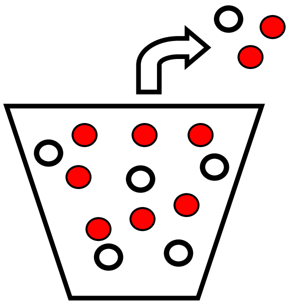
Elementi di
Calcolo delle probabilità

PERCHÉ SI STUDIA IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ?

Calcolo delle probabilità



Stato di incertezza

In cui si formano le decisioni

Esperimento casuale - prova

Un esperimento casuale è un fenomeno del mondo reale per il quale vi è più di un risultato possibile.

L'esito è incerto

- Lancio di una moneta
- Sondaggio di opinione
- Esame universitario
- Partita di calcio
- Controllo di qualità di un prodotto
- PIL
- Analisi del sangue
- etc

Evento elementare

L'evento elementare è uno dei possibili risultati dell'esperimento casuale

Spazio campione

L'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento definisce lo spazio campione

- Deve necessariamente verificarsi un evento elementare
- Si può verificare un solo evento elementare

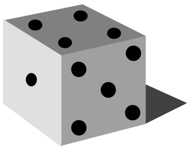
Descrizione dell'esperimento

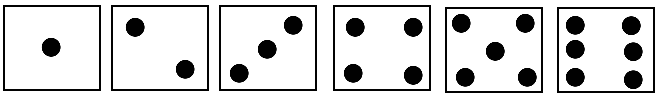
Esame universitario { promosso, bocciato }

Partita di calcio { vittoria, pareggio, sconfitta }

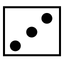
Sondaggio di opinione { molto favorevole, favorevole, indifferente, contrario, fortemente contrario }

Esempio lancio di un dado

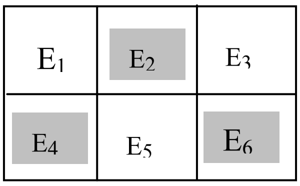




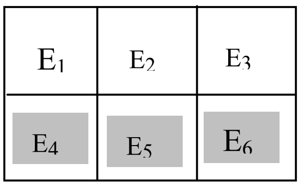
E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6

A={esce  }= E_3

B={numero di puntini pari}=
={E_2, E_4, E_6}=



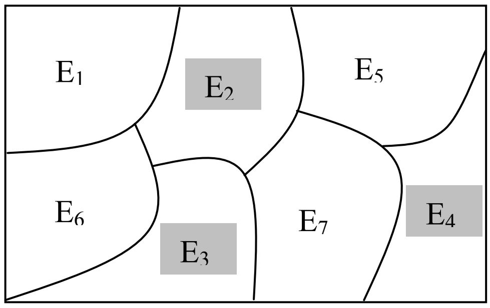
C={numero di puntini > 3}=
={E_4, E_5, E_6}=



Evento

Un evento è un insieme di eventi elementari.
Eventi elementari: E_1, E_2,..., E_n
A={E_2, E_3, E_4}
L'evento A si verifica quando l'esito dell'esperimento è uno degli eventi elementari che lo costituiscono.

S



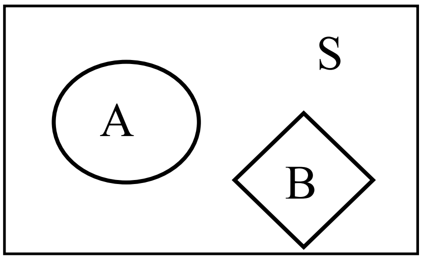
Evento impossibile

∅, l'evento impossibile, è l'evento che non si verifica mai

Evento certo

S, l'evento certo, è l'evento che si verifica sempre

Diagrammi di Venn



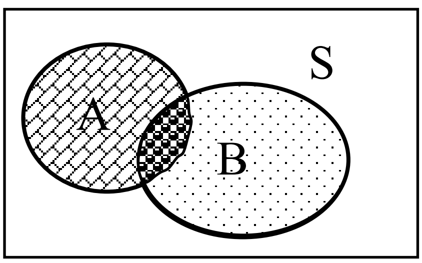
Unione di eventi

$A \cup B$

Dati due eventi A e B appartenenti ad S, l'unione $A \cup B$ è l'evento costituito da tutti gli eventi elementari che appartengono o ad A o a B o ad entrambi.

L'evento $A \cup B$ si verifica quando:

- Si verifica A ma non si verifica B
- Si verifica B ma non si verifica A
- Si verificano sia A che B



$A \cup B$

Altre operazioni sugli eventi

- Unione
- Intersezione
- Negazione

Esempio: Unione

$\Rightarrow$ <u>Lancio di un dado</u>

$S=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ Spazio campione

$A=\{\text{numero di puntini pari}\} = \{E_2, E_4, E_6\}$

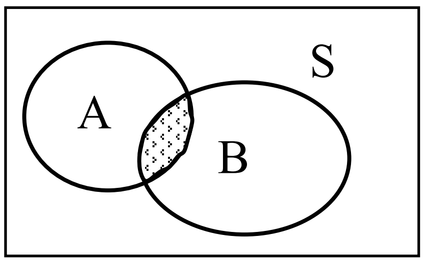
$B=\{\text{numero di puntini} > 3\} = \{E_4, E_5, E_6\}$

$A \cup B = \{E_2, E_4, E_5, E_6\}$

Intersezione di eventi

Dati due eventi A e B appartenenti ad S, l'intersezione $A \cap B$ è l'evento costituito da tutti gli eventi elementari che appartengono sia ad A che a B.

L'intersezione $A \cap B$ si verifica quando si verificano sia A che B.



$A \cap B$

Esempio: Intersezione

⇨ Lancio di un dado

$S=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$

$A=\{\text{numero di puntini pari}\} = \{E_2, E_4, E_6\}$

$B=\{\text{numero di puntini} > 3\} = \{E_4, E_5, E_6\}$

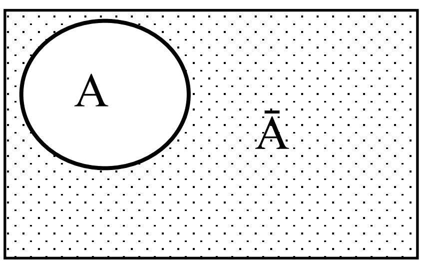
$A \cap B = \{ E_4, E_6\}$

Negazione di un evento

$\bar{A}$

Dato un evento A appartenente ad S l'insieme di tutti gli eventi elementari che appartengono ad S ma <u>non appartengono</u> ad A costituiscono la negazione di A.

