SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Probabilitá e Informazione/Telecomunicazioni 1
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
lunedi 31 ottobre, 2011

SOLUZIONI

1. Da un mazzo di 52 carte francesi vengono estratte 5 carte. Valutare
(a) la probabilità che ci sia una scala 9-10-J-Q-K;
(b) la probabilità che ci sia almeno una carta di cuori.

2. Impianti A e B producono condensatori da 100 μF in percentuali rispettivamente del 30 e del 70 %. Le due produzioni forniscono capacitá aleatorie gaussiane distribuite attorno al valore nominale ma con deviazioni standard rispettivamente $\sigma_A = 1\ \mu F$, $\sigma_B = 3\ \mu F$. Valutare la probabilità che un condendatore avente capacitá compresa tra 102 e 103 μF provenga dall'impianto A.

3. Si consideri una sorgente con alfabeto $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ e distribuzione $\Pi = \{0.1, 0.1, 0.8\}$, che emette simboli con cadenza di 1.5 Kbaud. Valutare:
(a) il bit-rate e la velocità di informazione (tasso informativo);
(b) progettare un codice **binario** per la sorgente e valutarne l'efficienza.
(c) progettare un codice **binario** per la sorgente di ordine 2 e valutarne l'efficienza.

4. Una tastiera a quattro tasti A- B-C-D é soggetta a errori di battitura. Ogni carattere puó essere confuso con uno dei suoi adiacenti. Da un'analisi statistica é stato determinato che A puó essere confusa con B con probabilitá pari a 0.2; D con C con probabilitá 0.1; B con A e C con probabilitá rispettivamente 0.1 e 0.2; C con B e D con probabilitá rispettivamente 0.1 e 0.2. Le lettere si presentano con frequenze relative pari a $\{0.1, 0.2, 0, 5, 0.2\}$.
(a) Modellare il sistema con un canale equivalente e calcolare la probabilitá di errore media;
(b) Proporre un eventuale correttore (ric. ottimo) e valutarne la prob di errore risultante.

SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Probabilitá e Informazione/Telecomunicazioni 1
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
lunedi 31 ottobre, 2011

SOLUZIONI

1. Da un mazzo di 52 carte francesi vengono estratte 5 carte. Valutare
(a) la probabilità che ci sia una scala 9-10-J-Q-K;
(b) la probabilità che ci sia almeno una carta di cuori.

2. Impianti A e B producono condensatori da 100 μF in percentuali rispettivamente del 30 e del 70 %. Le due produzioni forniscono capacitá aleatorie gaussiane distribuite attorno al valore nominale ma con deviazioni standard rispettivamente $\sigma_A = 1\ \mu F$, $\sigma_B = 3\ \mu F$. Valutare la probabilità che un condendatore avente capacitá compresa tra 102 e 103 μF provenga dall'impianto A.

3. Si consideri una sorgente con alfabeto $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ e distribuzione $\Pi = \{0.1, 0.1, 0.8\}$, che emette simboli con cadenza di 1.5 Kbaud. Valutare:
(a) il bit-rate e la velocità di informazione (tasso informativo);
(b) progettare un codice **binario** per la sorgente e valutarne l'efficienza.
(c) progettare un codice **binario** per la sorgente di ordine 2 e valutarne l'efficienza.

4. Una tastiera a quattro tasti A- B-C-D é soggetta a errori di battitura. Ogni carattere puó essere confuso con uno dei suoi adiacenti. Da un'analisi statistica é stato determinato che A puó essere confusa con B con probabilitá pari a 0.2; D con C con probabilitá 0.1; B con A e C con probabilitá rispettivamente 0.1 e 0.2; C con B e D con probabilitá rispettivamente 0.1 e 0.2. Le lettere si presentano con frequenze relative pari a $\{0.1, 0.2, 0, 5, 0.2\}$.
(a) Modellare il sistema con un canale equivalente e calcolare la probabilitá di errore media;
(b) Proporre un eventuale correttore (ric. ottimo) e valutarne la prob di errore risultante.

① Mazzo di carte francesi

52 carte $\{13$ fiori, 13 picche, 13 cuori, 13 quadri$\}$

(a) Pr{ viene estratta la scala 9-10-J-Q-K }

$$= \frac{\text{\# di modi in cui si può ottenere il set } 9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\text{-}K \text{ (non ordinato)}}{\text{\# di modi in cui una seq. di 5 carte può essere estratta (ordinata)}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}\text{\# di modi di}\\ \text{ottenere } 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# di modi di}\\ \text{ottenere } 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# di modi}\\ \text{di ottenere}\\ J\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# di modi}\\ \text{di ottenere}\\ Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# di modi}\\ \text{di ott.}\\ K\end{pmatrix}(\text{\# permut.})}{(52)_5}$$

$$= \frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 5!}{\frac{52!}{(52-5)!}} = \frac{4^5\ 5!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} =$$

$$= 4.0221\cdot 10^{-4}$$

(a) Procedimento alternativo

Pr{viene estratta la scala 9-10-J-Q-K}

= Pr{estratta la scala ordinata 9-10-J-Q-K} +

+ Pr{estratta la scala ordinata 9-10-J-K-Q} +

$+ \ldots + \ldots + \ldots$ (5! permutazioni)

