

final 18/7/2011

1.

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TELECOMUNICAZIONI 1
PROBABILITA' E INFORMAZIONE

Prof. F. Palmieri

Esame scritto

18 luglio 2011

SOLUZIONI
1. 2.

1. Si consideri il risultato (X_1, X_2) del lancio di una coppia di dadi a sei facce. Il primo dado ha facce equilibrate e quindi equiprobabili. Il secondo è truccato in modo da avere probabilità di $X_2 = 6$ pari a $3/8$. Le altre facce si dividono equamente la restante probabilità.

(a) Calcolare distribuzione di $S = X_1 + X_2$.

(b) Calcolare la probabilità che $X_1 = 3$ se è noto che $S = 8$.

2. Ad un server metà dei pacchetti arriva esattamente con un ritardo di t_0 secondi. Il tempo di arrivo della restante metà è maggiore di t_0 ed è distribuito secondo una pdf che segue l'andamento di una funzione esponenziale decrescente ($ke^{-\alpha(t-t_0)}$).

(a) Scrivere la pdf completa della variabile aleatoria che descrive il ritardo di un generico pacchetto. Calcolare la corrispondente cdf.

(b) Calcolare la probabilità che un pacchetto arrivi entro $2t_0$ se passato t_0 non è ancora arrivato.

3. Data la sorgente $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$,

$\Pi = \{0.01, 0.02, 0.10, 0.02, 0.20, 0.65\}$ e i tre alfabeti di codice:

$\mathcal{B}_1 = \{0, 10, 011, 111010, 1111\}$;

$\mathcal{B}_2 = \{100, 1001, 10011, 100111, 1001111, 10011111\}$;

$\mathcal{B}_3 = \{00, 01, 10, 1111, 11101, 1100\}$.

(a) Determinare per ogni codice se esso è univocamente decodificabile e spiegare perché;

(b) valutare l'efficienza dei codici univocamente decodificabili;

(c) proporre un codice più efficiente.

4. Si progetti un codice ternario efficiente per sorgente estesa di ordine 4 ottenuta dalla sorgente binaria $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, con distribuzione $\{0.1, 0.9\}$ e se ne valuti l'efficienza.

TUC1/Prob. Inf.

④

$$X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\pi_1 = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$$

$$X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\pi_2 = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\}$$

a) $X_1 \in X_1 \quad X_2 \in X_2$

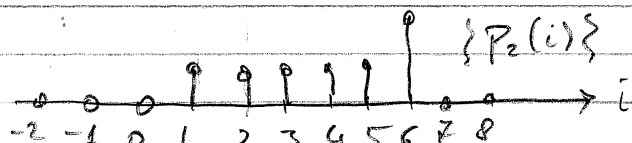
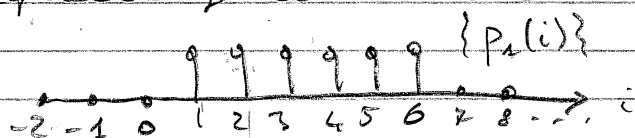
$$S = X_1 + X_2 \quad S \in \mathcal{S} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La distribuzione di S può essere ottenuta per enumerazione esaustiva delle 36 possibili coppie (X_1, X_2) , sommando i prodotti dei risultati che danno lo stesso valore (questo vale bene).
C'è però un metodo un po' più semplice (forse).

Notiamo che dal teorema della prob. totale

$$\begin{aligned} P\{S=j\} &= \sum_{i=1}^6 P\{S=j | X_1=i\} P\{X_1=i\} \\ &= \sum_{i=1}^6 P\{X_2=j-i\} P\{X_1=i\} \end{aligned}$$

Da considerare le sequenze $\{P_1(i)\}$ e $\{P_2(i)\}$, $i = -\infty, \dots, +\infty$ considerando zero ai valori non essenziali.



La sequenza di probabilità per S , $\{P_S(j)\}$ si ottiene quindi dalla "convoluzione discreta" di $\{P_1(i)\}$ e $\{P_2(i)\}$.

