrio in cui il ricevitore "insegue" dinamicamente la fase istantanea del segnale in arrivo.

Il componente fondamentale del PLL è il *comparatore di fase* descritto nella figura 10.14. Se i segnali $z(t)$ e $v(t)$ che vengono moltiplicati hanno ampiezza costante (per semplicità) e fase tempo-variante, abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= z(t) v(t) = A_z A_v \cos \theta_z(t) \cos \theta_v(t) \\ &= \frac{A_z A_v}{2} \cos(\theta_z(t) - \theta_v(t)) + \frac{A_z A_v}{2} \cos(\theta_z(t) + \theta_v(t)). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Assumendo i due segnali passa-banda, ovvero con una fase tempo-variante del tipo $2\pi f_0 + \psi(t)$, la seconda componente viene eliminata dal filtro passa-basso e quindi

$$d(t) = \frac{A_z A_v}{2} \cos(\theta_z(t) - \theta_v(t)). \quad (10.16)$$

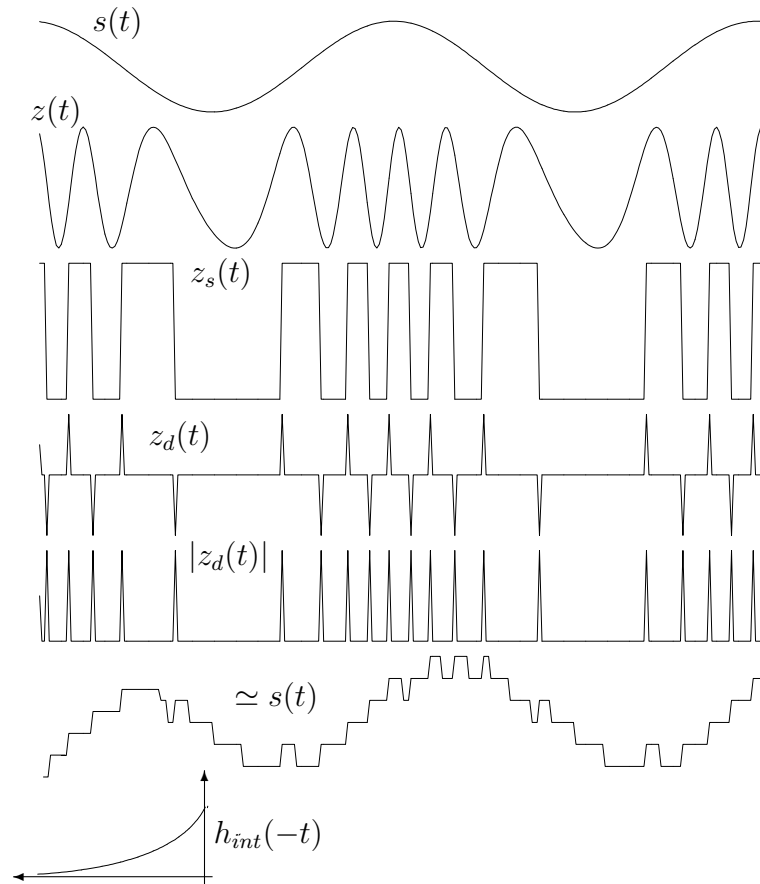


Figura 10.13: I segnali del rivelatore-contatore di zero-crossing di figura 10.12. Anche qui come in figura 10.11 l'indice di modulazione è stato esagerato per poter visualizzare i segnali su un breve segmento. E' indicata anche la risposta approssimativa dell'integratore. Il segnale ricostruito ha caratteristiche molto migliori quando l'indice di modulazione viene ridotto e la finestra di integrazione allargata.

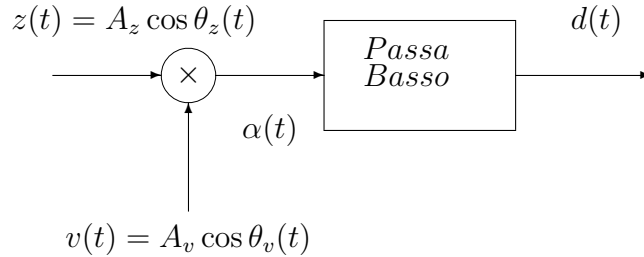


Figura 10.14: Lo schema a blocchi di un comparatore di fase

Il segnale $d(t)$ è nullo quando la differenza tra $\theta_z(t)$ e $\theta_v(t)$ è un multiplo di $\pi/2$. Esso contiene la utile informazione sulla differenza di fase tra i due segnali. Definiamo pertanto il segnale differenza

$$\epsilon(t) = \theta_z(t) - \theta_v(t) + \frac{\pi}{2}, \quad (10.17)$$

e riscriviamo l'uscita come

$$d(t) = \frac{A_z A_v}{2} \cos \left(\epsilon(t) - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{A_z A_v}{2} \sin \epsilon(t). \quad (10.18)$$

L'uscita del comparatore di fase è nulla quando i due segnali differiscono per una fase che è un multiplo di $\pi/2$, ovvero sono in quadratura.

Quindi se la differenza tra le due fasi è nell'intorno di $\pi/2$,

$$d(t) \simeq \frac{A_z A_v}{2} \epsilon(t), \quad (10.19)$$

ovvero, attorno alla condizione di quadratura, il comparatore di fase fornisce un segnale proporzionale alla differenza di fase (più $\pi/2$) e può essere utilizzato per misurare le condizioni di coerenza di fase tra i due segnali. Vedremo in seguito come usare l'uscita $d(t)$ del comparatore di fase nell'anello di controreazione del PLL.

La figura 10.15 mostra lo schema a blocchi di un anello ad aggancio di fase (PLL), costituito da un comparatore di fase controreazionato con un VCO (Voltage-Controlled Oscillator), che non è altro che un modulatore diretto di frequenza. In condizioni di quasi-equilibrio il VCO riceve al suo

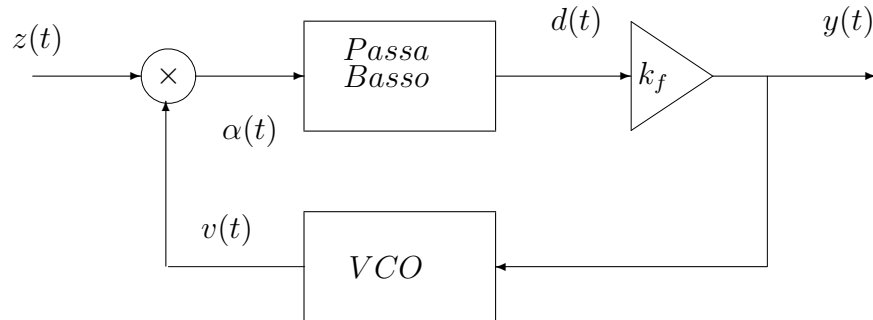


Figura 10.15: Lo schema a blocchi di un PLL

ingresso un segnale proporzionale alla deviazione di fase istantanea e genera un segnale la cui fase “insegue” quella del segnale d’ingresso. Nell’anello è anche incluso un blocco amplificatore a guadagno k_f il cui significato sarà chiarito in seguito. In condizioni di equilibrio l’uscita del PLL fornisce un segnale linearmente legato alla frequenza istantanea del segnale in ingresso.

L’analisi rigorosa del PLL è piuttosto complessa trattandosi di uno schema controreazionato non lineare. Rimandiamo il lettore interessato a qualche buon testo sull’argomento. Ci limiteremo qui ad una spiegazione semplificata quando il segnale all’ingresso è un segnale FM. Studieremo prima le condizioni di equilibrio complessive per poi modellare linearmente la dinamica del sistema attorno al punto di equilibrio.

Supponiamo che all’ingresso del sistema ci sia il segnale modulato in fase

$$z(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)). \quad (10.20)$$

Il VCO è un modulatore di frequenza ideale che fornisce in uscita il segnale

$$v(t) = A_v \cos\left(2\pi(f_0 + \Delta f)t + 2\pi k_v \int^t y(\xi) d\xi + \phi_v + \frac{\pi}{2}\right). \quad (10.21)$$

Nell’espressione abbiamo evidenziato la frequenza f_0 attorno alla quale il VCO opera. E’ possibile infatti che l’oscillatore, in assenza di segnale di ingresso, oscilli ad una frequenza leggermente diversa $f_0 + \Delta f$. Vedremo

che anche questa differenza può essere compensata dalla controreazione. Per mantenere totale generalità abbiamo anche incluso una ulteriore fase arbitraria costante ed evidenziato la costante k_v che determina la sensibilità del VCO come modulatore di frequenza.

Dopo il prodotto, il filtro passa-basso (a guadagno unitario) e l'amplificatore, abbiamo

$$y(t) = -\frac{k_f A A_v}{2} \sin \epsilon(t), \quad (10.22)$$

dove

$$\epsilon(t) = 2\pi \Delta f t + 2\pi k_v \int^t y(\xi) d\xi + \phi_v - \psi(t). \quad (10.23)$$

La dinamica del segnale $\epsilon(t)$ è descritta dall'equazione differenziale (ottenuta derivando)

$$\dot{\epsilon}(t) + 2\pi k \sin \epsilon(t) = 2\pi \Delta f - \dot{\psi}(t), \quad (10.24)$$

con parametro

$$k = \frac{k_v k_f A A_v}{2}, \quad (10.25)$$

detto *guadagno d'anello*. Le condizioni di equilibrio del sistema si ottengono come soluzioni dell'equazione $\dot{\epsilon}_e(t) = 0$, ovvero la traiettoria di equilibrio è descritta dall'equazione

$$\sin \epsilon_e(t) = \frac{\Delta f}{k} - \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi k}. \quad (10.26)$$

Più esplicitamente, il segnale di uscita in condizioni di equilibrio è

$$y_e(t) = -\frac{\Delta f}{k_v} + \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi k_v}. \quad (10.27)$$

All'equilibrio, sull'uscita il primo termine compensa l'errore di frequenza e il secondo contiene la frequenza istantanea del segnale modulante, che è proporzionale al segnale utile. Quindi il PLL in condizioni di equilibrio è un demodulatore di frequenza. In pratica all'aumentare della differenza di fase tra il segnale in arrivo e il segnale generato dal VCO, si genera una controreazione negativa che tende a stabilizzare il loop. Purtroppo l'analisi statica non tiene conto del fatto che il seno è una funzione periodica e che la condizione è verificata a meno di salti di fase di 2π che corrispondono a più punti di equilibrio. Nella equazione quindi è implicito che affinché ci sia un unico punto di equilibrio

$$\left| \frac{\Delta f}{k} - \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi k} \right| < 1. \quad (10.28)$$

Questa condizione viene soddisfatta mediante un guadagno di anello k sufficientemente elevato e con un segnale modulante limitato in ampiezza. Vedremo che il guadagno di anello determina anche la velocità di aggancio.

