

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Probabilità e Informazione/Telecomunicazioni 1

Prof. F. Palmieri

Esame scritto

lunedì 6 febbraio, 2012

SOCVZIONI

1. Un lampada a basso consumo è costruita con 200 LED che emettono 4π lumen ognuno. La affidabilità dei LED è tale che dopo un anno di funzionamento, statisticamente il 12% dei LED non funziona più. Valutare: (a) la probabilità che dopo un anno tutti i LED siano ancora accesi; (b) valutare la probabilità che dopo un anno al più 2 LED siano difettosi; (c) Usando la approssimazione gaussiana (*) valutare la probabilità che dopo un anno la lampada emetta una intensità compresa tra 2000 e 2500 lumen.

(*) Si ricordi che per il Teorema di De Moivre-Laplace una variabile binomiale k si può approssimare con una gaussiana con $\mu_k = np$ e $\sigma_k^2 = np(1-p)$.

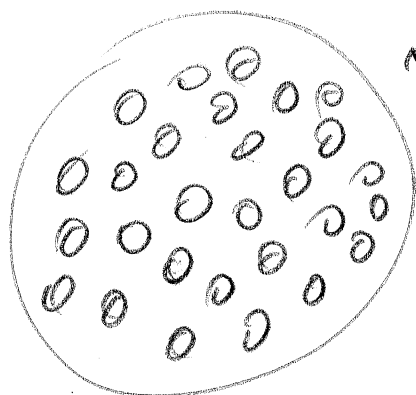
2. La temperatura di Napoli T_N a gennaio è mediamente di dieci gradi con una deviazione standard di 5 gradi. La temperatura di Caserta T_C a gennaio è mediamente più bassa di quella di Napoli di un grado e ha una deviazione standard di 7 gradi. Assumendo le due temperature gaussiane e indipendenti, valutare: (a) La distribuzione della temperatura di gennaio Napoli-Caserta $T_{NC} = (T_N + T_C)/2$; (b) La probabilità che T_{NC} sia minore di 3 gradi.

3. Si consideri la sorgente con simboli $\{1, 2, 3\}$ e distribuzione $\{0.1, 0.2, 0.7\}$. Si progetti un codice binario efficiente per le sorgenti estese di ordine uno e due e, se ne confrontino le prestazioni.

4. Nella lettura dei caratteri $\{A, 8, B\}$, la A viene confusa al 20 % con la B e al 10% con 8; l'8 viene confuso al 10 % con A o con B ; B viene confuso al 50 % con 8 e mai con A . Le percentuali di occorrenza dei tre caratteri sono 40, 10 e 50 %.

- (a) Valutare il canale ternario equivalente;
- (b) Valutare la probabilità di errore media in una lettura;
- (c) Valutare la probabilità di errore media dopo tre letture e riscritture successive (si assuma che nessun errore si verifichi nella scrittura).
- (d) Valutare il numero medio di caratteri in errore in una sequenza di 200 lettere prelevate da questo piccolo alfabeto.

1

 $n = 200$ LED

$$p = P\{\text{led difettoso}\} = 0.12$$

$$P\{K \text{ LED difettosi}\} = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

$$(a) P\{\text{tutti i LED sono accesi}\} = P\{0 \text{ LED difettosi}\}$$

$$= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = \binom{200}{0} (1-p)^{200} = (1-p)^{200} = 7.8801 \cdot 10^{-12} \approx 0$$

$$(b) P\{K \leq 3\} = \sum_{k=0}^3 \binom{200}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{200}{0} p^0 (1-p)^{200} + \binom{200}{1} p (1-p)^{199} + \binom{200}{2} p^2 (1-p)^{198}$$

$$= (1-p)^{200} + 200 p (1-p)^{199} + \frac{200 \cdot 199}{2} p^2 (1-p)^{198}$$

$$= 3.1388 \cdot 10^{-9} \quad (\text{precalcolata})$$

$$(c) L = 4\pi \cdot (n - K) \quad \text{lumene emesso.}$$

$\uparrow$ LED Totale
 $\uparrow$ LED difettosi.