Consideriamo la singola permutazione 9-10-J-Q-K

$$Pr\{9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\text{-}K\} = Pr\{K|9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\}\, Pr\{9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\}$$

$$= Pr\{K|9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\}\, P(Q|9\text{-}10\text{-}J\}\, Pr\{9\text{-}10\text{-}J\}$$

$$= Pr\{K|9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\}\, Pr\{Q|9\text{-}10\text{-}J\}\, Pr\{J|9\text{-}10\}\, Pr\{9\text{-}10\}$$

$$= Pr\{K|9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\}\, Pr\{Q|9\text{-}10\text{-}J\}\, Pr\{J|9\text{-}10\}\, Pr\{10|9\}\, Pr\{9\}$$

Risolvo in ordine inverso.

$$Pr\{9-10-J-Q-K\} = Pr\{9\}\, P(10|9)\, P(J|9-10)\, Pr\{Q|9-10-J\}\, P(K|9-10-J-Q)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \; \frac{4}{49} \; \frac{4}{48}$$

$$Pr\{\text{viene estratta la scala } 9\text{-}10\text{-}J\text{-}Q\text{-}K\} = \frac{4^5\, 5!}{(52)_5}$$

(b) $Pr\{$almeno una carta di cuori$\} = 1 - Pr\{$nessuna carta di cuori$\}$

$$= 1 - \frac{\#\text{possibili seq. ordinate che non contengono carte di cuori}}{\#\text{possibili seq. ordinate di 5 carte}}$$

$$= 1 - \frac{(39)_5}{(52)_5} = 1 - \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

$$= 1 - 0.2215 = 0.7785$$

Interessante confrontare con il caso con rimpiazzo:

$Pr\{$carta di cuori$\} = \frac{1}{4}$

$Pr\{$carta non di cuori$\} = \frac{3}{4}$

$Pr\{$seq. di carte non di cuori$\} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0.2373$

$Pr\{$almeno una carta di cuori$\} = 0.7627$

(2)

A , B

$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.7 \qquad C_0 = 100\mu F$

$P(C|A) \propto N(C;\,100,\,\sigma_A^2 = 1)$

$P(C|B) \propto N(C;\,100,\,\sigma_B^2 = 9)$

$$P_r\{A \mid 102 < C < 103\} = \frac{P_r\{102 \le C \le 103 \mid A\}\,P(A)}{P(103 \le C \le 104)}$$

$$P_r\{102 \le C \le 103 \mid A\} = \phi\left(\frac{103-100}{1}\right) - \phi\left(\frac{102-100}{1}\right)$$

$$= \phi(3) - \phi(2) = 0.9987 - 0.9772 = 0.0215$$

$$P_r\{102 \le C \le 103 \mid B\} = \phi\left(\frac{103-100}{3}\right) - \phi\left(\frac{102-100}{3}\right)$$

$$= \phi(1) - \phi(0.67) = 0.8413 - 0.7486 = 0.0927$$

$$P_r\{A \mid 102 < C < 103\} = \frac{P_r\{102 \le C \le 103 \mid A\}\,P(A)}{P_r\{102 \le C \le 103 \mid A\}P(A) + P_r\{102 \le C \le 103 \mid B\}P(B)}$$

$$= \frac{0.0215 \cdot 0.3}{0.0215 \cdot 0.3 + 0.0927 \cdot 0.7} = 0.0904$$

$$P(B \mid 102 < C < 103) = 1 - P(A \mid 102 < C < 103\} = 0.9096$$

(3) $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\Pi = \{0.1, 0.1, 0.8\}$ $\qquad H(\Pi) = 0.9219$

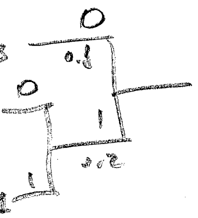
(a) $\frac{1}{T} = 1500$ baud

$$B_r = \frac{\log_2 M}{T} = \log_2 3 \, \frac{1}{T} = 2377 \text{ bit/sec.}$$

$$R = \frac{H(\Pi)}{T} = 0.9219 \cdot 1500 = 1383 \text{ bit/sec.}$$

(b)

0	0.8	a_3
10	0.1	a_2
11	0.1	a_1



$\mathcal{C}_1 = \{11, 10, 0\}$

$\mathcal{L}_1 = \{2, 2, 1\}$

$\eta_1 = \frac{H(\Pi)}{\bar{L}_1} = 0.7683$ $\qquad \bar{L}_1 = 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + 0.8 = 1.2$ bit