La negazione di A si verifica quando A non si verifica

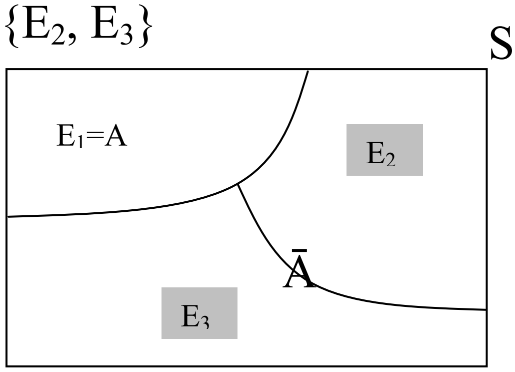


Esempio: Negazione

⇨ Partita di calcio

$S=\{E_1, E_2, E_3\}$
E_1: vittoria
E_2: pareggio
E_3: sconfitta

$A=\{\text{vittoria}\}= E_1$
$\bar{A}=\{\text{pareggio, sconfitta}\} = \{E_2, E_3\}$



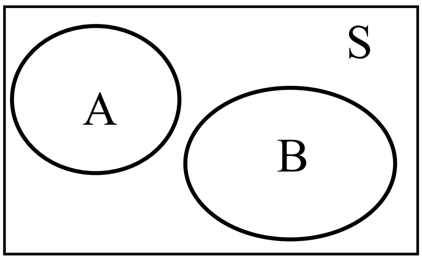
Relazioni tra eventi

- Inclusione
- Incompatibilità
- Necessarietà

Incompatibilità

Due eventi A e B appartenenti ad S si dicono incompatibili quando non hanno eventi elementari in comune

$A \cap B = \emptyset$



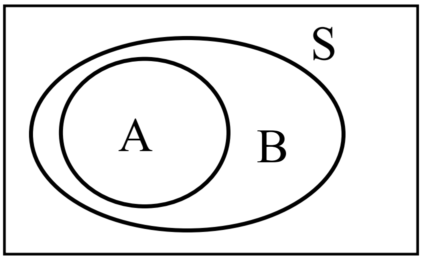
N.B.

Due eventi incompatibili <u>non possono verificarsi contemporaneamente</u>.

Inclusione

Dati due eventi A e B appartenenti ad S, A è incluso in B se il verificarsi di A implica, necessariamente, il verificarsi di B.

$A \subseteq B$



N.B.

$A \subseteq B$ e $A \supseteq B \Rightarrow A = B$

Necessarietà

Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$
Appartenenti ad S si dicono necessari se

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

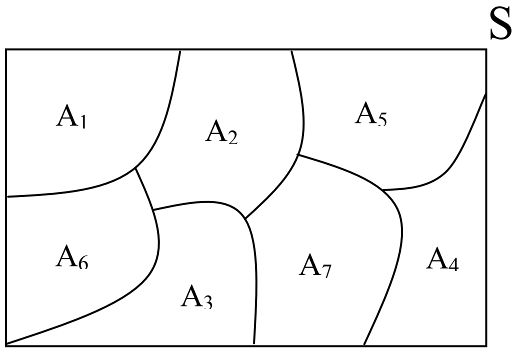
Partizione

Gli eventi

$A_1, A_2, ..., A_n$

Costituiscono una partizione se

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j$



Probabilità

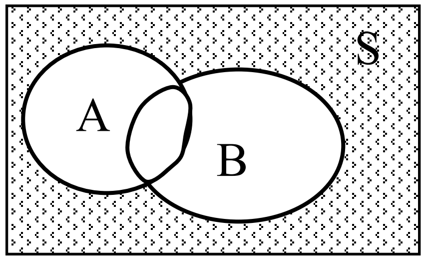
- Definizione <u>classica</u>
- Definizione <u>frequentista</u>
- Definizione <u>soggettivista</u>

$\Downarrow$

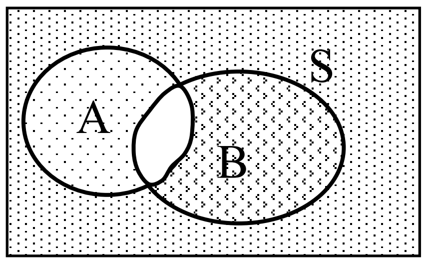
<u>Impostazione assiomatica</u>

Leggi del De Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



Definizione classica di Probabilità

Dato un esperimento in cui

- Vi è un numero finito di risultati possibili
- Gli eventi elementari sono <u>equiprobabili</u>

La probabilità è definita come

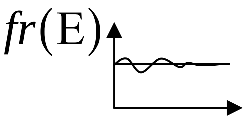
$$\frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi totali}}$$

Pascal (1623-1662)
Bernoulli (1713), De Moivre (1718), Laplace (1812)

<u>Definizione frequentista di Probabilità</u>

Dato un esperimento perfettamente ripetibile ed un evento possibile E, la probabilità di E è data dal limite della frequenza relativa con cui si verifica E al divergere del numero di ripetizioni dell'esperimento.

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \lim_{n\to\infty} fr(\mathrm{E}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\mathrm{E})}{n}$$



Laplace, Venn, Von Mises
(prima metà del XIX secolo)

<u>Definizione soggettivista di Probabilità</u>

Dato un esperimento ed un evento possibile E, la probabilità di E è il grado di fiducia che un soggetto ha nel verificarsi dell'evento E.

È la somma che un individuo è pronto a scommettere per ricevere una somma unitaria se l'evento E si verifica 0 altrimenti.

Bernoulli (1713)
Anni 20: Ramsey, De Finetti, Savage

<u>Impostazione assiomatica</u>

Kolmogorov 1930-40

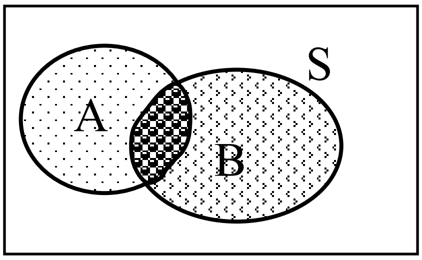
La probabilità è una funzione che soddisfa i postulati

<u>Postulati</u>

1. $P(\mathrm{A})\geq 0$
2. $P(\mathrm{S})=1$
3. $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing \Rightarrow P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$

<u>Teoremi</u>

1. $P(\bar{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})$
2. $P(\varnothing)=0$
3. $P(\mathrm{A})\leq 1$
4. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$



Misura della Probabilità

$E_1, E_2, \ldots, E_n$

- $E_i \cap E_j = \varnothing$ (incompatibili)
- $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ (necessarietà)
- $P(E_i)$=costante (equiprobabilità)

$A = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$

$$P(A) = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi totali}}$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$P(A \cap B)$

Dati due eventi A e B, dalla definizione di probabilità condizionata (dato $P(B) > 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

si ha:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

o in alternativa (dato $P(A) > 0$)

essendo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

si ha:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B la probabilità condizionata di A dato B è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

posto $P(B) > 0$

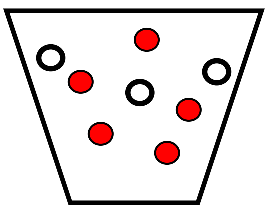
NB la probabilità condizionata soddisfa i postulati:

Infatti posto $P(C) > 0$ risulta:

1. $P(A|C) \geq 0$
2. $P(S|C) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$
$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

e valgono quindi tutti i teoremi

Esempio: Probabilità condizionata

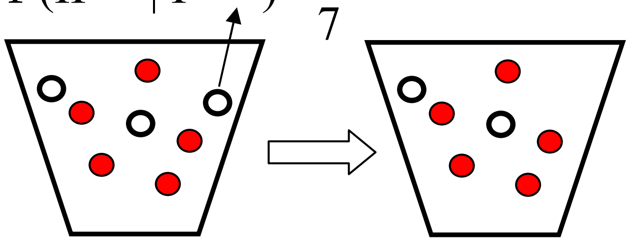


$P(○) = \frac{3}{8}$

$P(●) = \frac{5}{8}$

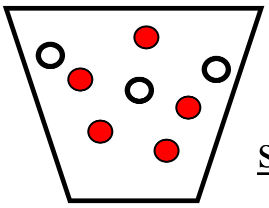
Estrazione senza rimessa:

$P(II=○|\ I=○) = \frac{2}{7}$



$P(II=●|\ I=○) = \frac{5}{7}$

Esempio:
Probabilità condizionata 2



Estrazione di due palline <u>senza rimessa</u>

$$P(\circ\circ)=P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\circ)\cdot P(\mathrm{I}=\circ)=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}$$

$$P(\bullet\bullet)=P(\mathrm{II}=\bullet \mid \mathrm{I}=\bullet)\cdot P(\mathrm{I}=\bullet)=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8}$$

$$P(\bullet\circ)=$$
$$=P[(\mathrm{I}=\bullet\cap \mathrm{II}=\circ)\cup(\mathrm{I}=\circ\cap \mathrm{II}=\bullet)]=$$
$$=P(\mathrm{I}=\bullet\cap \mathrm{II}=\circ)+P(\mathrm{I}=\circ\cap \mathrm{II}=\bullet)=$$
$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$$

Eventi indipendenti

Due eventi A e B sono indipendenti se (posto $P(\mathrm{B})>0$)

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=P(\mathrm{A})$$

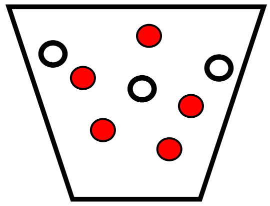
l'indipendenza è una relazione simmetrica (posti $P(\mathrm{B}),P(\mathrm{A})>0$):

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=P(\mathrm{A}) \Leftrightarrow P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=P(\mathrm{B})$$

Se (e solo se) due eventi sono indipendenti si ha:

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$$

Esempio:
Probabilità condizionata 3



$$P(\circ)=\frac{3}{8}$$
$$P(\bullet)=\frac{5}{8}$$

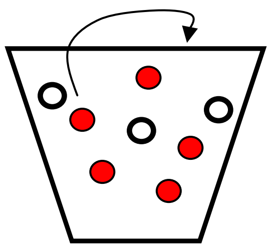
Estrazione <u>senza rimessa</u>

$$P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\circ)=\frac{2}{7}$$

$$P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\bullet)=\frac{3}{7}$$

$$P(\mathrm{II}=\circ)=$$
$$=P[(\mathrm{I}=\circ\cap \mathrm{II}=\circ)\cup(\mathrm{I}=\bullet\cap \mathrm{II}=\circ)]=$$
$$=P(\mathrm{I}=\circ\cap \mathrm{II}=\circ)+P(\mathrm{I}=\bullet\cap \mathrm{II}=\circ)=$$
$$=P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\circ)\cdot P(\mathrm{I}=\circ)+$$
$$+P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\bullet)\cdot P(\mathrm{I}=\bullet)+=$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$$

Esempio: eventi indipendenti



Estrazione con rimessa

$$P(\circ\circ)=P(\mathrm{I}=\circ)\cdot P(\mathrm{II}=\circ)=3/8\cdot 3/8$$
$$P(\bullet\bullet)=P(\mathrm{I}=\bullet)\cdot P(\mathrm{II}=\bullet)=5/8\cdot 5/8$$

$$P(\bullet\circ)=$$
$$=P[(\mathrm{I}=\bullet\cap \mathrm{II}=\circ)\cup(\mathrm{I}=\circ\cap \mathrm{II}=\bullet)]=$$
$$=P(\mathrm{I}=\bullet\cap \mathrm{II}=\circ)+P(\mathrm{I}=\circ\cap \mathrm{II}=\bullet)=$$
$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}$$

Teorema

Dati due eventi A e B si ha:

A e B indipendenti

$\Downarrow$

$\overline{A}$ e B indipendenti

A e $\overline{B}$ indipendenti

$\overline{A}$ e $\overline{B}$ indipendenti

Domanda

Eventi incompatibili (con probabilità non nulla) possono essere indipendenti? NO

Incompatibilità $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$

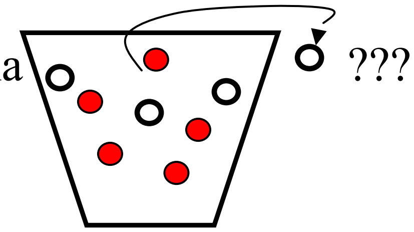
$\Downarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

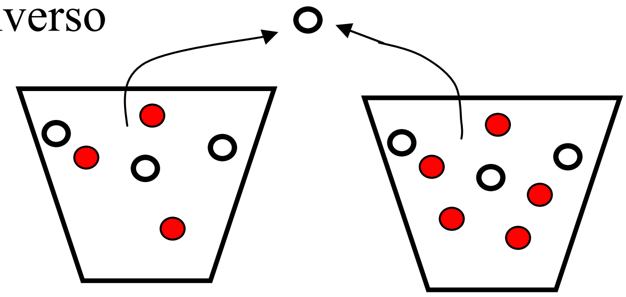
Che può essere uguale a P(A) solo se $P(A)=0$

Teorema di Bayes

Problema Diretto



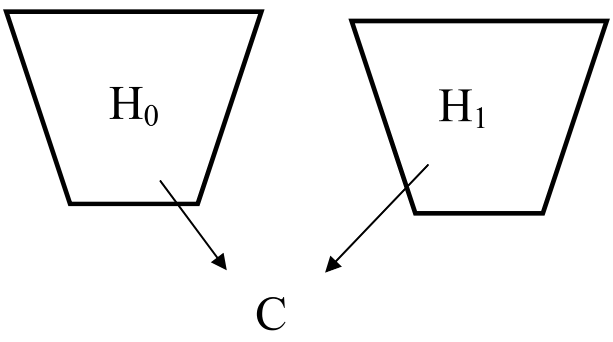
Problema inverso



H_0 ⟵ ??? ⟶ H_1

$P(H_0)$	$P(H_1)$
$P(\circ\|H_0)$	$P(\circ\|H_1)$
$P(H_0\|\circ)=?$	$P(H_1\|\circ)=?$

Teorema di Bayes



- $H_0 \cap H_1 = \varnothing$ (incompatibili)
- $H_0 \cup H_1 = S$ (necessari)

Probabilità note:

$P(H_0)$ e $P(H_1)$ ← a priori

$P(C|H_0)$ e $P(C|H_1)$ ← probative

Probabilità da determinare:

$P(H_0|C)$ e $P(H_1|C)$ ← a posteriori

Formula di Bayes

$$P(\mathrm{H}_0|\mathrm{C}) =$$

$$= \frac{P(\mathrm{H}_0)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{H}_0)\cdot P(C|\mathrm{H}_0) + P(\mathrm{H}_1)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}$$

$$P(\mathrm{H}_1|\mathrm{C}) =$$

$$= \frac{P(\mathrm{H}_1)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}{P(\mathrm{H}_0)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_0) + P(\mathrm{H}_1)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}$$

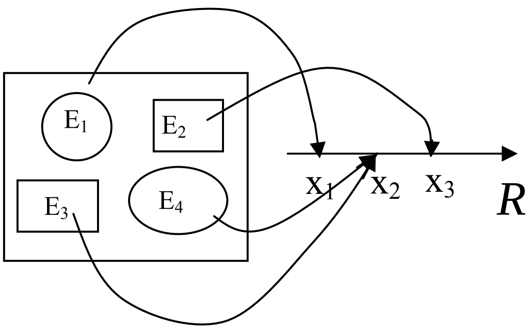
N.B.: $P(\mathrm{H}_0|\mathrm{C}) + P(\mathrm{H}_1|\mathrm{C}) = 1$

Rapporto di probabilità a posteriori

$$\frac{P(\mathrm{H}_0|\mathrm{C})}{P(\mathrm{H}_1|\mathrm{C})} = \frac{P(\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{H}_1)}\cdot \underbrace{\frac{P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}}_{\text{Rapporto di verosimiglianza}}$$

Variabili casuali

Una variabile casuale è una funzione definita sullo spazio campione che assume valori in *R*:

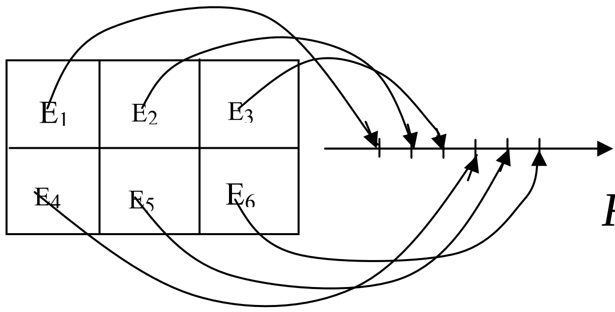


$X(\mathrm{E})$: $S \rightarrow R$

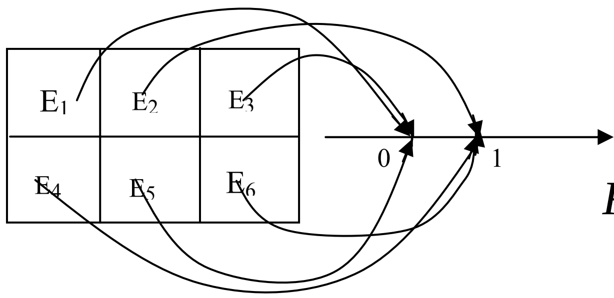
- $X(\mathrm{E})$ non è necessariamente una funzione biunivoca

- Variabili casuali bivariate

Esempio: lancio di un dado



$X(\mathrm{E})$=numero di puntini



$$X(\mathrm{E}) = \begin{cases} 0: \text{ numero di puntini dispari} \\ 1: \text{ numero di puntini pari} \end{cases}$$

Tipi di variabili casuali

Discrete

Una variabile casuale X è discreta se assume valori in un insieme discreto (finito o infinito numerabile).

Es. Numero di goal, numero di incidenti, numero di promossi etc..

Continue

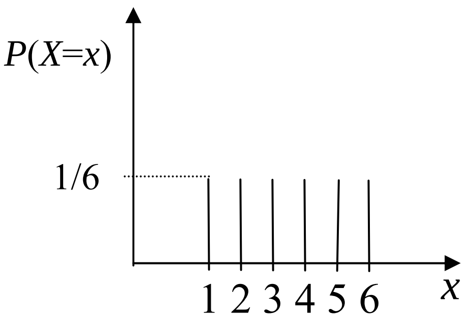
Una variabile casuale è continua se assume valori in un insieme continuo (con la potenza del continuo).

Es. Durata, peso, altezza, reddito, etc..

Es. Lancio del dado

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$

$P(X=x)=1/6 \qquad x=1,2,3,4,5,6$



Variabili casuali discrete

X: x_1, x_2, ..., x_k.

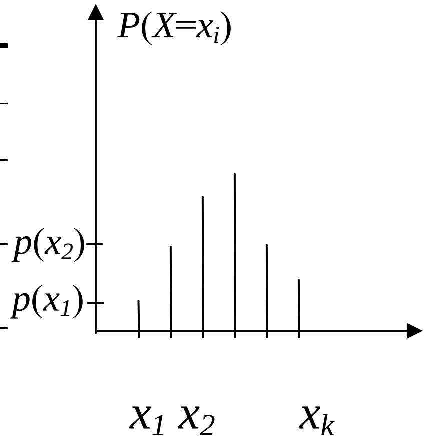
$p(x_1)$, $p(x_2)$, ..,$p(x_k)$.

$p(x_i)=P(X=x_i) \quad i=1,2,...,k$

1) $p(x_i) \geq 0 \qquad \forall\, i$

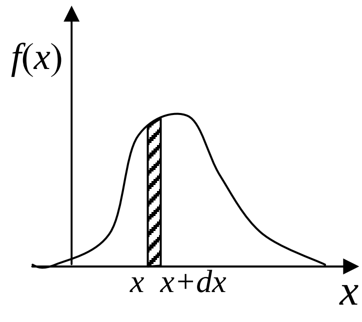
2) $\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$

X	$P(X=x_i)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
x_k	$p(x_k)$



Variabili casuali continue

funzione densità di probabilità



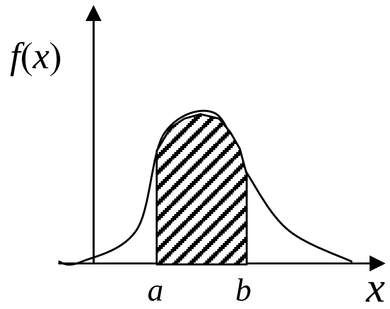
$P(x \leq X \leq x+dx)=f(x) \cdot dx$

Proprietà:

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$

Funzione densità di probabilità



$P(a \le X \le b)$=Area tratteggiata =
$= \int_a^b f(x) \cdot dx$

N.B. $P(X=x) = 0$

Funzione di ripartizione

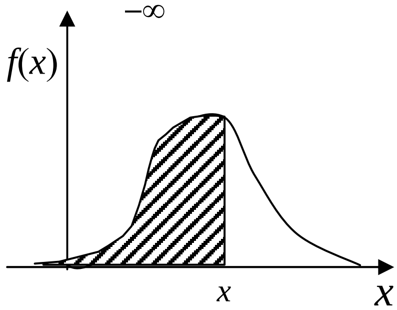
$F(x) = P(X \le x)$

Variabili casuali discrete

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

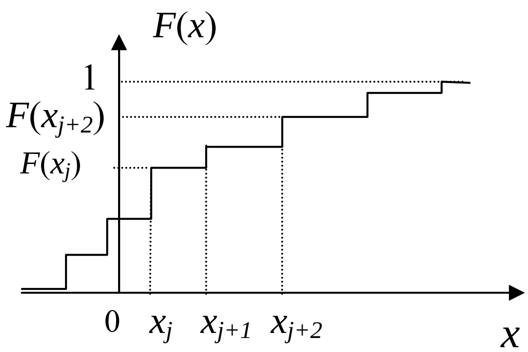
Variabili casuali continue

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$



Funzione di ripartizione

per v.c. discrete



$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

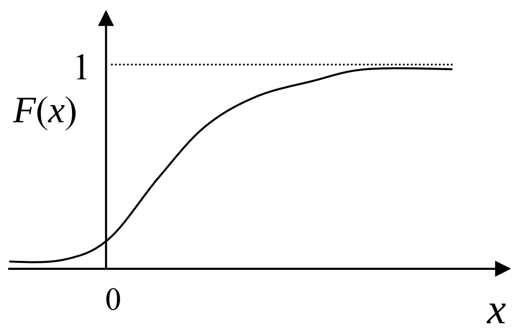
$$F(x_1) = p(x_1)$$

$$F(x_2) = p(x_1) + p(x_2)$$

$$F(x_k) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_k) = 1$$

Funzione di ripartizione

per v.c. continue



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$

da cui: $f(x) = \dfrac{d\,F(x)}{dx}$

Proprietà
della Funzione di ripartizione

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

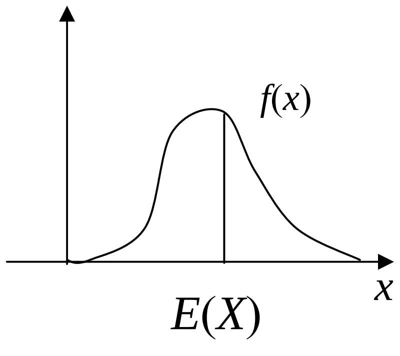
$F(x)$ è non decrescente

$F(x)$ è continua a destra
$\left\{ \lim_{h \to 0^+} \left[F(x) - F(x-h) \right] = p(x) \right\}$

Valore atteso di v.c.
Il valore atteso di una v.c. X si indica con E(X) ed è dato da:

$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p(x_i)$
per v.c. discrete

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$
per v.c. continue



v.c. identicamente distribuite
Due v.c. X ed Y, che hanno la stessa distribuzione si dicono identicamente distribuite.

$$X \text{ e } Y \text{ i.d.} \Leftrightarrow F_X(u) = F_Y(u)$$

Come si confrontano v.c. non identicamente distribuite?

$$\Downarrow$$

Momenti

Operatore valore atteso

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} g(x_i) \cdot p(x_i) & \text{v.c.discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx & \text{v.c.continue} \end{cases}$$

- uguale notazione per v.c. discrete e continue
- operatore lineare
  $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$

Momenti di una v.c.

Momento r-esimo della v.c. X:

$$\mu_r = E\left(X^r\right)$$

$$\mu_r = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i^r \cdot p(x_i) \text{ v.c.discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x) \cdot dx \text{ v.c.continue} \end{cases}$$

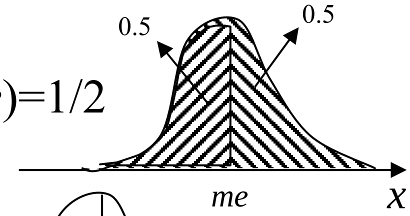
$$\mu_1 = E(X)$$

$$\mu_2 = E\left(X^2\right)$$

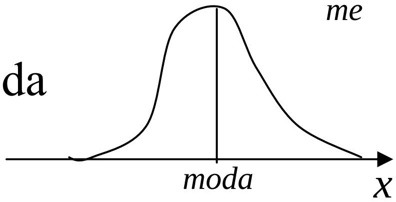
$$\vdots \qquad \vdots$$

Mediana

- *me*: $F(me)=1/2$



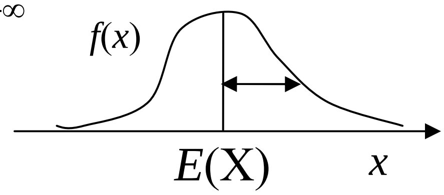
- Moda



Varianza

$$Var(X) = \bar{\mu}_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) \text{ v.c.dis.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx \text{ v.c.cont.} \end{cases}$$



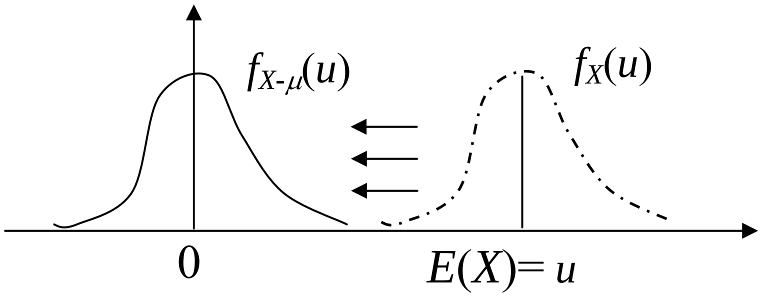
Scarto quadratico medio:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Momenti di una X-μ

Variabile casuale scarto $\boldsymbol{X-\mu}$

- $E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0$



momento r-esimo di X-μ

$$\bar{\mu}_r = E\left[(X-\mu)^r\right]$$

$$\bar{\mu}_1 = E(X-\mu) = 0$$

$$\bar{\mu}_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

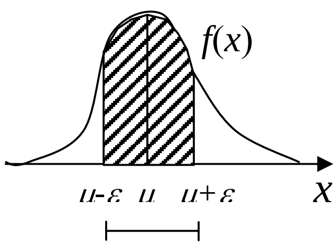
$$\bar{\mu}_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

$$\vdots$$

Proprietà della varianza

- $Var(X) = \mu_2 - \mu^2$
- $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- Disuguaglianza di Chebyshev

$$P\left(\left|X-\mu\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



v.c. standardizzata

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\cdot E(X-\mu) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\cdot\left[E(X)-\mu\right] = 0$$

$$Var[Z] = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] =$$

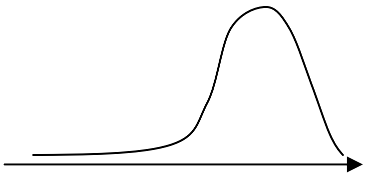
$$= \frac{1}{\sigma^2}\cdot E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Momenti della v.c. standar-dizzata

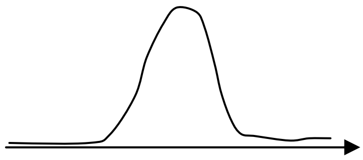
$$\bar{\bar{\mu}}_r = E\left(Z^r\right) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^r\right]$$