Per valutare la dinamica attorno ai punti di equilibrio, analizziamo uno scenario semplificato supponendo che $\epsilon(t) \simeq 0$, ovvero si sia in condizioni di quasi-aggancio, e che il segnale modulante sia lentamente variabile rispetto alle variazioni della portante, per cui si può assumere che $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_0 = \text{cost}$. In tali condizioni $\sin \epsilon(t) \simeq \epsilon(t)$, e la dinamica è descritta dalla equazione differenziale del I ordine

$$\dot{\epsilon}(t) + 2\pi k \epsilon(t) = 2\pi \Delta f - \dot{\psi}_0. \quad (10.29)$$

Risolvendo per $t > 0$ con condizione iniziale $\epsilon(0)$ ¹ abbiamo

$$\epsilon(t) = \epsilon(0)e^{-2\pi kt} + \frac{2\pi \Delta f - \dot{\psi}_0}{2\pi k} (1 - e^{-2\pi kt}) \quad (10.33)$$

Il valore asintotico è quindi appunto

$$\epsilon(\infty) = \frac{\Delta f}{k} - \frac{\dot{\psi}_0}{2\pi k}, \quad (10.34)$$

con costante di tempo (determinata dall'unico autovalore reale $\lambda = -2\pi k$)

$$\tau_{\text{aggancio}} = \frac{1}{2\pi k}. \quad (10.35)$$

Quindi al crescere del guadagno la velocità di inseguimento aumenta. Il guadagno di anello va comunque progettato realizzando un compromesso

¹Ricordiamo brevemente come risolvere l'equazione. Usando il metodo della trasformata di Laplace, l'equazione diventa

$$sE(s) - \epsilon(0) + 2\pi k E(s) = \frac{1}{s} (2\pi \Delta f - \dot{\psi}_0). \quad (10.30)$$

La soluzione è

$$E(s) = \frac{\epsilon(0)}{s + 2\pi k} + \frac{2\pi \Delta f - \dot{\psi}_0}{s(s + 2\pi k)}. \quad (10.31)$$

Usando la scomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{s(s + 2\pi k)} = \frac{1}{2\pi k} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 2\pi k} \right), \quad (10.32)$$

e antitrasformando abbiamo l'equazione (10.33).

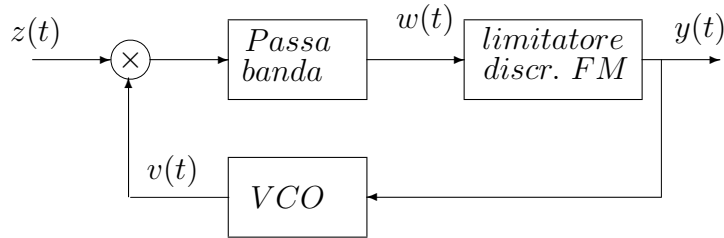


Figura 10.16: Lo schema a blocchi di un FMFB

tra la velocità di aggancio, la banda del loop e la attenuazione del segnale utile in uscita.

Nelle realizzazioni del PLL in cui il sistema parte da condizioni lontane dall'equilibrio, si include un generatore a rampa che “esplora” le frequenze per l'aggancio. Anche l'amplificatore a guadagno k_f viene spesso rimpiazzato con una filtro per controllare la banda sulla controreazione. Per queste ulteriori considerazioni si rimanda il lettore alla vasta letteratura sull'argomento (Stremmer 1990, per una discussione compatta).

10.4.4 L' FMFB

L'idea di utilizzare un modulatore di frequenza sull'anello di controreazione per realizzare un demodulatore di frequenza è la strategia chiave nel PLL che insegue in questo modo la fase del segnale in arrivo. La stessa idea applicata ad un discriminatore di frequenza, e descritta dallo schema di figura 10.16, è il cosiddetto FMFB (Frequency Demodulator with negative FeedBack).

Nell'FMFB il discriminatore di frequenza è controreazionato con un VCO la cui uscita realizza una eterodina con il segnale in arrivo. In particolare assumiamo di avere all'ingresso un segnale modulato FM

$$z(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + s_f \int^t s(\xi) d\xi + \psi_0 \right), \quad (10.36)$$

e un VCO che in assenza di ingresso oscilla alla frequenza $f_0 - f_i$

$$v(t) = A_v \cos \left(2\pi (f_0 - f_i) t + k_v \int^t y(\xi) d\xi + \phi_0 \right), \quad (10.37)$$

dove f_i è una frequenza intermedia $f_i < f_0$. Il segnale all'ingresso del discriminatore di frequenza è

$$w(t) = \frac{AA_v}{2} \cos \left(2\pi f_i t + s_f \int^t s(\xi) d\xi - k_v \int^t y(\xi) d\xi + \psi_0 - \phi_0 \right). \quad (10.38)$$

Esso è centrato alla frequenza intermedia f_i e ha frequenza istantanea

$$f_w(t) = f_i + \frac{s_f}{2\pi} s(t) - \frac{k_v}{2\pi} y(t). \quad (10.39)$$

Se il discriminatore è assunto essere un demodulatore FM ideale,

$$y(t) = \frac{s_f}{2\pi} s(t) - \frac{k_v}{2\pi} y(t). \quad (10.40)$$

Risolvendo all'equilibrio abbiamo

$$y(t) = \frac{s_f}{2\pi + k_v} s(t), \quad (10.41)$$

che mostra come l'uscita del sistema sia ancora un segnale demodulato FM. All'ingresso del discriminatore all'equilibrio c'è il segnale

$$w(t) = \frac{AA_v}{2} \cos \left(2\pi f_i t + \frac{s_f}{1 + \frac{k_v}{2\pi}} \int^t s(\xi) d\xi + \psi_0 - \phi_0 \right). \quad (10.42)$$

Quindi l'eterodina effettuata con un oscillatore modulato in frequenza, non solo trasla il segnale in arrivo attorno alla frequenza intermedia f_i , ma riduce anche il coefficiente di modulazione del fattore $\frac{1}{1 + \frac{k_v}{2\pi}}$. Quindi la banda all'ingresso del discriminatore è ridotta dello stesso fattore rispetto a quella del segnale ricevuto. Il sistema così controreazionato realizza un demodulatore di frequenza con migliori caratteristiche di rapporto segnale-rumore e un discriminatore che può essere progettato per una banda più ridotta. L'effetto soglia, che sarà discusso nel prossimo capitolo, avviene nell'FMFB a 5-7 dB al di sotto del valore caratteristico del discriminatore di frequenza non reazionato. Quindi l'FMFB, usato molto spesso nei sistemi reali, è particolarmente adatto in condizioni di basso rapporto segnale-rumore.

Esempio 10.1 Schema di Ricevitore FM.

La figura 10.17 mostra lo schema tipico di un ricevitore FM. Il multiplex è distribuito nella banda 88.0-108.0 MHz. I canali sono di 200 KHz ognuno con massima deviazione di frequenza di 75 KHz. Il primo canale (FM Channel 201)

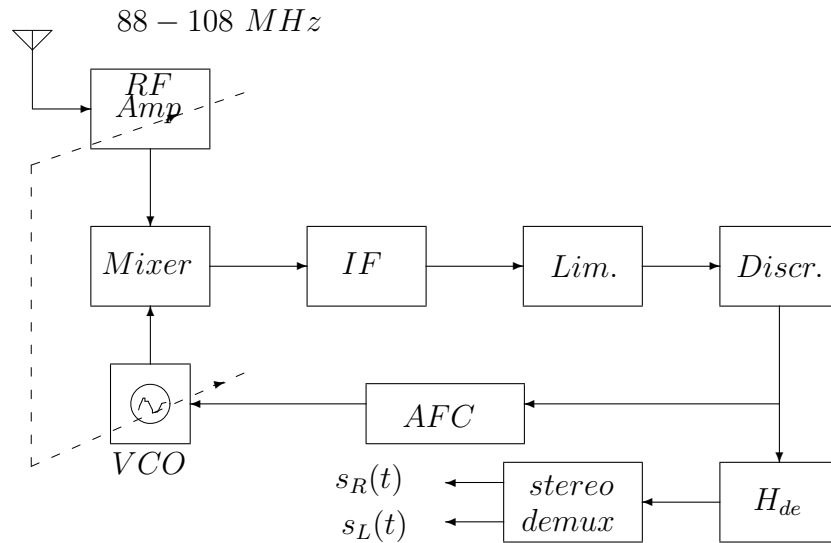


Figura 10.17: Lo schema a blocchi di un ricevitore FM commerciale

è a frequenza di portante di 88.1 MHz; l'ultimo (FM Channel 300) a 107.9 MHz. La sintonia è realizzata mediante una supereterodina che riporta il segnale alla frequenza intermedia di 10.7 MHz. Questa è un pò più della metà della larghezza di banda di tutto il multiplex, per evitare le bande immagine. L'indice di modulazione è 5 per $\Delta f = 75$ KHz e $B = 15$ KHz. Lo schema è controreazionato (FMFB) per migliori prestazioni a basso rapporto segnale-rumore. L'ultimo stadio è costituito dal filtro di de-enfasi e dal demultiplexer per i segnali stereo (se presenti). Maggiori dettagli sull'FM commerciale sono facilmente reperibili su manuali e norme di utilizzo.