$$P_S(j) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_2(j-i) P_1(i)$$

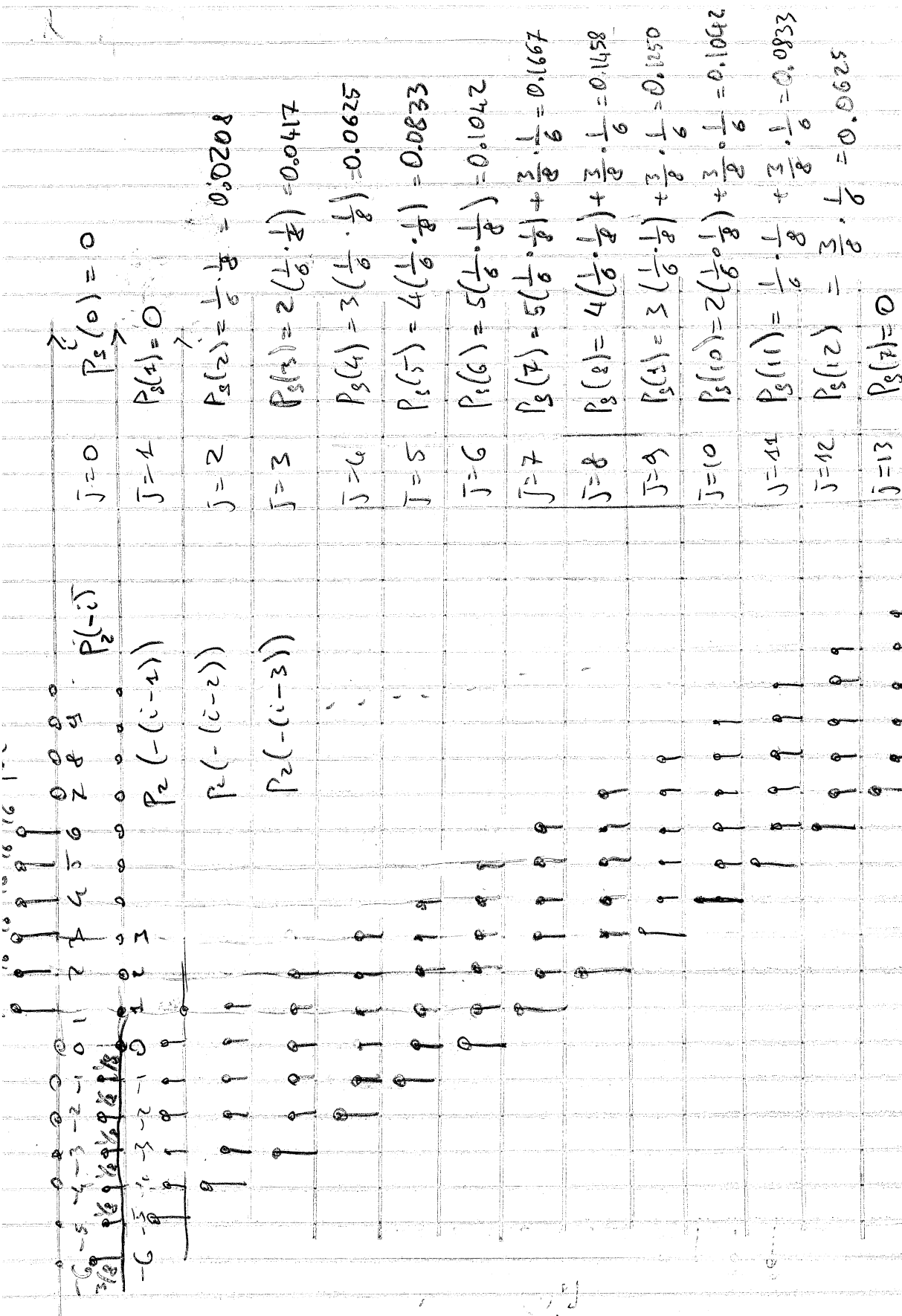
per la quale si può usare il metodo grafico del "flip-and-shift".

Osservando che

$$P_S(j) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_2(-(i-j)) P_1(i)$$

$P_2(-i-j) \in P_2(i)$ placed $P_2(-i)$ e "shifted" at j

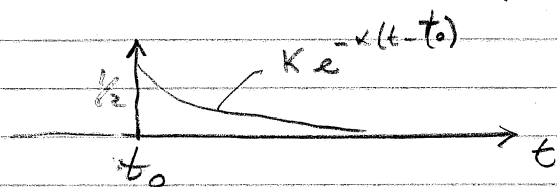
Print 18/7/2011
3.



in MATLAB: $P_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$
 $P_2 = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$
 $\text{conv}(P_1, P_2)$

$$\begin{aligned}
 b) P_2\{X_1=3 | S=8\} &= \frac{P_2\{X_1=3, S=8\}}{P_2\{S=8\}} = \frac{P_2\{X_2=5\}}{P_2\{S=10\}} \\
 &= \frac{0.1042}{0.8916} = 0.1169 \\
 &= \frac{P_2\{X_1=3, S=8\}}{P_2\{S=8\}} = \frac{P_2\{S=8 | X_1=3\} P_2\{X_1=3\}}{P_2\{S=8\}} \\
 &= \frac{P_2\{X_2=5\} P_2\{X_1=3\}}{P_2\{S=8\}} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}{0.1458} = 0.1429
 \end{aligned}$$

(2) $P_2\{T=t_0\} = \frac{1}{2}$ c'è una "incrinatura" di probabilità per
 (a) $\alpha/2$ concentrata in t_0 . Il resto della somma è
 distribuita secondo una pdf esponenziale.