- $\bar{\bar{\mu}}_1 = E(Z) = 0$
- $\bar{\bar{\mu}}_2 = E\left(Z^2\right) = Var(Z) = 1$
- $\bar{\bar{\mu}}_3 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \beta_1$

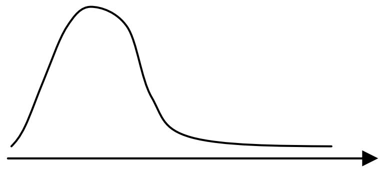
$\boxed{\text{asimmetria}}$



$\bar{\bar{\mu}}_3 < 0$



$\bar{\bar{\mu}}_3 = 0$

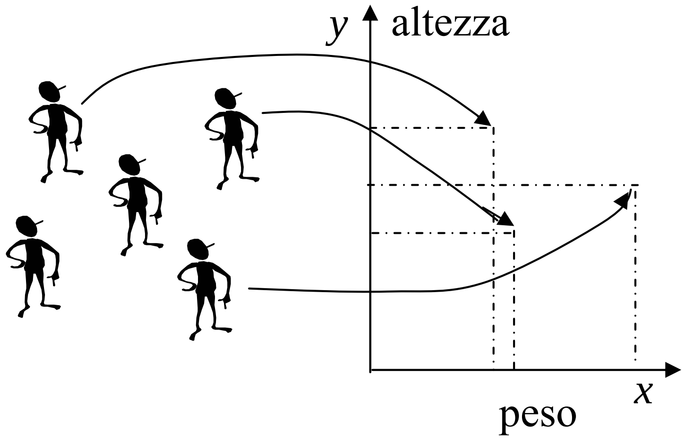


$\bar{\bar{\mu}}_3 > 0$

$$\gamma_2 = \bar{\bar{\mu}}_4 - 3 \rightarrow \text{curtosi}$$

v.c. doppie

Una variabile casuale doppia è una funzione (...) definita sullo spazio campione che associa ad ogni evento una coppia di valori reali (X, Y)



- Distribuzione congiunta
- Distribuzione marginale
- Distribuzione condizionata

$\rightarrow$Discrete/continue

Distribuzioni marginali

$X \backslash Y$	$y_1\ y_2 \cdots y_h$	
x_1	$P_{11}\ P_{12} \cdots P_{1h}$	$P_{1\bullet}$
x_2	$P_{21}\ P_{22} \cdots P_{2h}$	$P_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$P_{k1}\ P_{k2} \cdots P_{kh}$	$P_{k\bullet}$
	$P_{\bullet 1}\ P_{\bullet 2} \cdots P_{\bullet h}$	

$$P_{ij} = P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

$$P_{i\bullet} = P(X = x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{h} P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{h} P_{ij}$$

v.c. doppie discrete

Distribuzioni marginali

X: x_1, x_2, .., x_k $\qquad$ Y: y_1, y_2,..., y_h

$X \backslash Y$	$y_1\ y_2 \cdots y_h$	
x_1	$P_{11}\ P_{12} \cdots P_{1h}$	$P_{1\bullet}$
x_2	$P_{21}\ P_{22} \cdots P_{2h}$	$P_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$P_{k1}\ P_{k2} \cdots P_{kh}$	$P_{k\bullet}$
	$P_{\bullet 1}\ P_{\bullet 2} \cdots P_{\bullet h}$	

$$P_{ij} = P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

1) $P_{ij} \geq 0$

2) $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} P_{ij} = 1$

Distribuzioni condizionate

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) =$$

$$= \frac{P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}}$$

$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) =$$

$$= \frac{P\left[\left(Y = y_j\right) \cap (X = x_i)\right]}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{i\bullet}}$$

Indipendenza stocastica

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = P(X = x_i) = P_{i\bullet}$$
$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = P\left(Y = y_j\right) = P_{\bullet j}$$

$$\Updownarrow$$

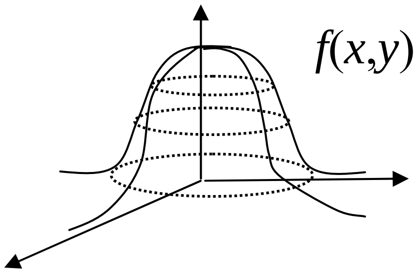
$$P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right] =$$
$$= P(X = x_i) \cdot P\left(Y = y_j\right)$$

$$\boxed{P_{ij} = P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet j}}$$

$\forall \quad i=1,2,..., k \qquad j=1,2, ...,h$

Variabili casuali doppie continue

Funzione densità di probabilità congiunta.



1) $f(x,y) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot dx \cdot dy = 1$

Funzioni densità di probabilità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot dx$$

Indipendenza stocastica v.c. doppie

X ed *Y* indipendenti

$$\Updownarrow$$

$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

Momenti v.c. doppie

$\mu_{r,s}$ momento misto di ordine $r+s$

$$\mu_{r,s} = E\left(X^r \cdot Y^s\right)$$

v.c. discrete

$$\mu_{r,s} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} x_i^r \cdot y_j^s \cdot P_{ij}$$

v.c. continue

$$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot y^s \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

Momenti marginali

$$\mu_{r,0} = E\left(X^r \cdot Y^0\right) = E\left(X^r\right) = \mu_{r\bullet}$$
$$\mu_{0,s} = E\left(X^0 \cdot Y^s\right) = E\left(Y^s\right) = \mu_{\bullet s}$$

Momenti in caso di indipendenza

$$\mu_{r,s} = E\left(X^r \cdot Y^s\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} x_i^r \cdot y_j^s \cdot P_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} x_i^r \cdot y_j^s \cdot P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i^r \cdot P_{i\bullet} \sum_{j=1}^{h} y_j^s \cdot P_{\bullet j} =$$

$$= E\left(X^r\right) \cdot E\left(Y^s\right) =$$

$$= \mu_{r\bullet} \cdot \mu_{\bullet s}$$

Valore atteso→Operatore Lineare

$$= E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Dimostrazione

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} \left(a \cdot x_i + b \cdot y_j\right) \cdot P_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} a \cdot x_i \cdot P_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} b \cdot y_j \cdot P_{ij} =$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j=1}^{h} P_{ij} \cdot + b \cdot \sum_{j=1}^{h} y_j \sum_{i=1}^{k} P_{ij} =$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i P_{i\bullet} \cdot + b \cdot \sum_{j=1}^{h} y_j P_{\bullet j} =$$

$$= a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Covarianza

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)\right] =$$

$$= \sigma_{XY}$$

$$\boxed{\mu_{XY} = E(X \cdot Y)}$$

$$\sigma_{XY} = \mu_{XY} - \mu_X \cdot \mu_Y$$

X ed Y ind. $\Rightarrow \sigma_{XY} = 0$

$$Cov(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot \sigma_{XY}$$

Diseguaglianza di Cauchy-Schwaz:

$$\left|\sigma_{XY}\right| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_X^2 &= Var(X) \\ \sigma_Y^2 &= Var(Y) \end{aligned}}$$