Capitolo 11

Modulazione angolare in presenza di rumore

In questo capitolo vengono discusse le prestazioni dei ricevitori PM e FM quando al segnale ricevuto si è sovrapposto rumore passa-banda. La trattazione viene esemplificata in due scenari di riferimento con rapporto segnale-rumore rispettivamente alto e basso. Il capitolo include un confronto con la modulazione lineare

11.1 Introduzione

La semplice visualizzazione di un segnale modulato in angolo contaminato da rumore additivo rivela che la struttura istantanea delle intersezioni con l'asse dei tempi risulta meno influenzata dell'ampiezza istantanea, almeno quando il rumore non è dominante. Nella modulazione angolare quindi l'informazione associata alla fase istantanea del segnale modulato è maggiormente protetta rispetto al rumore additivo, almeno in condizioni di rapporto segnale-rumore elevato.

Purtroppo la modulazione angolare è più complessa da analizzare matematicamente e una trattazione approfondita degli effetti del rumore sarebbe troppo onerosa e certamente al di là dello scopo di queste note. Riportiamo in questo capitolo un'analisi approssimata distinguendo il caso di rapporto segnale-rumore favorevole con quello a elevato rumore, in cui le prestazioni diminuiscono drasticamente dando origine al cosiddetto *effetto soglia*. Nonostante le semplificazioni, i risultati qui riportati trovano un buon riscontro sperimentale nelle caratteristiche prestazionali essenziali di questa classe di modulazioni in presenza di rumore. Il lettore interes-

sato a ulteriori approfondimenti è rimandato alla vasta letteratura classica sull'argomento.

Si consideri lo schema di figura 11.1, dove si è assunto rumore bianco $n_b(t)$ all'ingresso del ricevitore e un filtro passa-banda che lascia passare invariato il segnale modulato. Il contributo di rumore sarà passa-banda attorno alla portante nell'intervallo $[f_0 - \frac{W}{2}, f_0 + \frac{W}{2}]$. Ricordiamo che $W \simeq 2\Delta f$, poiché la massima deviazione di frequenza fornisce una stima approssimativa (in genere un pò per difetto) della banda occupata dal segnale modulato in angolo (a banda larga).¹

Utilizzando la rappresentazione passa-banda del rumore, abbiamo all'ingresso del demodulatore angolare

$$\begin{aligned} v(t) &= z(t) + n(t) \\ &= A \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)) + n_c(t) \cos 2\pi f_0 t + n_s(t) \sin 2\pi f_0 t. \end{aligned}$$

Le versioni analitiche e gli involucri complessi sono facilmente ottenuti

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \tilde{v}(t) e^{j2\pi f_0 t} = (A e^{j\psi(t)} + \tilde{n}(t)) e^{j2\pi f_0 t}, \\ \tilde{v}(t) &= A e^{j\psi(t)} + \tilde{n}(t) = A \cos \psi(t) + n_c(t) + j(A \sin \psi(t) - n_s(t)), \\ \tilde{n}(t) &= A_n(t) e^{j\theta_n(t)}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

con $A_n(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$, $\theta_n(t) = -\arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)}$.

Il lettore osservi che il segnale analitico associato al segnale modulato non è totalmente congruente con la definizione del Capitolo 1. Infatti $e^{j\psi(t)} e^{j2\pi f_0 t}$ è a banda infinita e sconfinata sull'asse negativo delle frequenze. Nonostante ciò, se la frequenza della portante è sufficientemente elevata e il segnale è concentrato alle alte frequenze, il problema è marginale. Tale approssimazione è stata già utilizzata nei capitoli precedenti.

La figura 11.2 mostra la rappresentazione grafica degli involucri complessi di segnale modulato e rumore passa-banda. Nel disegno si è assunto che il rapporto segnale-rumore sia abbastanza elevato da poter disegnare il modulo A dominante su $A_n(t)$.

Guardando la figura, abbiamo che la fase istantanea del segnale all'ingresso del demodulatore è

$$\theta_v(t) = \psi(t) + \arctan \frac{A_n(t) \sin(\theta_n(t) - \psi(t))}{A + A_n(t) \cos(\theta_n(t) - \psi(t))} \quad rad, \quad (11.2)$$

¹Per tenere conto di una eventuale migliore stima della banda, potremmo utilizzare un fattore di correzione α con $\frac{W}{2} = \alpha \Delta f$ (ad esempio $\alpha \simeq 0.9$). Per semplicità non includeremo nella nostra trattazione nessun fattore di correzione.

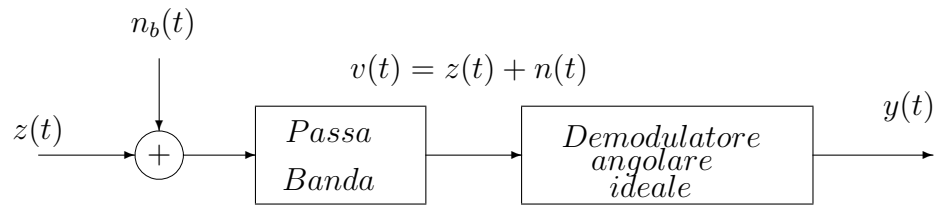


Figura 11.1: Lo schema di un demodulatore angolare ideale in presenza di rumore

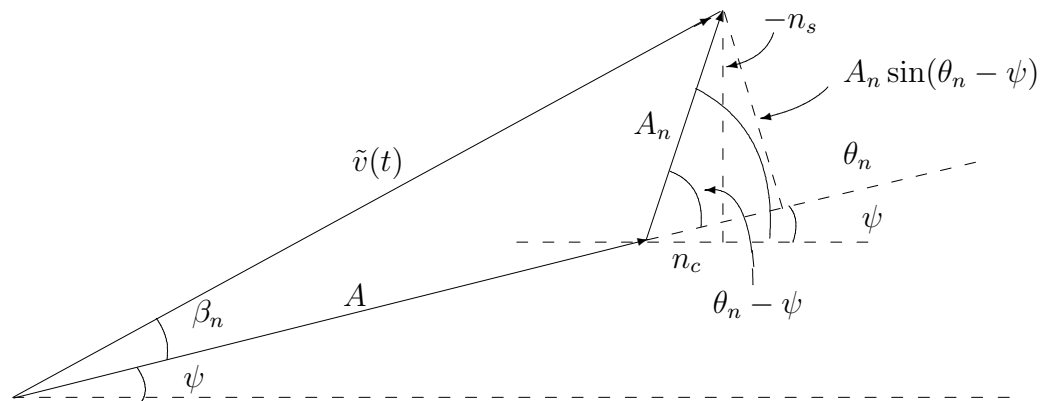


Figura 11.2: Il segnale modulato in angolo contaminato da rumore nel piano dell'involuppo complesso

e la frequenza istantanea

$$f_v(t) = \frac{\dot{\theta}_v(t)}{2\pi} = \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctan \frac{A_n(t) \sin(\theta_n(t) - \psi(t))}{A + A_n(t) \cos(\theta_n(t) - \psi(t))} \quad Hz. \quad (11.3)$$

Il lettore noti che l'effetto del rumore sulla fase o sulla frequenza istantanea non è additivo. Infatti non è possibile separare in due termini l'effetto del rumore e del segnale come nella modulazione lineare: segnale e rumore sono mescolati nel secondo termine in maniera non lineare.

Un'analisi esatta degli effetti del rumore può risultare particolarmente insidiosa e il lettore interessato agli approfondimenti analitici è rimandato alla vasta letteratura sull'argomento. Riportiamo in queste note solo un'analisi semplificata, che comunque cattura le caratteristiche essenziali che si riscontrano sperimentalmente nei sistemi reali. A tal fine distingueremo due casi con riferimento al rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore. Ovvero quando $(S/N)_{in} \gg 1$ e quando $(S/N)_{in} \ll 1$. Il rapporto segnale-rumore all'ingresso del ricevitore si scrive

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2/2}{2|\Delta f|_{max}\eta_0}. \quad (11.4)$$

11.2 Analisi per rapporto segnale-rumore elevato

Quando $(S/N)_{in} \gg 1$, l'involuppo istantaneo del rumore è molto minore dell'ampiezza della portante $A_n(t) \ll A$ e pertanto possiamo approssimare fase e frequenza istantanea

$$\theta_v(t) \simeq \psi(t) + \arctan \frac{A_n(t) \sin(\theta_n(t) - \psi(t))}{A} \quad rad, \quad (11.5)$$

$$f_v(t) \simeq \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctan \frac{A_n(t) \sin(\theta_n(t) - \psi(t))}{A} \quad Hz. \quad (11.6)$$

Nonostante la caratterizzazione statistica del termine di rumore dipenda sia da ψ che da θ_n , la aleatorietà di ψ che si somma a θ_n nell'argomento del seno, non altera la natura aleatoria del numeratore che assumeremo essere pari a $A_n \sin \theta_n = -n_s$. Pertanto le approssimazioni di fase e frequenza istantanea diventano

$$\theta_v(t) \simeq \psi(t) + \arctan \frac{-n_s(t)}{A} \quad rad, \quad (11.7)$$

$$f_v(t) \simeq \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctan \frac{-n_s(t)}{A} \quad Hz. \quad (11.8)$$

Quindi sia la fase che la frequenza istantanea secondo queste approssimazioni sono contaminate da un rumore che non dipende più dal segnale modulante. L'ampiezza A della portante gioca invece un ruolo essenziale riducendo proporzionalmente l'effetto del rumore. In pratica la approssimazione equivale a valutare il contributo di rumore sull'uscita come se all'ingresso ci fosse solo la portante sommata al rumore passa-banda. In oltre nell'ipotesi di $A \gg n_s$ l'arcotangente può essere approssimata al suo argomento. Pertanto la fase e la frequenza istantanea diventano

$$\theta_v(t) \simeq \psi(t) - \frac{n_s(t)}{A} \quad rad, \quad (11.9)$$

$$f_v(t) \simeq \frac{\dot{\psi}(t)}{2\pi} - \frac{\dot{n}_s(t)}{2\pi A} \quad Hz. \quad (11.10)$$

La approssimazione è anche evidente dalla figura 11.2 che per $A \gg A_n$ consente di scrivere $\beta_n \simeq -\frac{n_s}{A}$.