$$L \sim N(\ell; \mu_L, \sigma_L^2) \quad \text{Approssimazione}$$

$$\mu_L = E[L] = 4\pi (n - E[K]) = 4\pi (n - np) = 4\pi n(1-p)$$

$$\sigma_L^2 = E[(L - \mu_L)^2] = E[4\pi(n - K) - 4\pi n(1-p)]^2 = 2212 \text{ lumen.}$$

$$= 16\pi^2 E[(n - K - n + np)^2] = 16\pi^2 E[(K - np)^2] = 16\pi^2 \sigma_K^2 = 16\pi^2 np(1-p)$$

$$= 3335 \text{ lumen}^2$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_L^2} = 57.75 \text{ lumen}$$

3.

$$Pr \{2000 < L < 2500\} = \int_{2000}^{2500} N(\xi; \mu_L, \sigma_L) d\xi$$

$$= \Phi\left(\frac{2500 - 2212}{57.75}\right) - \Phi\left(\frac{2000 - 2212}{57.75}\right)$$

$$= \Phi(4.99) - \Phi(-1.94) = \Phi(4.99) - 1 + \Phi(1.94)$$

$$\approx 1 - 1 + 0.9738 = 0.9738$$

(2)

4.

$$T_N \propto N(t_N; \mu_N = 10, \sigma_N = 5)$$

$$T_e \propto N(t_e; \mu_e = 9, \sigma_e = 7)$$

$$(a) T_{Ne} = \frac{T_N + T_e}{2} \propto N\left(t; \mu_{Ne} = 9.5, \sigma_{Ne} = 4.3012\right)$$

$$\mu_{Ne} = \frac{\mu_N + \mu_e}{2} = 9.5$$

$$\sigma_{Ne}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_N^2 + \sigma_e^2) = \frac{1}{4} (25 + 49) = \frac{74}{4} = 18.5$$

$$(b) P\{T_{Ne} < 3\} = \int_{-\infty}^3 N(\xi; \mu_{Ne}, \sigma_{Ne}) d\xi$$

$$= \Phi\left(\frac{3 - 9.5}{4.3012}\right) = \Phi(-1.5112) = 1 - \Phi(1.5112)$$

$$= 1 - 0.9345 = 0.0655$$

③

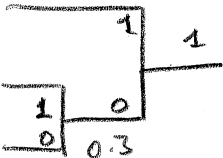
5.

$$\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$$

$$\pi_x = \{0.1, 0.2, 0.7\}$$

Serpente di ordine 1

$$H(X) = 1.568 \text{ bit.}$$

1	0.7	
01	0.2	
00	0.1	

$$C_1 = \{00, 01, 1\}$$

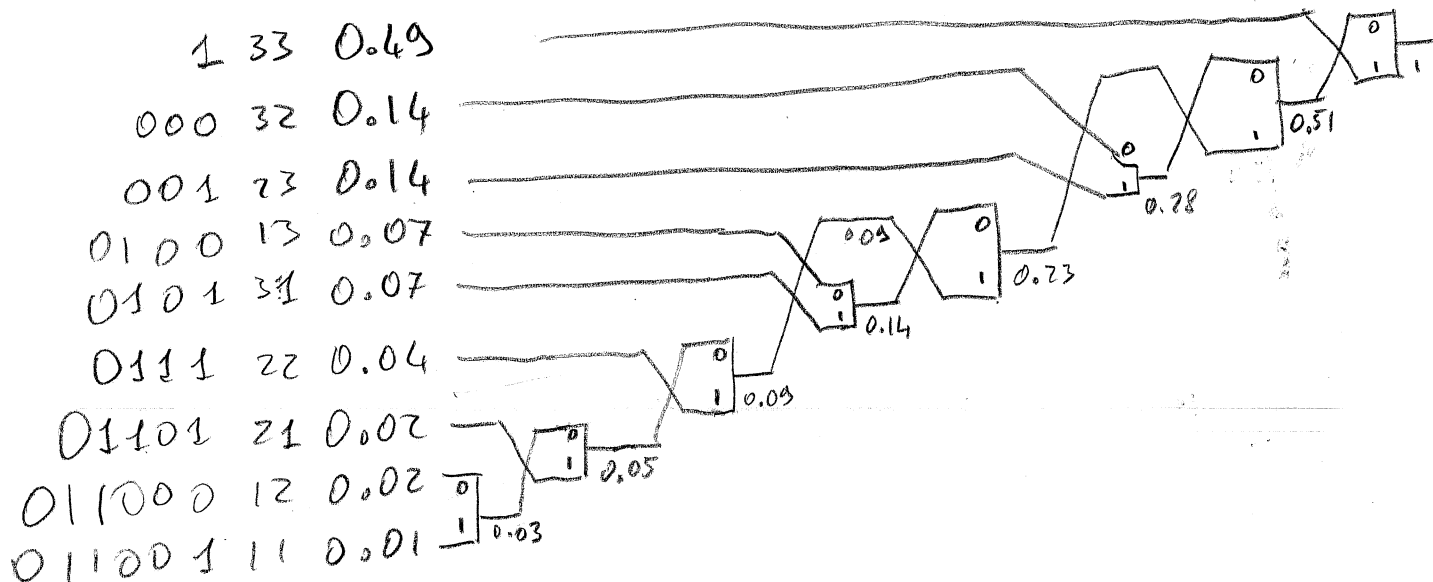
$$L_1 = \{2, 2, 1\}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.7 \\ &= 1.3 \text{ bit.} \end{aligned}$$