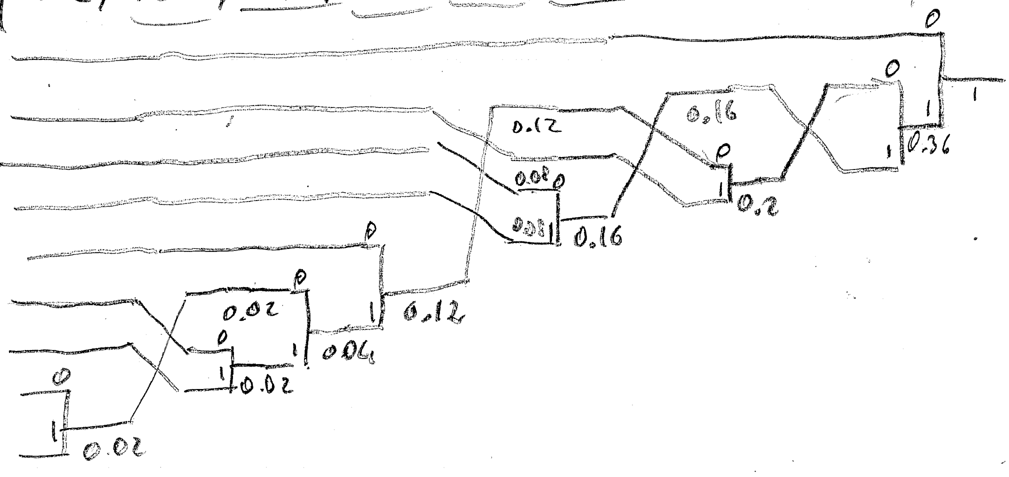
(c) Sorgente estesa di ordine 2

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \times \mathcal{A} = \{a_1a_1, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_1, a_2a_2, a_2a_3, a_3a_1, a_3a_2, a_3a_3\}$$

$$\mathcal{A}^2 = \{a^2_1, a^2_2, a^2_3, a^2_4, a^2_5, a^2_6, a^2_7, a^2_8, a^2_9\}$$

$$\Pi^2 = \{0.01, 0.01, 0.08, 0.01, 0.01, 0.08, 0.08, 0.08, 0.64\}$$

0	0.64	a^2_9
101	0.08	a^2_8
011	0.08	a^2_7
111	0.08	a^2_6
0001	0.08	a^2_3
011001	0.01	a^2_5
111001	0.01	a^2_4
001001	0.01	a^2_2
101001	0.01	a^2_1



$$\mathcal{C}_2 = \{\overset{a_1^2}{101001}, \overset{a_2^2}{001001}, \overset{a_3^2}{0001}, \overset{a_4^2}{111001}, \overset{a_5^2}{011001}, \overset{a_6^2}{111}, \overset{a_7^2}{011}, \overset{a_8^2}{101}, \overset{a_9^2}{0}\}$$

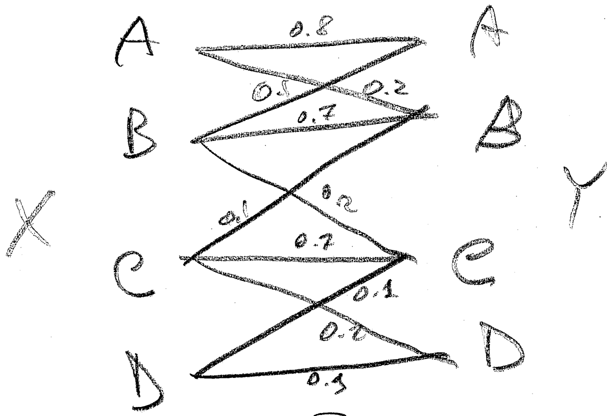
$$\mathcal{L}_2 = \{6, 6, 4, 6, 6, 3, 3, 3, 1\}$$

$$\bar{L}_2 = 1.92 \text{ bit.}$$

$$\eta_2 = \frac{2H(\pi)}{\bar{L}_2} = \frac{2 \cdot 0.9219}{1.92} = 0.9603$$

---

(6) A, B, C, D



$$\pi_X = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.2\}$$

(a)

$$\underline{\underline{P}}_c = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ B & 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ C & 0 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ D & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{array}$$

$$P_e = 1 - P_c = 1 - \text{diag}(P_c) \cdot \pi = 0.25$$

(b) La matrice delle prob. a posteriori è

$$P_p = \begin{bmatrix} P_r\{X=A \mid Y=A\} & \cdots & P(X=D \mid Y=A\} \\ \vdots & & \\ P_r\{X=A \mid Y=D\} & & P_r\{X=D \mid Y=D\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.0952 & 0 & 0 \\ 0.2000 & 0.6667 & 0.0976 & \\ 0 & 0.2381 & 0.8537 & 0.3571 \\ 0 & 0 & 0.0488 & 0.6429 \end{bmatrix}$$

Nonostante ci sia una certa distribuzione delle posteriori, la scelta migliore è comunque lasciare i simboli invariati. La prob. di errore resta quindi la stessa.