princ f.14092011.1

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TELECOMUNICAZIONI 1
PROBABILITA' E INFORMAZIONE
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
19 settembre 2011

SOLUZIONI

1. Si consideri una corsa con 3 cavalli A,B,C. Nessun cavallo é favorito. Si valuti

(a) La probabilità che la corsa finisca con la classifica BAC.

(b) La probabilità che il cavallo C finisca primo o secondo.

(c) La probabilitá che dato che il cavallo A finisce terzo, il cavallo B vinca.

(d) se gli eventi "il cavallo A vince" e "il cavallo C arriva terzo" sono indipendenti.

2. Per andare da Roma a Napoli e ritorno, si impiegano 2 + 2 ore in media. Se il tempo impiegato da Napoli a Roma é modellato come una variabile aleatoria gaussiana con deviazione standard di 20 minuti e analogamente quello da Roma a Napoli con una deviazione standard di 15 minuti

(a) Calcolare la probabilità che tutto il viaggio duri piú di due quattro ore e mezzo;

(b) Calcolare la probabilità che viaggio duri tra 3 ore e 50 minuti e 4 ore e 10 minuti, dato che il viaggio di andata é durato 1 ora e 50.

3. Data la sorgente $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,
$\Pi = \{0.5, 0.1, 0.2, 0.2\}$ e i tre alfabeti di codice:
$\mathcal{B}_1 = \{1, 0, 10, 1110\}$;
$\mathcal{B}_2 = \{101, 1011, 10111, 101111\}$;
$\mathcal{B}_3 = \{000, 001, 01, 1\}$.

(a) Determinare per ogni codice se esso è univocamente decodificabile e spiegare perché;

(b) valutare l'efficienza dei codici univocamente decodificabili;

(c) proporre un codice più efficiente.

4. Si consideri un canale binario simmetrico con probabilitá d'errore $p = 0.01$. Si confronti probabilitá d'errore e capacitá per la cascata di uno, due, tre, quattro, cinque canali. Si proponga una espressione analitica per la cascata di n canali.

prinf.14022011.2

(1) A, B, C

(a) I risultati possibili della corsa sono tutti equiprobabili

	Pr
ABC	1/6
ACB	1/6
BAC	1/6
BCA	1/6
CAB	1/6
CBA	1/6

$$Pr\{BAC\} = \frac{1}{6}$$

(b) $Pr\{$C finisce primo OR C finisce secondo$\}$ eventi esclusivi.

$= Pr\{$C finisce primo$\} + Pr\{$C finisce secondo$\}$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(c) $$Pr\{\text{A è terzo} \mid \text{B è primo}\} = \frac{Pr\{\text{A è terzo, B è primo}\}}{Pr\{\text{B è primo}\}}$$

$$= \frac{Pr\{BCA\}}{Pr\{\text{B è primo}\}} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(d) $Pr\{$"il cavallo A vince", "il cavallo C arriva terzo"$\} = Pr\{ABC\}$

$$= \frac{1}{6}$$

$Pr\{$"il cavallo A vince"$\} = \frac{1}{3}$

$Pr\{$"il cavallo C arriva terzo"$\} = \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9}$

$Pr\{$"il cavallo A vince", "il cavallo C arriva terzo"$\} \neq$

$Pr\{$"il cavallo A vince"$\} \cdot Pr\{$"il cavallo C arriva terzo"$\}$

eventi non indipendenti.

② Viaggio Napoli → Roma impiega T_1

Viaggio Roma → Napoli impiega T_2

$T = T_1 + T_2$ $\qquad$ $T_1 \propto N(t_1; \mu_1, \sigma_1)$ $\qquad$ v.a. indipendenti

$T_2 \propto N(t_2; \mu_2, \sigma_2)$

$\mu = 240$ min $\qquad$ $\mu_1 = 120$ minuti

$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (si sommano le varianze e non le deviazioni standard!!) $\qquad$ $\mu_2 = 120$ minuti.

$\sigma = \sqrt{(20)^2 + (15)^2} = 25$ $\qquad$ $\sigma_1 = 20$ min.

$\sigma_2 = 15$ min

(a)

$Pr\{T > 4h\,30'\} = Pr\{T > 270 \text{ min}\}$

$$= 1 - \phi\left(\frac{270 - 240}{25}\right) = 1 - \phi\left(\frac{30}{25}\right) = 1 - \phi(1.2)$$

$$= 1 - 0.8849 = 0.1151$$

(b) Usare la prob. condizionata potrebbe portare ad una incongruenza in quanto la $Pr\{T_1 = 1h\,50'\} = 0$.