$$f_T(t) = \frac{1}{2} \delta(t-t_0) + K e^{-\alpha(t-t_0)} u(t-t_0) \propto \text{dato.}$$

$$\text{Perché } \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) dt = 1, \quad \int_{t_0}^{+\infty} K e^{-\alpha(t-t_0)} dt = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{K e^{-\alpha(t-t_0)}}{-\alpha} \right]_{t_0}^{\infty} = \frac{K}{\alpha} \quad \frac{K}{\alpha} = \frac{1}{2}, \quad K = \frac{\alpha}{2}$$

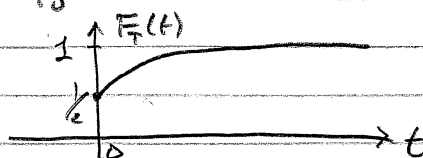
$$f_T(t) = \frac{1}{2} \delta(t-t_0) + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha(t-t_0)} u(t-t_0)$$

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(\xi) d\xi = 0 \quad t < t_0$$

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(\xi) d\xi = \frac{1}{2} + \int_{t_0}^t \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha(\xi-t_0)} d\xi \quad t > t_0$$

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{\alpha}{2} \frac{e^{-\alpha(\xi-t_0)}}{-\alpha} \right]_{t_0}^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^{-\alpha(t-t_0)} - 1)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha(t-t_0)}$$



proof 10/7/2011
5.

$$b) P_r \{ T < 2t_0 \mid T > t_0 \} =$$

Qui c'è quella
non è importante
perché la pdf a t_0
è continua.

Qui è una riaggiustazione
della scala in t_0 e' una
ovale.

$$= \frac{P_r \{ T < 2t_0, T > t_0 \}}{P_r \{ T > t_0 \}} = \frac{P_r \{ t_0 < T < 2t_0 \}}{1/2}$$

$$P_r \{ t_0 < T < 2t_0 \} = \int_{t_0}^{2t_0} \frac{x}{2} e^{-x(t-t_0)} dt = \frac{x}{2} \left[\frac{e^{-x(t-t_0)}}{-x} \right]_{t_0}^{2t_0}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{-x t_0})$$

$$P_r \{ T < 2t_0 \mid T > t_0 \} = 1 - e^{-x t_0}$$

$$\mathcal{X} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

(3) $\pi = \{0.01, 0.02, 0.10, 0.02, 0.20, 0.65\}$

$$H(\pi) = 1.4927 \text{ bit}$$

$$B_1 = \{0, 10, 011, 111010, 1111\}$$

Codice non a prefisso e non U.D.

$$B_2 = \{100, 1001, 10011, 100111, 1001111, 10011111\}$$

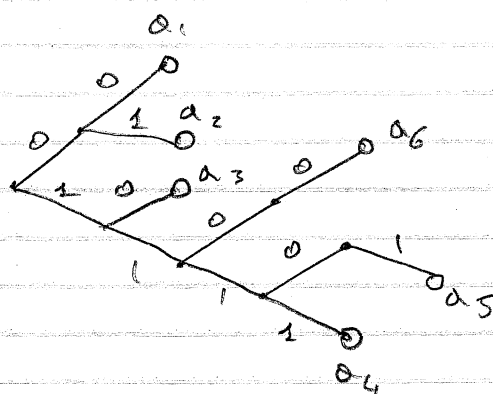
Codice non a prefisso, ma istantaneo poiché la seq. 100 può essere usata come elemento di separazione. Il numero di "1" che segue 0, 1, 2, 3, 4, 5 corrisponde al simbolo.

$$L_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\bar{L}_2 = \sum_{i=1}^6 l_i p_i = 7.33 \text{ bit}$$

$$\eta_2 = \frac{H(\pi)}{\bar{L}_2} = 0.2036$$

$$B_3 = \{00, 01, 10, 1111, 11101, 1100\}$$



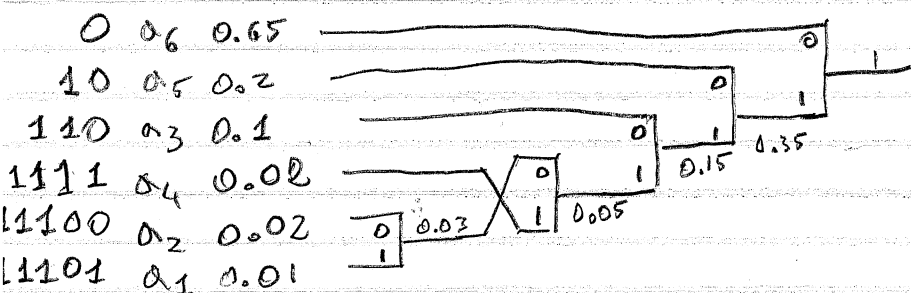
codice a prefisso, quindi U.D.