Il demodulatore angolare ideale restituisce un segnale passa-basso in uscita limitato alla banda $[-B, B]$ che nel caso PM e FM è rispettivamente

$$y_{PM}(t) \simeq s_\phi s(t) - \frac{n_s(t)}{A} \Big|_{LP[-B,B]}, \quad (11.11)$$

$$y_{FM}(t) \simeq \frac{1}{2\pi} s_f s(t) - \frac{\dot{n}_s(t)}{2\pi A} \Big|_{LP[-B,B]}, \quad (11.12)$$

Assumendo un comportamento ideale a guadagno unitario per il filtro passa-basso

$$|H_{LP}(f)| = \Pi \left(\frac{f}{2B} \right), \quad (11.13)$$

e ricordando che il derivatore ideale ha risposta armonica $j2\pi f$, lo spettro di potenza di $y(t)$ è nei due casi

$$P_{yPM}(f) = s_\phi^2 P_s(f) + \frac{1}{A^2} P_{n_s}(f) \Pi \left(\frac{f}{2B} \right); \quad (11.14)$$

$$P_{yFM}(f) = \frac{s_f^2}{4\pi^2} P_s(f) + \frac{f^2}{A^2} P_{n_s}(f) \Pi \left(\frac{f}{2B} \right). \quad (11.15)$$

Si noti che il rumore a destinazione per la modulazione FM è del tipo f^2 , $-B < f < B$, quindi con maggiore densità di potenza alle alte frequenze. Viceversa nella PM la caratteristica è piatta.

Il rapporto segnale-rumore in uscita è nei due casi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{PMout} = \frac{s_\phi^2 \int_{-B}^B P_s(f) df}{\frac{1}{A^2} \int_{-B}^B P_{n_s}(f) df} = \frac{A^2 s_\phi^2 P_s}{\int_{-B}^B \eta_0 df} = \frac{A^2 s_\phi^2 P_s}{2\eta_0 B}; \quad (11.16)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} = \frac{\frac{s_f^2}{4\pi^2} \int_{-B}^B P_s(f) df}{\frac{1}{A^2} \int_{-B}^B f^2 P_{n_s}(f) df} = \frac{A^2 s_f^2 P_s}{4\pi^2 \int_{-B}^B f^2 \eta_0 df} = \frac{3A^2 s_f^2 P_s}{8\pi^2 \eta_0 B^3}. \quad (11.17)$$

Il risultato esprime il miglioramento delle prestazioni con il quadrato del coefficiente di modulazione s_ϕ o s_f . Poiché la larghezza di banda è determinata dalla massima deviazione di frequenza e questa dipende linearmente dal coefficiente di modulazione, abbiamo che *le prestazioni migliorano al crescere della banda occupata dal segnale modulato*. Questo aspetto caratterizza la modulazione angolare a differenza delle modulazioni lineari dove la banda resta fissata e non dipende dai parametri della modulazione.

Per identificare meglio i vari contributi nell'espressione del rapporto segnale-rumore, ricordiamo che nella PM

$$|\Delta f|_{max} = \frac{s_\phi |\dot{s}(t)|_{max}}{2\pi}, \quad (11.18)$$

mentre nell FM

$$|\Delta f|_{max} = \frac{s_f |s(t)|_{max}}{2\pi}. \quad (11.19)$$

Estraendo s_ϕ e s_f e sostituendo abbiamo che il rapporto segnale-rumore si scrive nei due casi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{PMout} = 4\pi^2 \frac{A^2/2}{\eta_0 B} \frac{P_s}{|\dot{s}(t)|_{max}^2} |\Delta f|_{max}^2. \quad (11.20)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} = 3 \frac{A^2/2}{\eta_0 B} \frac{P_s}{|s(t)|_{max}^2} \left(\frac{|\Delta f|_{max}}{B}\right)^2. \quad (11.21)$$

Il termine

$$\gamma = \frac{A^2/2}{\eta_0 B} \quad (11.22)$$

è il rapporto segnale-rumore che avremmo se la banda occupata fosse B . E' infatti il rapporto tra la potenza del segnale modulato (praticamente la

potenza della portante) e del rumore che avremmo se la banda occupata sul canale fosse B . Il parametro γ , già usato per le modulazioni lineari, verrà anche qui utilizzato per confrontare le prestazioni di FM e PM con quelle della modulazione lineare a parità di potenza trasmessa.

I termini $P_s/|s(t)|_{max}^2$ e $P_s/|\dot{s}(t)|_{max}^2$ dipendono solo dalle caratteristiche del segnale modulante. Il rapporto tra il valore RMS (valore efficace) e il valore massimo di un segnale è detto *rapporto di picco* m_p

$$m_p = \sqrt{P_s}/|s(t)|_{max}. \quad (11.23)$$

Nel caso di segnale modulante $s(t)$ sinusoidale $s(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, il rapporto di picco è $m_p = 1/\sqrt{2}$.

Per operare un confronto diretto assumiamo che

$$|\dot{s}(t)|_{max} \simeq 2\pi B |s(t)|_{max}. \quad (11.24)$$

La relazione è esatta se $s(t)$ è un segnale sinusoidale.

I termini $|\Delta f|_{max}^2$ e $\left(\frac{|\Delta f|_{max}}{B}\right)^2$ riflettono la dipendenza delle prestazioni dalla massima deviazione di frequenza: maggiore è la banda occupata, migliori saranno le prestazioni del sistema. Quindi a parità di potenza trasmessa la modulazione angolare può ottenere eccellenti rapporti segnale-rumore a spese di un allargamento della banda occupata sul canale. Per un confronto più diretto tra le due modulazioni, ricordiamo che il massimo rapporto di deviazione di frequenza, o indice di modulazione, è definito come

$$m = \frac{|\Delta f|_{max}}{B}. \quad (11.25)$$

Riscrivendo le due espressioni abbiamo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{PMout} = \gamma m_p^2 m^2, \quad (11.26)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} = 3\gamma m_p^2 m^2. \quad (11.27)$$

Esprimendo il risultato in dB

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{PMout \text{ dB}} = \gamma_{dB} + 20 \log_{10} m_p + 20 \log_{10} m. \quad (11.28)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout \text{ dB}} = 4.77 + \gamma_{dB} + 20 \log_{10} m_p + 20 \log_{10} m. \quad (11.29)$$

E' opportuno enfatizzare che se aumenta la banda sul canale cresce anche la potenza di rumore che entra nel ricevitore (la potenza del segnale resta praticamente invariata ed è $A^2/2$). Quindi per tenere conto anche dell'effetto della larghezza di banda l'*efficienza spettrale* definita come

$$b = \frac{\text{banda base}}{\text{banda del segnale modulato}} \simeq \frac{B}{2 \Delta f}, \quad (11.30)$$

deve essere considerata congiuntamente al rapporto segnale-rumore per operare dei confronti con le prestazioni della modulazione lineare.

Ricordiamo che l'analisi riportata è valida solo se il rapporto segnale-rumore all'ingresso è elevato. Se il rapporto segnale-rumore all'ingresso raggiunge un valore critico, l'analisi degenera a causa dell'emergenza di altri effetti (rumore impulsivo). Le prestazioni degradano drasticamente e danno luogo al cosiddetto *effetto soglia*. Un'analisi delle condizioni sotto soglia per l'FM verranno discusse qui di seguito. La transizione tra le condizioni sotto soglia e di rapporto segnale-rumore elevato dovranno essere intuite per estrapolazione dai due casi estremi.

11.3 Equalizzazione nell'FM

Prima di esaminare il caso di modulazione in condizioni di basso rapporto segnale-rumore, notiamo che all'uscita del demodulatore FM dalla formula (11.15) il rumore additivo è di tipo passa-alto con l'andamento parabolico mostrato in figura 11.3.

Pertanto, lo schema equivalente del sistema diventa quello di Figura 11.4(a), dove il rumore equivalente $n_e(t)$ ha le caratteristiche passa-alto di figura 11.3, ovvero ha spettro di potenza

$$P_{n_e}(f) = \frac{\eta_0}{A^2} f^2 \Pi \left(\frac{f}{2B} \right). \quad (11.31)$$

Un miglioramento delle prestazioni può essere ottenuto mediante un opportuno preconditionamento del segnale con un filtro di pre-enfasi in trasmissione (prima della modulazione). La teoria sui filtri terminali ottimi prevede che in trasmissione si inserisca un filtro avente risposta di energia

$$|H_{pe}(f)|^2 = k \frac{P_{n_e}(f)^{1/2}}{P_s(f)^{1/2}} = k' f \Pi \left(\frac{f}{2B} \right), \quad (11.32)$$

dove si è assunto che il segnale abbia uno spettro di potenza piatto in frequenza nella banda $[-B, B]$. Si tratta di un filtro passa-alto che deve

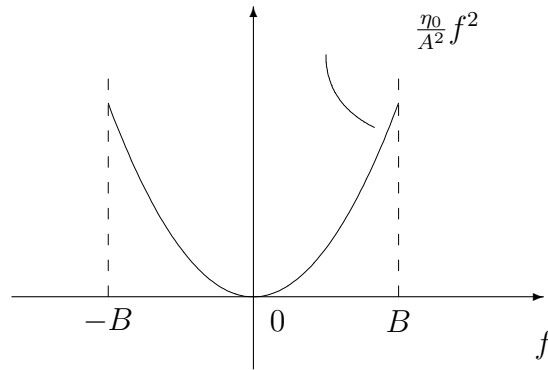


Figura 11.3: Lo spettro parabolico del rumore all'uscita del demodulatore FM.