Quindi il problema viene riformulato

$$T = \underbrace{t_1}_{\text{fissato}} + \underbrace{T_2}_{\text{aleatorio}} = 110 + T_2$$

$$\begin{cases} \mu_T = 110 + \mu_2 = 230 \text{ min.} \\ \sigma_T = \sigma_2 = 15 \text{ min.} \end{cases}$$

$Pr\{3h\,50' < T < 4h\,10'\} = Pr\{230 < T < 250\}$

$$= \phi\left(\frac{250 - 230}{15}\right) - \phi\left(\frac{230 - 230}{15}\right)$$

$$= \phi(1.33) - \phi(0) = 0.9082 - 0.5000 = 0.4082$$

(3)

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$\pi = \{0.5, 0.1, 0.2, 0.2\}$ $\qquad H(\pi) = 1.7610$ bit

$B_1 = \{1, 0, 10, 110\}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} > 1$ il codice non può essere U.D.

$B_2 = \{101, 1011, 10111, 101111\}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} < 1$ il codice potrebbe essere U.D.

Codice non a prefisso. Comunque il prefisso "101" è lo stesso per tutte le parole codice e quindi può essere usato come sequenza di separazione.

$\mathcal{L}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ $\qquad \overline{L}_2 = 4.10$ bit

$$\eta_2 = \frac{H(\pi)}{\overline{L}_2} = 0.4295$$

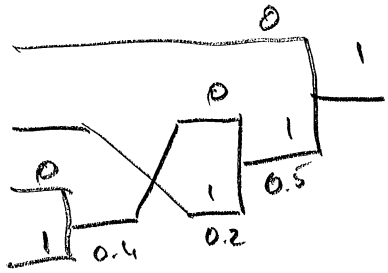
$B_3 = \{000, 001, 01, 1\}$

Codice a prefisso, quindi U.D.

$\mathcal{L}_3 = \{3, 3, 2, 1\}$ $\qquad \overline{L}_3 = 2.4$ bit

$\eta_3 = 0.7338$

0	0.5	a_1
11	0.2	a_3
100	0.2	a_4
101	0.2	a_2

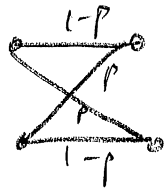


$B_4 = \{0, 101, 11, 100\}$

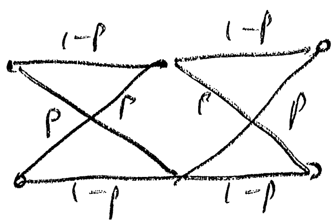
$\mathcal{L}_4 = \{1, 3, 2, 3\}$ $\quad \overline{L}_4 = 1.8$ bit.

$$\eta_4 = \frac{H(\pi)}{\overline{L}_4} = 0.9783$$

(4) Rinf.15032011.6

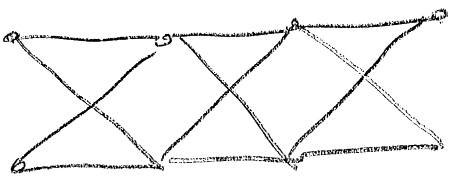


$$P_1 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \qquad P_e(1) = p = 0.0100$$



$$P_2 = P_1 \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)^2+p^2 & (1-p)p+p(1-p) \\ (1-p)p+p(1-p) & (1-p)^2+p^2 \end{bmatrix}$$

$$P_e(2) = 2p(1-p) = 0.0198$$



$$P_3 = P_2 \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

3 errori

1 errore

$$= \begin{bmatrix} 1 - \bullet & p(1-p)^2 + p^3 + p(1-p)^2 + (1-p)^2 p \\ \bullet & 1 - \bullet \end{bmatrix}$$

$$P_e(3) = \Pr\{1 \text{ errore}\} + \Pr\{3 \text{ errori}\}$$

$$= \binom{3}{1} p(1-p)^2 + \binom{3}{3} p^3 = 3p(1-p)^2 + p^3 = 0.0294$$

In generale il canale equivalente è un BSC. $P_e(n) = \Pr\{\text{si verifica un numero dispari di errori}\}$

$$P_e(4) = \binom{4}{1} p(1-p)^3 + \binom{4}{3} p^3(1-p) = 4p(1-p)^3 + \frac{4!}{3!(4-3)!} p^3(1-p)$$

$$= 4p(1-p)^3 + 4p^3(1-p) = 0.0388$$

$$P_e(5) = \binom{5}{1} p(1-p)^4 + \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{5} p^5$$

$$= 5p(1-p)^4 + \frac{5!}{3!(5-3)!} p^3(1-p)^2 + p^5$$

$$= 5p(1-p)^4 + 10p^3(1-p)^2 + p^5 = 0.0480$$

$C_1 = 1 - H(P_e(1)) = 0.9192$ bit

$C_2 = 1 - H(P_e(2)) = 0.8597$ bit

$C_3 = 1 - H(P_e(3)) = 0.8086$ bit

$C_4 = 1 - H(P_e(4)) = 0.7632$ bit

$C_5 = 1 - H(P_e(5)) = 0{,}7220$ bit.

$$\begin{cases} P_e(n) = \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ C(n) = 1 - H(P_e(n)) \end{cases}$$