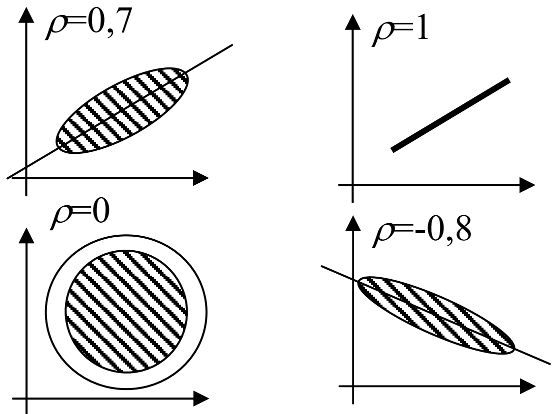
σ_{XY} rivela se esiste il segno del legame lineare

Coefficiente di correlazione

$$\rho(X,Y) = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right) \cdot \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$\rho(X,Y)$ è un indice che misura l'intensità del legame lineare



È un indice di prevedibilità

Proprietà $\rho(X,Y)$

1) $|\rho(X,Y)| \leq 1$
2) $\rho(X,Y) = \pm 1 \Rightarrow Y = a \cdot X + b$
3) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
4) $\rho(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = \rho(X,Y)$
5) X ed Y ind. $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0$

Varianza di $a \cdot X + b \cdot Y$

$$Var(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot Var(X) + \\ + b^2 \cdot Var(Y) + 2 \cdot a \cdot b \cdot Cov(X,Y)$$

X ed Y ind

$\Downarrow$

$$Var(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot Var(X) + \\ + b^2 \cdot Var(Y)$$

Combinazioni lineari

$a \cdot X + b \cdot Y$

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mu_X + b \cdot \mu_Y$$

$$Var(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2 + \\ + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sigma_{XY}$$

$X+Y$

$$E(X + Y) = \mu_X + \mu_Y$$

$$Var(X + Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \\ + 2 \cdot \sigma_{XY}$$

$X-Y$

$$E(X - Y) = \mu_X - \mu_Y$$

$$Var(X - Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \\ - 2 \cdot \sigma_{XY}$$

Combinazioni lineari

$W = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \ldots + a_n X_n$

$$E(W) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu_{X_i}$$

$$\boxed{\mu_{X_i} = E(X_i)}$$

$$Var(W) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{X_i X_j}$$

$$\boxed{\sigma_{X_i}^2 = Var(X_i)}$$

$$\boxed{\sigma_{X_i X_j} = Cov(X_i, X_j)}$$

Se le X_i sono indipendenti

$$Var(W) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2$$

Variabile casuale Normale

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < X < +\infty$$

$$\mu = E(X),\quad -\infty<\mu<+\infty$$

$$\sigma^2 = Var(X),\quad 0<\sigma^2<+\infty$$

Simmetrica $\quad \overline{\overline{\mu}}_3 = 0$

Unimodale

μ=mediana
μ=moda

$$\overline{\overline{\mu}}_4 = 3 \Rightarrow \text{curtosi} \quad \overline{\overline{\mu}}_4 - 3 = 0$$

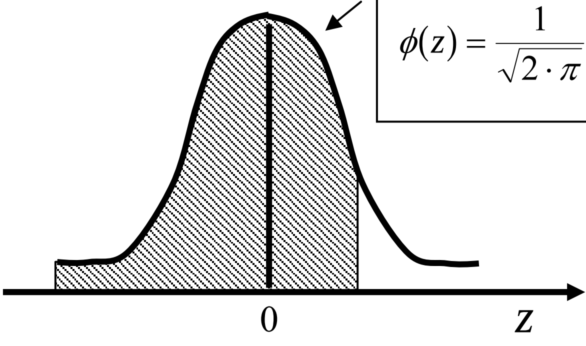
v.c. Normale Standard

$$Z \sim N(0,1)$$

$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

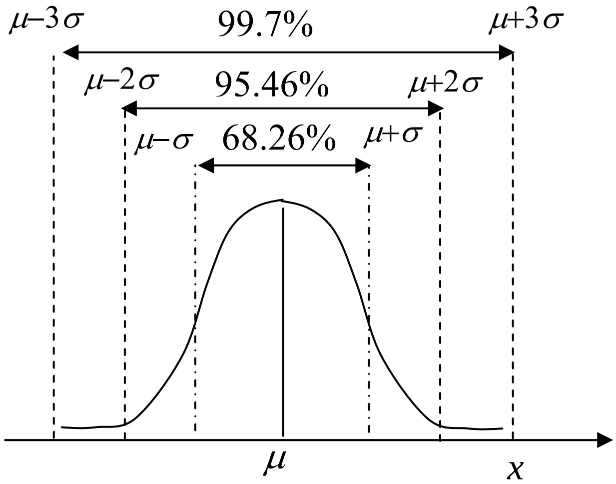
$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\phi(x)\cdot dx$$

$\Phi(z) = P(Z \le z) \Rightarrow$ **Tavole**



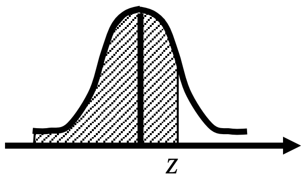
$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

v.c. Normale

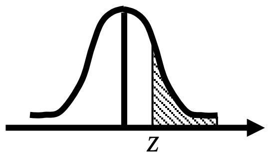


Aree Z~$N(0,1)$

$$P(Z \le z) = \Phi(z)$$

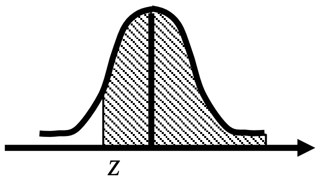


$$P(Z > z) = 1-\Phi(z)$$



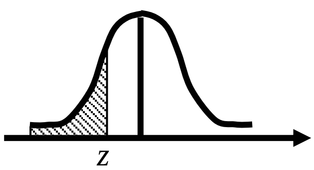
$$P(Z > z) = \Phi(|z|)$$

$\boxed{Z<0}$

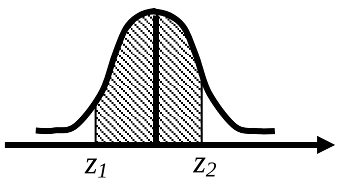


$$P(Z \le z) = 1-\Phi(|z|)$$

$\boxed{Z<0}$



$$P(z_1 < Z \le z_2) =$$
$$= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$



Teorema

Sia $X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

una v.c. Y trasformazione lineare di X:

$$Y = a \cdot X + b$$

è ancora una v.c. Normale di parametri

$\mu_Y = a \cdot \mu_X + b; \quad \sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$