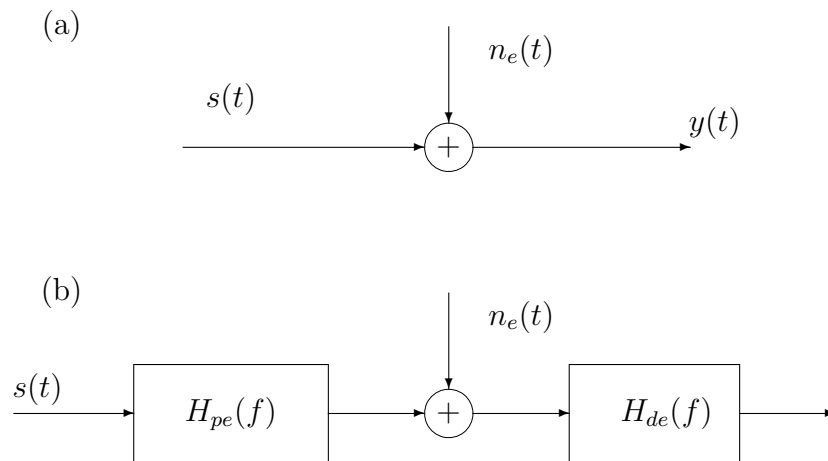


Figura 11.4: (a) Lo schema equivalente della catena FM in condizioni di rapporto segnale-rumore elevato; (b) Lo stesso sistema con l'inclusione di filtri di enfasi e di de-enfasi.

enfaticamente le alte frequenze. Il filtro ricevente deve ovviamente compensare la distorsione introdotta dal primo filtro ed avere risposta armonica tale che

$$H_{pe}(f)H_{de}(f) = c e^{j2\pi f t_0}, \quad f \in [-B, B], \quad (11.33)$$

ovvero deve avere una risposta di ampiezza di tipo passa-basso. Il progetto esatto dei filtri di enfasi e de-enfasi dovrà occuparsi dei problemi di realizzabilità, di distorsione di fase e delle caratteristiche attorno alla frequenza zero dove la risposta del filtro inverso potrebbe divergere. Pertanto le condizioni di ottimalità e di assenza di distorsione potrebbero essere solo approssimate.

Prima di esaminare un esempio specifico di progetto di filtri, per tenere conto delle conseguenze dell'introduzione di due generici filtri $H_{pe}(f)$ e $H_{de}(f)$ nella catena FM, definiamo il rapporto

$$D = \frac{\text{potenza di rumore in uscita senza enfasi}}{\text{potenza di rumore in uscita con enfasi}}. \quad (11.34)$$

L'introduzione del fattore D consente di valutare il rapporto segnale-rumore in uscita moltiplicando per esso il rapporto segnale-rumore ottenuto senza enfasi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout(\text{con enfasi})} = \left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} D. \quad (11.35)$$

Più in particolare

$$D = \frac{\int_{-B}^B \frac{\eta_0}{A^2} f^2 df}{\int_{-B}^B \frac{\eta_0}{A^2} f^2 |H_{de}(f)|^2 df} = \frac{B^3}{3 \int_0^B f^2 |H_{de}(f)|^2 df}. \quad (11.36)$$

Come già menzionato, il progetto dei due filtri potrà essere condotto tenendo conto delle caratteristiche del segnale modulante, della fisica realizzabilità e delle specifiche sulla distorsione. Riportiamo qui di seguito solo un esempio classico basato su semplicissimi circuiti RC .

Esempio 11.1 Reti di enfasi e de-enfasi: La Figura 11.5 mostra una tipica coppia di circuiti per enfasi e de-enfasi. Il primo circuito ha risposta armonica

$$H_{pe}(f) = \frac{j2\pi f + \frac{1}{rC}}{j2\pi f + \frac{R+r}{rRC}}. \quad (11.37)$$

Si noti la caratteristica passa-alto visto che

$$H_{pe}(0) = \frac{R}{r+R} < 1; \quad H_{pe}(\infty) = 1. \quad (11.38)$$

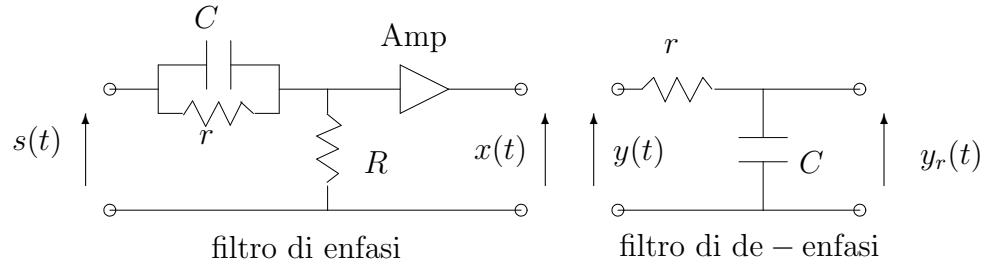


Figura 11.5: Tipica coppia di reti di enfasi e de-enfasi per la modulazione FM

Il filtro di de-enfasi è un semplice passa-basso RC con risposta armonica

$$H_{de}(f) = \frac{1}{rC} \frac{1}{j2\pi f + \frac{1}{rC}}. \quad (11.39)$$

Le due risposte sono approssimativamente complementari visto che

$$H_{pe}(f)H_{de}(f) = \frac{R}{R+r} \frac{1}{1 + j2\pi f \frac{rRC}{R+r}}. \quad (11.40)$$

La risposta complessiva è piatta alle basse frequenze avendo frequenza di taglio a

$$f_{c2} = \frac{R+r}{2\pi rRC} \gg f_{c1} = \frac{1}{2\pi rC}, \quad (11.41)$$

dove f_{c1} è la frequenza di taglio del filtro di de-enfasi.

Per questa rete di enfasi è possibile calcolare analiticamente il fattore di miglioramento D . Osserviamo che la funzione di trasferimento dell'energia del filtro di de-enfasi è

$$|H_{de}(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (rC)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_{c1}}\right)^2}. \quad (11.42)$$

Il fattore di miglioramento è pertanto da equazione (11.36)

$$D = \frac{B^3}{3 \int_0^B \frac{f^2}{1 + \left(\frac{f}{f_{c1}}\right)^2} df}. \quad (11.43)$$

Eseguendo il semplice integrale

$$\int_0^B \frac{f^2}{1 + \left(\frac{f}{f_{c1}}\right)^2} df = f_{c1}^3 \int_0^{B/f_{c1}} \frac{x^2}{1 + x^2} dx \quad (11.44)$$

$$= f_{c1}^3 \int_0^{B/f_{c1}} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = f_{c1}^3 \left[\frac{B}{f_{c1}} - \arctan\left(\frac{B}{f_{c1}}\right) \right], \quad (11.45)$$

il fattore di miglioramento diventa

$$D = \frac{(B/f_{c1})^3}{3 \left(\frac{B}{f_{c1}} - \arctan\left(\frac{B}{f_{c1}}\right) \right)}. \quad (11.46)$$

Assegnando dei valori tipici dell'FM commerciale: $B = 15$ KHz, $f_{c1} = 2.1$ KHz, abbiamo $D = 21.27$ che corrisponde a circa 13 dB. Quindi nell'FM commerciale, dove si ottengono rapporti segnale-rumore dell'ordine di 40-50 dB senza enfasi, si raggiungono i 50-63 dB.

11.4 Analisi dell'FM per rumore dominante

Le analisi matematiche generali delle prestazioni dell'FM in presenza di rumore sono piuttosto complesse e riportate nella vasta letteratura sull'argomento. L'effetto sperimentale però è abbastanza semplice: all'aumentare del rumore dopo un decadimento lineare delle prestazioni, c'è un brusco peggioramento quando il rapporto segnale-rumore va al di sotto di un certo valore critico. Si tratta del cosiddetto *effetto soglia* dell'FM che è possibile trattare analiticamente mediante l'ingegnosa analisi del "click" di Rice. Nell'analizzare sperimentalmente gli effetti del rumore su un segnale audio, egli osservò che all'aumentare del rumore, si riscontrano nel segnale ricevuto dei "crack" che diventano progressivamente dominanti fino alla totale distruzione dell'intelligibilità del segnale. Rice suggerì che tale effetto è il risultato di salti di fase, che nella frequenza istantanea diventano impulsi. La frequenza di occorrenza di tali impulsi aumenta a valanga al di sotto della soglia fino a contaminare rapidamente l'uscita in maniera irrecuperabile per il segnale di informazione.

Anche se l'analisi dei click è basata su una estrema semplificazione di fenomeni di per sé piuttosto complessi, essa riflette sorprendentemente bene i dati sperimentali. Riportiamo qui i passi essenziali di tale analisi per la modulazione FM.

Quando $(S/N)_{in} \ll 1$ il rumore domina sul segnale e siamo nella situazione in cui $A \ll n_s, n_c$. Figura 11.6(a) rappresenta il segnale modulato

e il rumore nel piano dell'involuppo complesso. Il vettore risultante descrive una traiettoria che non è più confinata all'intorno della punta del vettore che rappresenta il segnale modulato, come avviene nel caso di rumore piccolo, ma si estende su tutto il piano. La figura 11.6(b) rappresenta lo stesso diagramma in assenza di segnale modulante ($\psi(t) = 0$) evidenziando il fenomeno peculiare dell'*arrotondamento della fase*. Assumendo che il demodulatore di fase riveli soltanto l'argomento principale di $\tilde{v}(t)$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, all'istante t_i , quando $\tilde{v}(t)$ attraversa il semiasse tra i II e il III quadrante, l'uscita subisce un salto di fase di $\pm 2\pi$. Per ognuno di questi eventi la fase istantanea subisce l'aggiunta di un gradino $\pm 2\pi u(t - t_i)$. Di conseguenza la frequenza istantanea, subisce l'aggiunta di un impulso $\pm 2\pi\delta(t - t_i)$. All'uscita del demodulatore FM gli impulsi sono quindi $\pm s_f\delta(t - t_i)$ (*Click*).

