SECONDA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
FACOLTA' DI INGEGNERIA

TELECOMUNICAZIONI 1
PROBABILITA' E INFORMAZIONE
Prof. F. Palmieri
Esame scritto
lunedi 9 maggio 2011

SOLUZIONI

1. In un torneo si giocano tre partite G_1, G_2 e G_3. Il risultato di ogni partita é X, 1 o 2. Le prime due partite si giocano di mattina e i loro risultati sono indipendenti con distribuzioni $\Pi_{G_1} = \Pi_{G_2} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$. La terza partita G_3 si gioca di sera e il risultato é influenzato dal risultato della prima partita (ma non dalla seconda, visto che G_1 e G_3 sono testa a testa nella classifica). La distribuzione della terza partita é $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ se $G_1 = X$; $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\}$ se $G_1 = 1$;$\{\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$ se $G_1 = 2$.

(a) Calcolare la probabilitá che tutte le partite finiscano in paritá.

(b) Calcolare la probabilità che l'ultima partita finisca con un 1.

Suggerimento: Si noti che dalle assunzioni di dipendenza $P(G_1, G_2, G_3) = P(G_1, G_3)P(G_2)$.

2. Due termometri di diversa precisione misurano la temperatura dell'aria T_0 in gradi Celsius. Le misure sono modellate come due variabili aleatorie $X_1 = T_0 + W_1$ e $X_2 = T_0 + W_2$, dove T_0 é una costante e W_1 e W_2 sono due variabili aleatorie gaussiane a media nulla aventi deviazioni standard rispettivamente $\sigma_1 = 0.5$ C e $\sigma_2 = 1.5$ C.

(a) Calcolare la probabilità entrambi i termometri riportino un errore assoluto minore di 0.5 gradi.

(b) Calcolare la probabilità che almeno un termometro riporti un errore assoluto minore di 0.5 gradi.

3. Data la sorgente $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,
$\Pi = \{0.05, 0.10, 0.01, 0.10, 0.74\}$ e i tre alfabeti di codice:
$\mathcal{B}_1 = \{10, 01, 1, 1010, 1111\}$;
$\mathcal{B}_2 = \{10, 100, 1000, 10000, 100000\}$;
$\mathcal{B}_3 = \{00, 011, 101, 1111, 1000\}$.

(a) Determinare per ogni codice se esso è univocamente decodificabile e spiegare perché;

(b) valutare l'efficienza dei codici univocamente decodificabili;

(c) proporre un codice più efficiente.

4. Si progetti un codice **ternario** efficiente per la sorgente estesa di ordine 3 estratta dalla sorgente binaria $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\Pi = \{0.27, 0.73\}$ e se ne valuti l'efficienza.

(1) B_1, B_2, B_3 $\quad$ $B_1 \in \{X, 1, 2\}$

$B_2 \in \{X, 1, 2\}$

$B_3 \in \{X, 1, 2\}$

$\pi_{B_1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\} = \pi_{B_2}$

$Pr\{B_3 = X \mid B_1 = X\} = \frac{1}{3}$	$Pr\{B_3 = X \mid B_1 = 1\} = \frac{1}{5}$	$Pr\{B_3 = X \mid B_1 = 2\} = \frac{3}{5}$
$Pr\{B_3 = 1 \mid B_1 = X\} = \frac{1}{3}$	$Pr\{B_3 = 1 \mid B_1 = 1\} = \frac{1}{5}$	$Pr\{B_3 = 1 \mid B_1 = 2\} = \frac{1}{5}$
$Pr\{B_3 = 2 \mid B_1 = X\} = \frac{1}{3}$	$Pr\{B_3 = 2 \mid B_1 = 1\} = \frac{3}{5}$	$Pr\{B_3 = 2 \mid B_1 = 2\} = \frac{1}{5}$

$$P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1 B_3) P(B_2)$$

(a) $Pr\{B_1 = X, B_2 = X, B_3 = X\} = Pr\{B_1 = X, B_3 = X\} Pr\{B_2 = X\}$

$= Pr\{B_3 = X \mid B_1 = X\} Pr\{B_1 = X\} Pr\{B_2 = X\}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

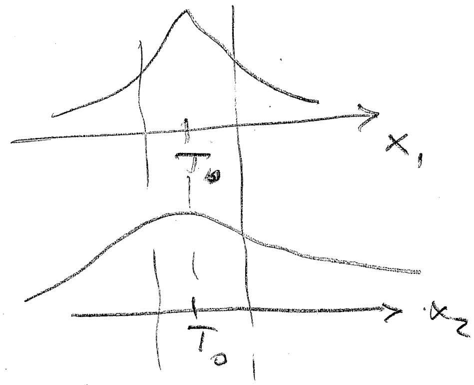
(b) $Pr\{B_3 = 1\} = Pr\{B_3 = 1 \mid B_1 = X\} Pr\{B_1 = X\}$

$+ Pr\{B_3 = 1 \mid B_1 = 1\} Pr\{B_1 = 1\} + Pr\{B_3 = 1 \mid B_1 = 2\} Pr\{B_1 = 2\}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{5+2+1}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

(2) $W_1 \propto N(w_1; 0; \sigma_1)$ $\quad \sigma_1 = 0.5\ °C$

$W_2 \propto N(w_2, 0, \sigma_2)$ $\quad \sigma_2 = 1.5\ °C$



(a) $P_r\{-0.5 < W_1 < 0.5,\ -0.5 < W_2 < 0.5\}$

$= P_r\{-0.5 < W_1 < 0.5\} \cdot$

$\cdot P_r\{-0.5 < W_2 < 0.5\}$

$$= \left[\phi\left(\frac{0.5}{0.5}\right) - \phi\left(\frac{-0.5}{0.5}\right)\right]\left[\phi\left(\frac{0.5}{1.5}\right) - \phi\left(\frac{-0.5}{1.5}\right)\right]$$

$$= \left[2\phi(1) - 1\right]\left[2\phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right] = (2 \cdot 0.8413 - 1)(2\ 0.6293 - 1)$$

$= 0.1765$

(b) $P_r\{$ almeno uno riporta un errore tra -0.5 e $0.5\}$

$= P_r\{W_1 \in [-0.5, 0.5],\ W_2 \notin [-0.5, 0.5]\}$

$+ P_r\{W_1 \notin [-0.5, 0.5],\ W_2 \in [-0.5, 0.5]\}$

$+ P_r\{W_1 \in [-0.5, 0.5],\ W_2 \in [-0.5, 0.5]\}$

$= \underbrace{P_r\{W_1 \in [-0.5, 0.5]\}}_{p_1} \cdot P_r\{W_2 \notin [-0.5\ 0.5]\}$ $\qquad p_1 = 0.6826$

$+ P_r\{W_1 \notin [-0.5, 0.5]\} \cdot \underbrace{P_r\{W_2 \in [-0.5, 0.5]\}}_{p_2}$ $\qquad p_2 = 0.2586$

$+ P_r\{W_1 \in [-0.5, 0.5]\} \cdot P_r\{W_2 \in [-0.5, 0.5]\}$

$= p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2 + p_1 p_2 \quad = 0.7647$