$$\eta_1 = \frac{H(\pi)}{\bar{L}_1} = 0.8898$$

$$\mathcal{X}^2 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

$$\pi^2 = \{ \overset{11}{0.0100}, \overset{12}{0.0200}, \overset{13}{0.0700}, \overset{21}{0.0200}, \overset{22}{0.0400}, \overset{23}{0.1400}, \overset{31}{0.0700}, \overset{32}{0.1400}, \overset{33}{0.4900} \}$$



$$L_2 = \{6, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 3, 1\}$$

$$\bar{L}_2 = 2.33 \text{ bit.}$$

$$\eta_2 = \frac{2H(\pi)}{\bar{L}_2} = 0.9330$$

④ (a)

P_c

$X \backslash Y$	A	8	B
A	0.7	0.1	0.2
8	0.1	0.8	0.1
B	0	0.5	0.5

$$\pi_x = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

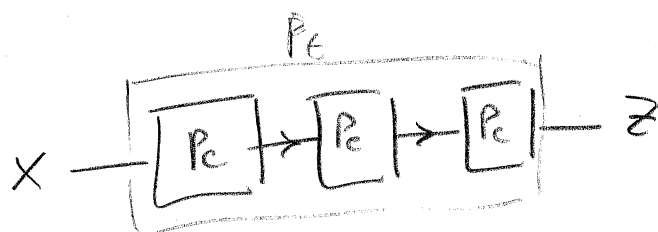
6.



(b)

$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - (P(Y=A|X=A)P(X=A) + P(Y=8|X=8)P(X=8) + P(Y=B|X=B)P(X=B)) = 1 - (\text{diag}(P_c))^T \cdot \pi_x = 0.39$$

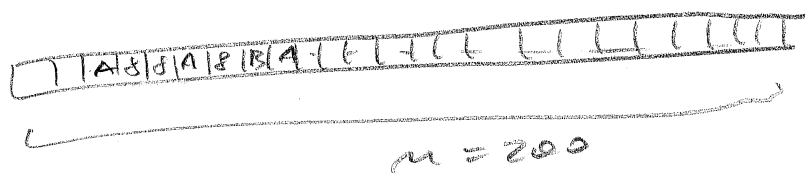
(c)



$$P_t = P_c^3 = \begin{bmatrix} 0.3750 & 0.3750 & 0.2500 \\ 0.1750 & 0.6500 & 0.1750 \\ 0.1000 & 0.6750 & 0.2250 \end{bmatrix}$$

$$P_3(e) = 1 - P_3(c) = 1 - (\text{diag}(P_c^3))^T \cdot \pi_x = 0.6725$$

(d)



medio di errori = $n p(e) = 200 \cdot 0.39 = 78$
 nelle seq. di $n \rightarrow \infty$
 caratteri