La figura 11.7 mostra un segmento di segnale $\theta_v(t)$ dove ad ogni attraversamento degli assi a $\pm\pi$ si verifica un salto nella fase e un impulso nella frequenza istantanea. Il fenomeno dell'arrotondamento della fase è da considerarsi distruttivo in quanto esso altera completamente la struttura del segnale in uscita. In linea di principio un complesso meccanismo di *srotolamento della fase* potrebbe essere realizzato seguendo nel tempo il segnale demodulato e rimuovendo puntualmente l'effetto indesiderato (esistono nella letteratura molti algoritmi sullo srotolamento della fase su segnali numerici). La complessità di un tale ricevitore sarebbe però largamente superiore a quella del classico discriminatore di frequenza descritto nel capitolo precedente ed è da considerare più una possibilità teorica che pratica.

Una descrizione analitica rigorosa delle condizioni di demodulazione di fase, anche in presenza di rumore elevato è purtroppo piuttosto complessa. Rimandiamo il lettore interessato alla vasta letteratura classica sull'argomento. Riportiamo in queste note solo un'analisi approssimata in condizioni di assenza di segnale modulante. Nel risultato finale si assumerà che il rumore in uscita sia la pura sovrapposizione del rumore che avremmo in condizioni di rapporto segnale-rumore elevato e di quello generato dai salti di fase. Nonostante la apparente arbitrarietà di una tale analisi, i risultati descrivono abbastanza bene le prestazioni riscontrate sperimentalmente su sistemi reali.

11.4.1 Probabilità di occorrenza dei salti di fase

Prima di analizzare la struttura dei segnali in uscita, assumiamo che i salti di fase siano indipendenti e valutiamone la probabilità di occorrenza.

Un salto di fase negativo da $+\pi$ a $-\pi$ (impulso negativo nella frequen-

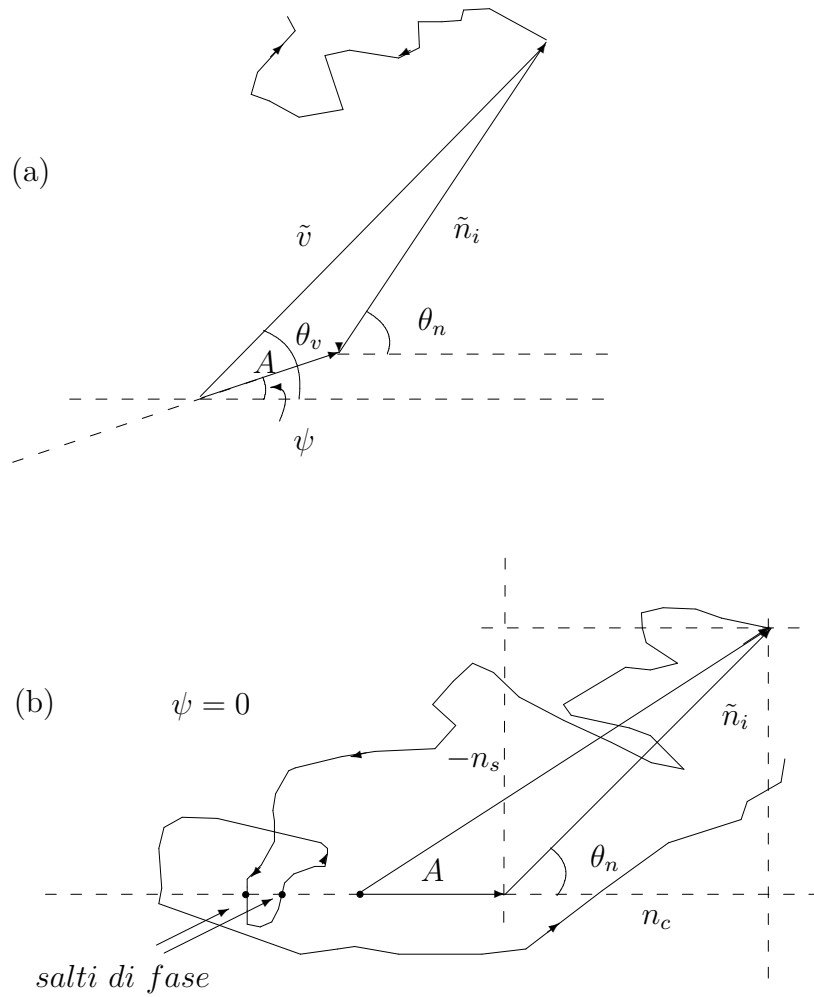


Figura 11.6: (a) Il segnale modulato in angolo contaminato da rumore nel piano dell'involuppo complesso in condizioni di basso rapporto segnale-rumore; (b) Lo stesso grafico per segnale modulante nullo ($\psi(t) = 0$).

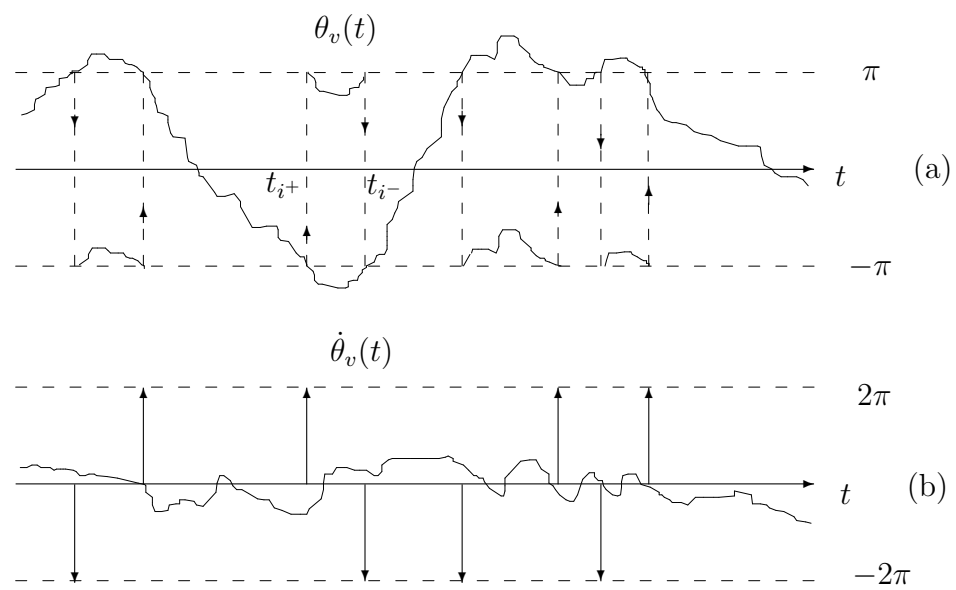


Figura 11.7: (a) Il fenomeno dell'arrotolamento della fase; (b) Gli impulsi (click) che ne risultano nella frequenza istantanea

za istantanea) avviene se la punta del vettore $\tilde{v}(t)$ nell'intervallo infinitesimo $[t_i, t_i + \Delta t]$ attraversa il semiasse negativo delle ascisse dal II al III quadrante, ovvero quando

$$\pi - \frac{\Delta\theta}{2} < \theta_n < \pi + \frac{\Delta\theta}{2}; \quad \dot{\theta}_n > 0; \quad A_n > A, \quad (11.47)$$

con $\Delta\theta > 0$ molto piccolo. Usando invece le componenti seno e coseno, la condizione si può riscrivere come

$$-\frac{\epsilon}{2} < -n_s < \frac{\epsilon}{2}; \quad -\dot{n}_s < 0; \quad n_c < -A, \quad (11.48)$$

con $\epsilon > 0$ molto piccolo. Analogamente un salto di fase positivo da $-\pi$ a $+\pi$ (impulso positivo nella frequenza istantanea) avviene se la punta del vettore $\tilde{v}(t)$ nell'intervallo infinitesimo $[t_i, t_i + \Delta t]$ attraversa il semiasse negativo delle ascisse dal III al II quadrante, ovvero quando

$$-\pi + \frac{\Delta\theta}{2} < \theta_n < -\pi - \frac{\Delta\theta}{2}; \quad \dot{\theta}_n < 0; \quad A_n > A. \quad (11.49)$$

Usando le componenti seno e coseno, la condizione si può riscrivere come

$$-\frac{\epsilon}{2} < -n_s < \frac{\epsilon}{2}; \quad -\dot{n}_s > 0; \quad n_c < -A. \quad (11.50)$$

Per simmetria e denotando rispettivamente le due probabilità con p^- e p^+ , e le frequenze relative di occorrenza N_- e N_+ , abbiamo

$$p^+ = p^- = N_- \Delta t = N_+ \Delta t = \int_0^{+\infty} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \int_{-\infty}^{-A} f_{n_c n_s \dot{n}_s}(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (11.51)$$

dove $f_{n_c n_s \dot{n}_s}$ è la pdf congiunta di n_c , n_s e \dot{n}_s . Dalla teoria descritta nel Capitolo 2, ricordiamo che $n_c(t)$ e $n_s(t)$ sono processi aleatori gaussiani indipendenti a media nulla e varianza

$$P_n = VAR[n_c] = VAR[n_s] = VAR[n] = 2\eta_0 \Delta f. \quad (11.52)$$

Notiamo anche che lo spettro di potenza del segnale $\dot{n}_s(t)$ è

$$P_{\dot{n}_s}(f) = 4\pi^2 f^2 \Pi\left(\frac{f}{2\Delta f}\right). \quad (11.53)$$