$Y \sim N\left(a \cdot \mu_X + b, a^2 \cdot \sigma_X^2\right)$

Nota

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$$

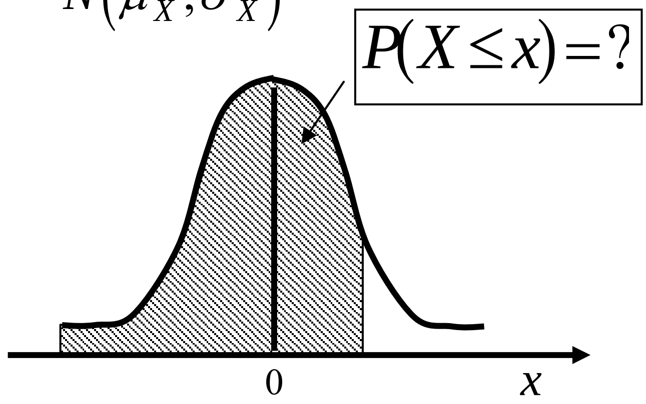
$$\Downarrow$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{\mu_X}{\sigma} - \frac{\mu_X}{\sigma}, \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2}\right) =$$

$$= N(0,1)$$

Uso tavole

$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$



$$P(X \le x) = P(X - \mu \le x - \mu) =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) ==$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Proprietà riproduttiva della Normale

$\Rightarrow X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

$\Rightarrow Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

X ed Y indipendenti

$W = a \cdot X + b \cdot Y$

$\Rightarrow W \sim N\left(\mu_W, \sigma_W^2\right)$

$$\mu_W = a \cdot \mu_X + b \cdot \mu_Y$$

$$\sigma_W^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2$$

Esempio: Proprietà riproduttiva

$\Rightarrow X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

$\Rightarrow Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

X ed Y indipendenti

$$X + Y \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$$

Generalizzazione

Date le v.c. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ dove

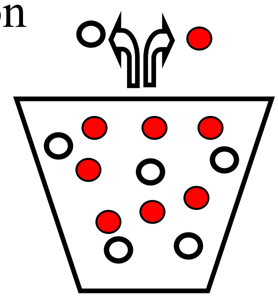
$X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \forall i$

se tali v.c. sono indipendenti

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n \cdot \mu_X, n \cdot \sigma_X^2\right)$$

v.c. Indicatore/Bernulliana

Esperimento con risultato dicotomico



$$X = I(\mathrm{S}) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow \mathrm{S} \\ 0 \leftrightarrow \mathrm{I} \end{cases}$$

$X \sim B(1, p)$ $\boxed{\text{v.c. Bernoulliana}}$

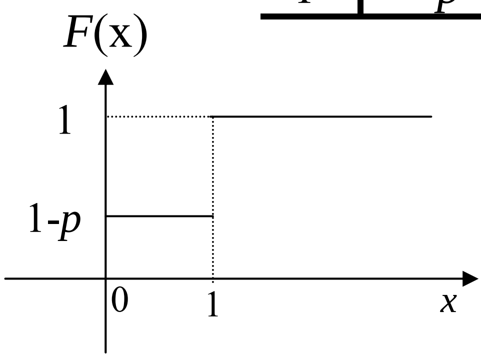
X	$P(X)$
0	1-p=q
1	p

$\boxed{\begin{array}{l} p=P(\mathrm{S}) \\ q=P(\mathrm{I}) \end{array}}$

v.c. Indicatore/Bernulliana

$X \sim B(1, p)$

X	$P(X)$
0	1-p=q
1	p



$$\mu = E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 =$$

$$= p - p^2 = p \cdot (1-p)$$

v.c. Binomiale

1) n prove indipendenti
2) risultato dicotomico
3) probabilità p costante

X: numero di successi (in n prove)

$X \sim B(n, p)$

$$\overbrace{SSSSS}^{x} \qquad \overbrace{IIIIIIII}^{n-x}$$

$$p^x \qquad (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

v.c. Binomiale *B*(*n*,*p*)

X=0,1,....,n

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ indipendenti

$$Y_i = B(1, p) \qquad X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n) =$$

$$= E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_n) = n \cdot p$$

$$Var(X) = Var(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n) =$$

$$= Var(Y_1) + \ldots + Var(Y_n) =$$

$$= n \cdot p \cdot (1-p)$$

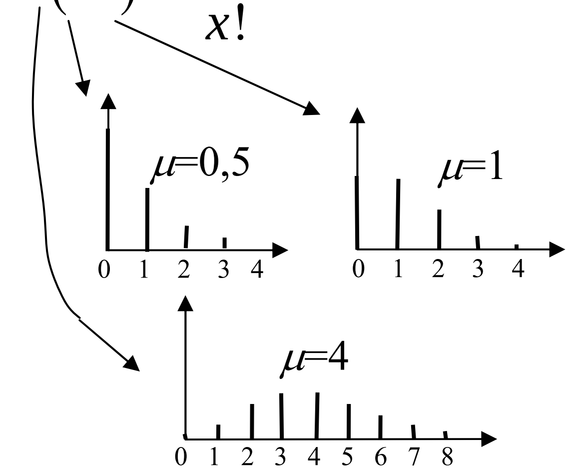
v.c. Poisson

$X \sim \mathrm{P}(\mu)$

X=0,1,2,3...

X intero
$0 \leq X < +\infty$

$$P(X) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

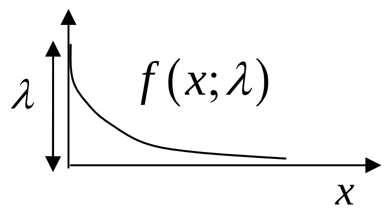


$$E(X) = Var(X) = \mu$$

v.c. Esponenziale Negativa

$X \sim Exp(\lambda)$

- $X \geq 0$
- $f(x;\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad \lambda > 0$



- $F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$
- $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

Processo di Poisson

Processo di conteggio

- Le v.c. che contano il numero di eventi in intervalli disgiunti sono indipendenti

- La probabilità che si verifichi un evento in un intervallo piccolo è proporzionale all'ampiezza dell'intervallo
- La probabilità che si verifichi più di un evento in un intervallo piccolo è trascurabile

$X \rightarrow$numero di eventi in ($0,t$)

$X \sim P(\mu)$ con $\mu = \lambda \cdot t$

$\mu =$ numero medio di eventi in ($0,t$)

$\lambda =$ numero medio di eventi in un Δt unitario

Momenti della media

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

Indipendenti

- $E(X_i) = \mu$
- $Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\Rightarrow Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Momenti della media

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i =$$

$$= \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n}X_n$$

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n}E(X_1) + \ldots\ldots + \frac{1}{n}E(X_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\mu + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\mu = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$Var\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_1) + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2}Var(X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teorema del limite centrale

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

- Indipendenti
- $E(X_i) = \mu \quad \forall i$
- $Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty \quad \forall i$

def. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{\begin{array}{l} E\left(\overline{X}_n\right) = \mu \\ Var\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{array}}$$

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$Z_n \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

Teorema di De Moivre Laplace

$X \sim B(n, p)$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X) = n \cdot p \\ Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \end{array}}$$

$$Z_n = \frac{X - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}$$

$$\Downarrow$$

$$Z_n \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$