$$L_3 = \{2, 2, 2, 4, 5, 4\}$$

$$\bar{L}_3 = 3.94 \text{ bit}$$

$$\eta_3 = \frac{H(\pi)}{\bar{L}_3} = 0.3789$$

Final 18/7/2011
70



$$B_4 = \{11101, 11100, 110, 1111, 10, 0\}$$

$$L_4 = \{5, 5, 3, 4, 2, 1\}$$

$$\bar{L}_4 = 1.58 \text{ bit}$$

$$\eta_4 = \frac{H(\pi)}{\bar{L}_4} = 0.9447$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{R} = \{0, 1\} \quad \pi = \{0.1, 0.9\}$$

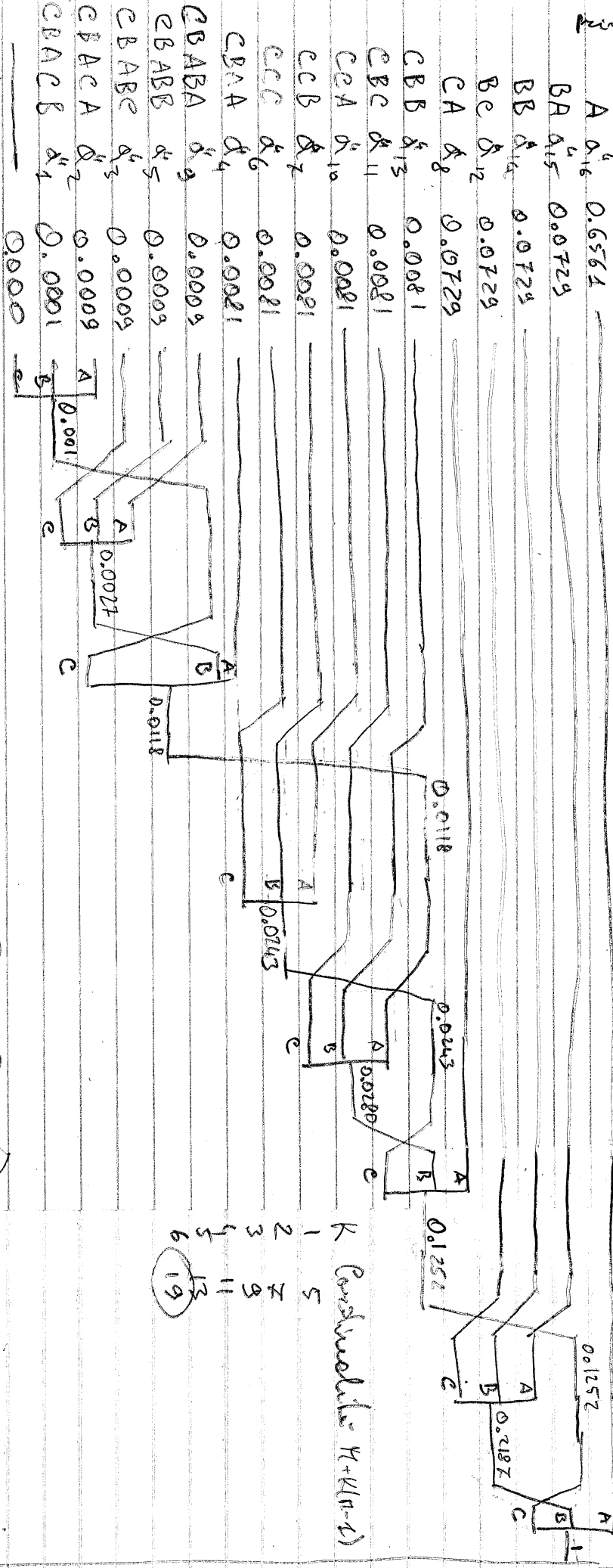
$$\mathcal{R}^4 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R}^4 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & a_6^4 & a_7^4 & a_8^4 \\ 0.0001, & 0.0009, & 0.0009, & 0.0081, & 0.0009, & 0.0081, & 0.0081, & 0.0729, \\ a_9^4 & a_{10}^4 & a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & a_{14}^4 & a_{15}^4 & a_{16}^4 \\ 0.0009, & 0.0081, & 0.0081, & 0.0729, & 0.0081, & 0.0729, & 0.0729, & 0.6561 \end{array} \right\}$$

$$H(\pi) = 0.4690 \text{ bit} \quad H(\pi^4) = 4 H(\pi)$$

18/11/2017

8



$L^4 = 1.44417$ unit

$$\eta_4 = \frac{LH(\pi)}{L_3 L_4} = 0.8384$$

K Coordinate: $H + K(n-1)$

1 5
2 8
3 11
4 13
5 19