La varianza, che coincide con la potenza, di $\dot{n}_s(t)$ è pertanto

$$V_n = VAR[\dot{n}_s] = \int_{-\Delta f}^{\Delta f} 4\pi f^2 \eta_0 df = \frac{8\pi^2 \eta_0}{3} \Delta f^3. \quad (11.54)$$

Ricordando inoltre dal Capitolo 2 che $E[n_s(t)\dot{n}_s(t)] = 0$, abbiamo che la pdf congiunta si fattorizza completamente nel prodotto di tre gaussiane

$$f_{n_c n_s \dot{n}_s}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{N}(\alpha; 0, P_n) \mathcal{N}(\beta; 0, P_n) \mathcal{N}(\gamma; 0, V_n). \quad (11.55)$$

La frequenza relativa $N = N_+ = N_-$ si può pertanto scrivere come

$$N = \int_0^{+\infty} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{\Delta t} f_{n_c}(\alpha) f_{n_s}(\beta) f_{\dot{n}_s}(\gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \quad (11.56)$$

Poiché l'integrale si estende intorno a valori molto piccoli di n_s , per $\Delta t \rightarrow 0$, $dn_s/\Delta t \simeq \dot{n}_s$, pertanto l'integrale si scrive

$$N = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{-A} f_{n_c}(\alpha) \gamma f_{n_s}(0) f_{\dot{n}_s}(\gamma) d\alpha d\gamma, \quad (11.57)$$

ovvero

$$N = \int_{-\infty}^{-A} \mathcal{N}(\alpha; 0, P_n) d\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi P_n}} \int_0^{+\infty} \gamma \mathcal{N}(\gamma; 0, V_n) d\gamma. \quad (11.58)$$

I due integrali sono

$$\int_{-\infty}^{-A} \mathcal{N}(\alpha; 0, P_n) d\alpha = Q\left(\frac{A}{\sqrt{P_n}}\right), \quad (11.59)$$

$$\int_0^{+\infty} \gamma \mathcal{N}(\gamma; 0, V_n) d\gamma = \int_0^{+\infty} \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi V_n}} e^{-\frac{\gamma^2}{2V_n}} d\gamma \quad (11.60)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi V_n}} \left(-V_n e^{-\frac{\gamma^2}{2V_n}} \right) \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{V_n}{2\pi}}. \quad (11.61)$$

Riassumendo,

$$N = \frac{\Delta f}{\sqrt{3}} Q\left(\frac{A}{\sqrt{2\eta_0 \Delta f}}\right). \quad (11.62)$$

11.4.2 Il rumore in uscita

Secondo la approssimazione adottata, assumiamo che il rumore in uscita sia la sovrapposizione di due termini: il primo è quello che abbiamo calcolato in condizioni di rapporto segnale-rumore elevato; il secondo è quello impulsivo

$$y_{FM}(t) \simeq \frac{1}{2\pi} s_f s(t) + \left[-\frac{\dot{n}_s(t)}{2\pi A} + \sum_{i^+} \delta(t - t_{i^+}) - \sum_{i^-} \delta(t - t_{i^-}) \right] * h_{de}(t), \quad (11.63)$$

dove la frequenza istantanea è stata filtrata nell'ultimo stadio del ricevitore da un passa-basso o dal filtro di de-enfasi. In assenza di de-enfasi nell'FM, $h_{de}(t)$ è un filtro passa-basso ideale. Le sequenze $\{t_{i+}\}$ e $\{t_{i-}\}$ sono rispettivamente gli istanti di occorrenza dei salti positivi e negativi. Assumiamo che essi costituiscano due insiemi di arrivi di Poisson indipendenti e aventi la stessa frequenza di occorrenza N . Dalla convoluzione, gli impulsi in uscita avranno la forma della risposta impulsiva del filtro di de-enfasi. Il calcolo di media e autocorrelazione dei due processi degli impulsi di Poisson

$$c_+(t) = \sum_{i^+} \delta(t - t_{i^+}), \quad c_-(t) = - \sum_{i^-} \delta(t - t_{i^-}), \quad (11.64)$$

è un classico esercizio di Teoria dei Segnali (*rumore shot*) e fornisce

$$R_{c_+}(\tau) = N_+^2 + N_+ \delta(\tau), \quad E[c_+(t)] = N_+; \quad (11.65)$$

$$R_{c_-}(\tau) = N_-^2 + N_- \delta(\tau), \quad E[c_-(t)] = -N_-. \quad (11.66)$$

Il segnale somma dei due

$$c(t) = c_+(t) + c_-(t), \quad (11.67)$$

ha media nulla e autocorrelazione impulsiva

$$R_c(\tau) = 2N\delta(\tau). \quad (11.68)$$

Il processo degli impulsi di Poisson è un esempio di rumore a spettro piatto che ha lo stesso tipo di spettro di potenza del rumore termico, ma una struttura temporale molto diversa. L'effetto degli impulsi è quindi distruttivo su tutta la banda e compromette completamente la struttura del segnale demodolato. Lo spettro di potenza di $y(t)$ è

$$P_{yFM}(f) = \frac{s_f^2}{4\pi^2} P_s(f) + \left(\frac{f^2}{A^2} P_{n_s}(f) + 2N \right) |H_{de}(f)|^2. \quad (11.69)$$

La densità è direttamente proporzionale alla frequenza di occorrenza ed è piatta se non c'è de-enfasi. Più in generale essa segue la funzione di risposta armonica del filtro di de-enfasi.

Il rapporto segnale-rumore si scrive

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{FMout} = \frac{\frac{s_f^2 P_s}{4\pi^2}}{\frac{2\eta_0}{A^2} \int_0^B f^2 |H_{de}(f)|^2 df + 4N \int_0^B |H_{de}(f)|^2 df}. \quad (11.70)$$

Ai fini di un confronto con le altre modulazioni tratteremo per semplicità solo il caso in cui non c'è de-enfasi, ovvero il filtro finale è piatto in frequenza ed ha guadagno unitario fino alla frequenza B . Il rapporto segnale-rumore si riscrive pertanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} = \frac{\frac{s_f^2 P_s}{4\pi^2}}{\frac{2\eta_0 B^3}{A^2} + 4NB}. \quad (11.71)$$

Ricordando la definizione del parametro $\gamma = A^2/2\eta_0 B$ e dell'indice di modulazione $m = \Delta f/B$, la frequenza di occorrenza può essere riscritta come

$$N = \frac{\Delta f}{\sqrt{3}} Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2\eta_0 \Delta f}}\right) = \frac{B m}{\sqrt{3}} Q\left(\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right). \quad (11.72)$$

Il rapporto segnale-rumore diventa

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} = 3\gamma m_p^2 m^2 \frac{1}{1 + 4\sqrt{3} \gamma m Q\left(\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right)}. \quad (11.73)$$

L'espressione generalizza (11.27). Essa è composta infatti dal prodotto di un primo termine, che coincide con il risultato ottenuto per rapporti segnale-rumore di ingresso elevati e da un secondo termine che è un fattore di peggioramento che tiene conto del rumore impulsivo. Quest'ultimo entra in gioco quando il rumore diventa progressivamente dominante.

La figura 11.8 riporta il rapporto segnale-rumore in funzione del parametro γ in assenza di pre-enfasi e per vari indici di modulazione. Si noti che per elevata potenza del segnale modulato si ottengono a parità di potenza trasmessa prestazioni sempre migliori al crescere di m e quindi della banda occupata. Ulteriori miglioramenti possono essere ottenuti per rapporti segnale-rumore elevati mediante l'uso del filtro di pre-enfasi.

Si noti anche l'effetto a soglia che diventa più marcato al crescere dell'indice di modulazione. Anche il valore di soglia si sposta verso destra al crescere di m . Dalla figura si intuisce che la migliore situazione di impiego dell'FM va ricercata mediante un indice di compromesso che garantisca prestazioni sufficienti ed una soglia non troppo alta. Nell'FMFB, discusso nel capitolo precedente, mediante un contenimento dell'indice di modulazione si riescono ad ottenere valori di soglia di 5-7 dB inferiori a quelli ottenuti mediante un sistema senza controreazione.

Ricordiamo ancora al lettore che il grafico di figura 11.8 è solo indicativo del comportamento globale della modulazione FM a causa delle approssi-

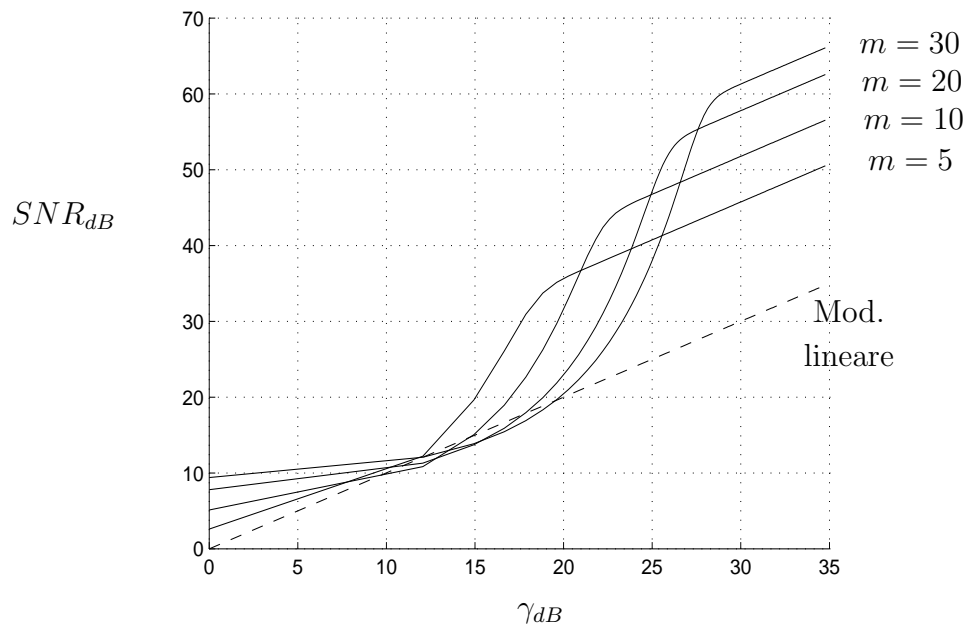


Figura 11.8: Le prestazioni della modulazione FM in presenza di rumore

mazioni, anche un po' arbitrarie, che abbiamo adottato per derivare il risultato. Nella figura è riportata per confronto anche la linea retta corrispondente ad alcune delle modulazioni lineari già discusse nei capitoli precedenti. La figura chiaramente mostra la superiorità della modulazione FM rispetto alla modulazione lineare quando le condizioni di potenza sono favorevoli.

Per tenere conto direttamente della rumorosità del segnale all'ingresso del ricevitore, è utile riscrivere le prestazioni dell'FM in funzione del rapporto segnale-rumore

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2/2}{2|\Delta f|_{max}\eta_0} = \frac{\gamma}{2m}. \quad (11.74)$$

Le prestazioni diventano

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FMout} = 6 m^3 m_p^2 \left(\frac{S}{N}\right)_{in} \frac{1}{1 + 8\sqrt{3} m^2 \left(\frac{S}{N}\right)_{in} Q\left(\sqrt{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}}\right)}. \quad (11.75)$$

L'effetto soglia può essere utilmente sfruttato per un impiego cellulare dei sistemi FM in quanto limita più nettamente la zona di ricezione utile del segnale.

Appendice A

La funzione di Bessel

La definizione integrale della funzione di Bessel del I tipo di ordine n è

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(x \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda. \quad (\text{A.1})$$

La funzione può anche essere riscritta in forma reale come

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \lambda - n\lambda) d\lambda + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \lambda - n\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \lambda - n\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

poiché il secondo integrale ha come integranda una funzione dispari e si annulla, e il primo integrale ha una funzione integranda pari.

Alcune proprietà sono qui elencate. Figura A.1 mostra gli andamenti per $x > 0$ e $n = 0, \dots, 4, 10, \dots, 14$.

- (1) $J_0(0) = 1$;
- (2) $J_n(0) = 0$, n intero;
- (3) $J_n(x) = J_n(-x)$, n pari;
- (4) $J_n(x) = -J_n(-x)$, n dispari;
- (5) $J_n(x) = J_{-n}(x)$, n pari;
- (6) $J_n(x) = -J_{-n}(x)$, n dispari;
- (7) $J_n(x) \rightarrow 0$, per $n \gg x$;
- (8) Per piccoli valori di x , $J_n(x) \simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$;
- (9) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1$.

La Figura A.2 mostra gli andamenti in funzione del parametro n assunto continuo (la definizione della funzione prevede che n possa essere continuo) e per alcuni valori di x .

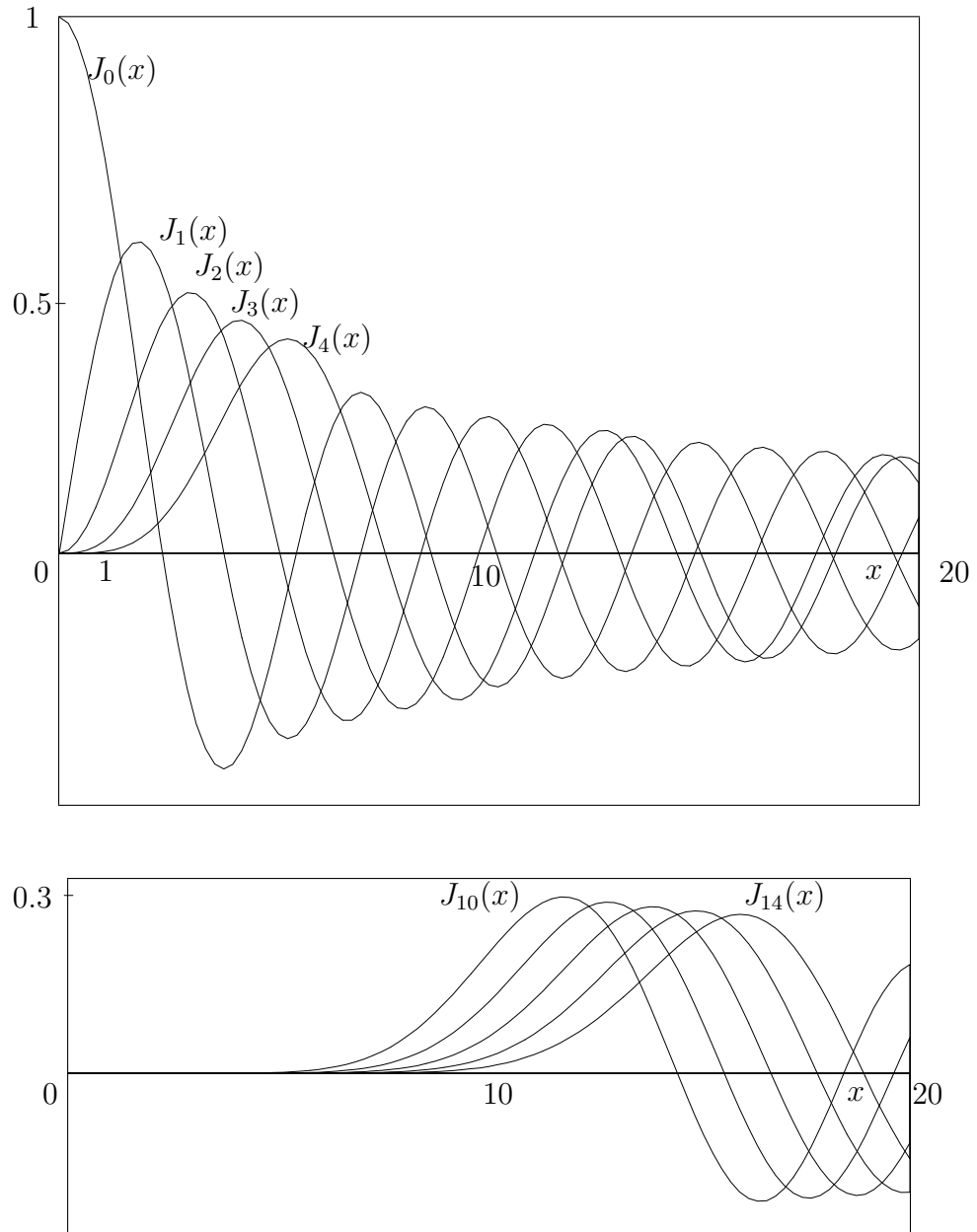


Figura A.1: L'andamento di alcune funzioni di Bessel del I tipo

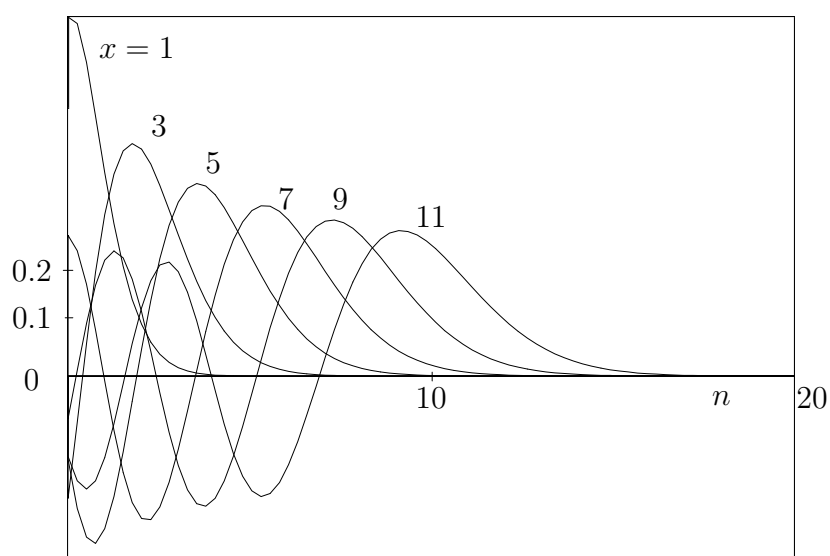


Figura A.2: L'andamento di alcune funzioni di Bessel del I tipo al variare di n e per diversi valori di x

Bibliografia

- A. B. Carlson, 1986** *Communication Systems*, Third Edition, McGraw Hill.
- L.W. Couch II, 2001** *Fondamenti di Telecomunicazioni*, (Edizione Italiana a cura di Marco Luise), Prentice Hall e Apogeo.
- S. Haykin, 2001** *Communication Systems*, 4th Edition, John Wiley and Sons.
- S. Haykin, M. Moher, 2007** *Introduzione alle Telecomunicazioni Analogiche e Digitali*, Casa Editrice Ambrosiana, Luglio 2007.
- L. Izzo, 1980** *Elementi di Modulazione ad Onda Continua*, CUEN.
- B. P. Lathi, 1998** *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press.
- M.J. Lighthill, 1959** *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, McGraw Hill.
- D. Middleton, 1960** *An Introduction to Statistical Communication Theory*, McGraw Hill.
- F. Palmieri, 2007** *Lezioni di Telecomunicazioni: Elementi di Teoria dei Segnali Tempo-Continuo*, disponibili in fotocopia presso l'autore.
- J. G. Proakis, M. Salehi, 2004** *Fundamentals of Communication Systems*, Prentice Hall, 2 Dicembre 2004 (già *Communication Systems Engineering*, Second Edition, 2001).
- M. Schwartz, W. R. Bennett, S. Stein, 1966** *Communication Systems and Techniques*, Cambridge University Press.

H. Stark, F. B. Tuteur, J. B. Anderson, 1988 *Modern Electrical Communications*, Prentice Hall.

F. G. Stremler, 1990 *Introduction to Communication Systems*, Third Edition, Addison Wesley.

J. B. Thomas, 1969 *Statistical Communication Theory*, John Wiley.

A. Viterbi, 1966 *Principles of Coherent Communication*, McGraw Hill.